한국소음진동공학회논문집 제 12 권 제 11 호, pp. 890~896, 2002.

주기적인 마찰력을 받는 드럼-브레이크 슈의 동적안정성

Dynamic Stability of a Drum-brake Shoe Under a Pulsating Frictional Force

류 봉 조† · 오 부 진* · 임 경 빈** · 김 효 준***

Bong Jo Ryu, Boo Jin Oh, Kyung Bin Yim and Hyo Jun Kim

(2002년 8월 8일 접수 ; 2002년 10월 16일 심사완료)

Key Words : Dynamic Stability(동적안정성), Drum-brake Shoe(드럼-브레이크 슈), Pulsating Frictional Force(주기적인 마찰력), Finite Element Method(유한요소법)

ABSTRACT

This paper deals with the dynamic stability of a brake shoe under pulsating frictional forces. A lining part of brake systems is assumed as a distributed spring, and the supported elements of a shoe are assumed as translational springs for a constant distributed frictional force and a pulsating frictional force. Governing equations are derived by the use of the extended Hamilton's principle, and numerical results are calculated by finite element method. The critical distributed frictional force and instability regions were investigated for the change of distributed spring constants and translational spring constants.

1. 서 론

브레이크 시스템은 건성 마찰(dry friction)을 이용하여 제동력을 얻는 기계장치로써, 트럭이나 버스 등과 같이 무거운 차량 류에 많이 이용되고 있다. 이러한 마찰력에 의한 불안정한 진동은 브레이크 시스템에 가해지는 마찰력의 크기와 브레이크-슈를 지지하는 경계조건에 의해 좌우되며, 차량의 승차쾌적감이나 브레이크 시스템 자체의 안정성에 중요한 영향을 미치므로 많은 연구자들의 관심의 대상이 되고 있다. 일반적으로 회전하는 드럼의 가진 하에 있는 브레이크-슈의 진동을 지배하는 운동방정식은 기본적으로는 분포마찰력이 주어지는 보 모델과 같은 것으로 알려져 왔다.

이러한 분포 종동력이 주어지는 보와 같은 모델(beam-like model)의 동적 안정성 문제는 비보존 탄성 안정성문제로써 많은 연구자들에 의해 연구가 이루어져 왔다.[1~4]

이러한 연구들에 대한 기본 모델들은 비교적 세장비가 큰 Euler-Bernoulli보 모델에 대한 연구들이었으나 보의 회전관성과 전단변형 효과를 고려한 보 모델에 대한 연구들도 이루어져왔다.

Elishakoff와 Lottati[5]는 중간지점을 갖는 비보존계의 불안정을 지점의 위치변화에 따라 발산형과 플러터형이 발생함을 밝혀내었다.

한편, Richmond와 그의 공동연구자들[6]은 디스크 브레이크의 패드 설계를 위한 컴퓨터 해석 프로그램을 개발하였고, Hulten과 Flint[7]는 디스크 브레이크 스퀼(squeal)에 대해 assumed modes 방법을 이용하여 연구하였다. 최근 류봉조와 그의 공동연구자들[8]은 일정크기의 분포 마찰력이 주어지는 드럼 브레이크-슈의 동적안정성을 유한요소법을 사용하여 연구하였다.

† 책임저자, 정회원, 한밭대학교 기계공학부
E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr
Tel : (042) 821-1159, Fax : (042) 821-1587
* 정회원, 한밭대학교 대학원 기계설계공학과
** 동양공업대학 기계과
*** 정회원, 삼척대학교 기계공학과

이러한 연구들과 더불어 일정크기의 마찰력이 아닌 주기적인 마찰력이 작용되는 계에 대한 진동과 동적안정성 연구들도 이루어져 왔다.

초기의 연구로써는 Hsu[9]에 의한 연구가 이루어졌는데 그는 맥동 종동력이 주어지는 경우 보의 불안정 형태를 합형, 차형, 2배형으로 분류하였다. 최근 Kang과 Tan[10]은 브레이크 패드에 주어지는 마찰력을 맥동 분포 종동력으로 간주하여, 네가지 경계조건(양단단순지지, 양단고정, 한단고정-타단자유, 한단고정-타단 단순지지)을 갖는 Euler-Bernoulli보 모델의 맥동 불안정을 Galerkin방법을 이용하여 연구하였다.

이상의 연구들은 병진 스프링 지지된 보 모델에 일정크기의 분포마찰력이 주어진다든지, 아니면 분포 스프링 지지되어있지 않은 단순 보 모델에 주기적인 분포 마찰력이 주어지는 안정성 연구들이었다. 그러나 실제 드럼-브레이크 시스템에 대한 보다 더 근접된 수학적 모델은 라이닝(lining)부분을 분포 스프링으로 간주하고, caliper piston, caliper와 지지브래킷 등과 같은 부분 구조물들을 병진 스프링 지지된 것으로 간주한 보 모델일 것이다.

따라서, 본 논문에서는 병진 및 분포 스프링 지지된 보에 일정크기의 분포마찰력과 주기적인 맥동 분포마찰력이 작용하는 브레이크-슈의 동적안정성을 유한요소법을 사용하여 연구하였다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델 및 운동방정식

Fig. 1은 맥동 분포 마찰력을 받는 보에 대한 수학적 모델을 나타내고 있다. Fig. 1에서 k_1과 k_2는 각각 병진 스프링 상수를 나타내고 k는 분포 스프링 상수, $q(t)$는 시간 종속적인 분포마찰력, L은 슈의 전체 길이, x와 y는 각각 축방향과 횡방향 좌표를 나타낸다.

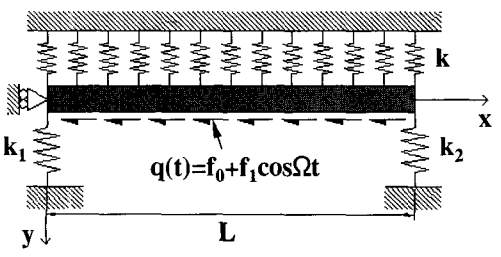

Fig. 1 A mathematical model

Fig. 1에 나타난 수학적 모델에 대한 운동지배방정식을 유도하기 위해 에너지 표현식을 사용하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A y_t^2 dx \tag{1}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI\, y_{xx}^2 dx + \frac{1}{2}k_1 y^2(0,t) + \frac{1}{2}k_2 y^2(L,t) + \frac{1}{2}\int_0^L k y^2 dx \tag{2}$$

$$W_C = \frac{1}{2}\int_0^L (f_0 + f_1\cos\Omega t)(L-x)\, y_x^2 dx \tag{3}$$

$$\delta W_{NC} = -\int_0^L (f_0 + f_1\cos\Omega t) y_x \delta y dx \tag{4}$$

식 (1)~(4)에서 ρ는 보의 밀도, A는 보의 횡단면적, y는 보의 횡방향 변위, E는 영률, I는 단면의 2차 모멘트, f_0와 f_1은 각각 주기적인 분포 마찰력의 일정크기 성분과 주기력 성분의 크기를 의미하고, Ω는 주기력의 진동수를 나타낸다. 또한, 하첨자 t와 x는 각각 시간과 축 방향 좌표에 대한 미분을 의미한다. 한편, T는 운동에너지, V는 탄성 포텐셜 에너지, W_c와 δW_{NC}는 각각 분포 마찰력의 보존일과 비보존 가상일을 나타낸다.

식 (1)에서 식 (4)를 확장된 Hamilton 원리

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V + W_C)dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta W_{NC} dt = 0 \tag{5}$$

에 대입하고 변분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^L [\rho A y_{tt}\delta y + EI y_{xx}\delta y_{xx} - (f_0 + f_1\cos\Omega t)(L-x) y_x \delta y_x + (f_0 + f_1\cos\Omega t) y_x \delta y + k y \delta y] dx + k_1 y(0,t)\delta y(0,t) + k_2 y(L,t)\delta y(L,t) = 0 \tag{6}$$

2.2 유한요소법의 적용

식 (6)에 나타난 지배방정식을 이산화된 지배방정식으로 표현하여 수치해를 얻기 위해 유한 요소법을 적용하였으며, 유한요소 모델은 Fig. 2와 같다.

계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표들

$$\eta = \frac{y}{l}, \quad x' = x - (i-1)l, \quad \xi = \frac{x'}{l} \tag{7}$$

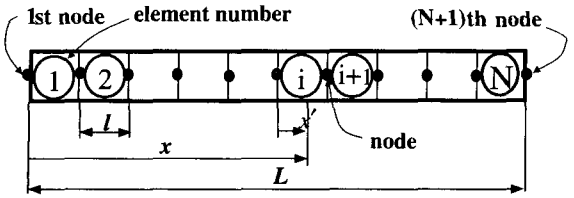

Fig. 2 A finite element model

과 파라미터들을 도입한다.

$$\Omega^* = \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}}\,\Omega,\ \gamma = \frac{f_0}{f_{cr}},\ \delta = \frac{f_1}{f_{cr}},\ K = \frac{kL^4}{EI},$$
$$Q_{cr} = \frac{f_{cr}L^3}{EI},\ K_1 = \frac{k_1 L^3}{EI},\ K_2 = \frac{k_2 L^3}{EI} \quad (8)$$

식 (8)에서 Ω^*는 맥동 분포 마찰력의 진동수 파라미터, Q_{cr}은 임계하중 파라미터, γ와 δ는 각각 무차원화된 일정 크기 마찰력과 맥동 마찰력 파라미터, K는 무차원화된 분포 스프링 상수, K_1과 K_2는 각각 좌단과 우단의 무차원화된 스프링 상수, f_{cr}은 일정크기의 분포마찰력만이 작용하는 경우의 임계 분포마찰력 값을 나타낸다.

식 (7)과 식 (8)을 식 (6)에 대입한 후, 해 $\eta^{(i)}(\xi, t)$를

$$\eta^{(i)}(\xi, t) = \eta^{(i)}(\xi) f(t) \quad (9)$$

라 가정하면 식 (6)은 다음과 같이 정리된다.

$$[M]\ddot{f}(t) + \{[K_1] - \gamma Q_{cr}[K_{II}]\} f(t) - \{\delta Q_{cr}[K_{II}]\cos\Omega t\} f(t) = \{0\} \quad (10)$$

식 (10)에서 $[M]$은 조합질량행렬, $[K_1]$는 탄성포텐셜 에너지에 의한 조합강성행렬, $[K_{II}]$는 외력에 의한 일에 대한 조합강성행렬이다.

2.3 안정성 해석

식 (10)의 고유치 행렬방정식의 모달행렬(modal matrix) $[P]$를 사용하여

$$\{f\} = [P]\{q\} \quad (11)$$

가 되도록 새로운 일반화된 좌표벡터 $\{q\}$를 도입하면 다음과 같이 다시 정리된다.

$$[I]\{\ddot{q}\} + [A]\{q\} - \delta Q_{cr}[D]\cos\Omega t\{q\} = \{0\} \quad (12)$$

여기서, $[I]$는 단위행렬, $[A]$는 시간에 따라 일정크기의 마찰력만이 작용되는 경우 보의 고유진동수의 제곱항, λ^2으로 구성된 대각행렬로 $[A] = [P]^{-1}[M]^{-1}[G][P]$이다.

한편, $[G] = [K_1] - \gamma Q_{cr}[K_{II}]$이고, $[D] = [P]^{-1}[M]^{-1}[K_{II}][P]$이다.

식 (12)로 유도되는 계에 대한 파라미터 불안정 영역은 참고문헌 (9)의 해석에 따라 다음과 같이 세 가지 형태로 분류된다.

(1) 2배형 불안정(twice type instability)

맥동 분포마찰력의 진동수 Ω가

$$|\Omega - 2\omega_j| < \delta(\Delta\theta_{jj}) \quad (13)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{jj} = \frac{1}{2}\left|\frac{d_{jj}}{\omega_j}\right|$$

이고, d_{jj}는 행렬 $[D]$의 요소이다.

즉, 2배형 불안정이란 주기력의 진동수 Ω가 계의 임의 번째의 고유진동수 w_j와 식 (13)인 관계에 놓이게 되면 일정크기의 분포마찰력만이 주어질 때의 안정한 영역 중에서도 주기력에 의해 불안정한 영역이 발생하는 것이다.

(2) 합형 불안정(sum type instability)

맥동 분포마찰력의 진동수 Ω가

$$|\Omega - (\omega_j + \omega_k)| < \delta(\Delta\theta_{jk}) \quad (14)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{jk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_{jk}d_{kj}}{\omega_j\omega_k}}$$

(3) 차형 불안정(difference type instability)

맥동 분포마찰력의 진동수 Ω가

$$|\Omega - (\omega_k - \omega_j)| < \delta(\Delta\theta_{kj}) \ (k<j) \quad (15)$$

인 조건을 만족하면 계는 불안정하다. 여기서,

$$\Delta\theta_{kj} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-d_{jk}d_{kj}}{\omega_j\omega_k}}$$

Table 1 Comparison present results with other available ones for critical distributed frictional forces

Method / Boundary condition	Ref.(4)	Present	Error(%)
Simply supported	18.96	18.9565	-0.0185
Clamped-clamped	80.26	80.2565	-0.0044
Clamped-hinged	57.00	57.0125	0.0219
Clamped-free	40.05	40.0528	0.0070

3. 수치해석 결과 및 검토

본 논문에서는 마찰력을 받는 브레이크-슈의 동적 안정성 해석을 크게 두가지 힘(일정 크기의 마찰력과 주기적인 마찰력)으로 나누어 연구하였으며, 먼저 일정 크기의 마찰력이 주어지는 경우에 있어서는 분포스프링 상수와 좌단 및 우단 병진 스프링 상수의 변화에 따른 임계 분포 마찰력과 불안정 형태를 구하였다. 둘째, 주기적인 마찰력이 주어지는 경우의 파라미터 불안정 해석은 Hsu[9]의 이론에 의해, 일정 크기의 마찰력이 주어질 때의 안정한 영역 중에서도 주기력의 진동수에 의해 유발되는 불안정 영역의 크기와 형태를 해석하였다.

본 논문에서는 수치해의 결과를 얻기 위해 보 모델을 20개의 유한요소로 분할하였으며, 수치해의 타당성 검토를 위해 일정크기의 분포마찰력만이 주어지는 경우 동일한 경계조건하의 이전의 연구결과[4]와 비교하였다.

비교한 결과를 Table 1에 나타내었으며, 본 논문의 연구결과의 타당성이 검토되었다.

3.1 일정크기의 분포 마찰력의 경우

Fig. 3은 분포 스프링 상수값 K와 좌·우단 스프링 상수값($K_1 = K_2$)의 변화에 따른 임계분포 마찰력 값의 변화를 나타낸 그림들이다. $K_1 = K_2 >$ 39.976일 때 K값에 관계없이 항상 발산형 불안정이 일어나고, $K_1 = K_2 <$ 39.976이면 항상 플러터형 불안정이 일어남을 알 수 있다. 또한, K값이 증가함에 따라 발산형 불안정을 일으키는 임계분포 마찰력 값이 증가하게 된다.

Fig. 4는 분포 스프링 상수 K가 $K=0.0$이고, 우단

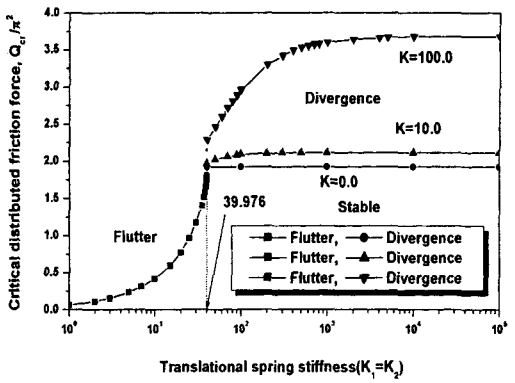

Fig. 3 Critical distributed frictional forces depending on elastic foundations and translational springs

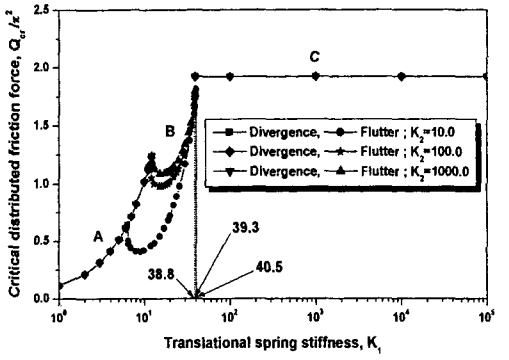

Fig. 4 Effect of the linear translational spring on stability of beams, when $K=0.0$

스프링 상수값 K_2가 $K_2=10$, 100, 1000일 때 좌단 스프링 상수 K_1값의 변화에 따른 임계분포 마찰력 값을 나타낸 그림들이다.

이 그림들에서 알 수 있는 것은 불안정형태가 발산형에서 플러터, 플러터에서 다시 점프하여 발산형 불안정으로 천이된다. 또한, $K_2=10$일 때는 $K_1 \geq$ 40.5, $K_2=100$일 때는 $K_1 \geq 39.3$, $K_2=1000$일때는 $K_1 \geq 38.8$에서 K_1값의 어떤 변화에 대해서도 항상 임계분포 마찰력값이 $Q_{cr}/\pi^2=1.921$의 값을 보여주고 있다.

3.2 주기적인 분포 마찰력의 경우

파라미터 불안정이란 일정크기의 분포마찰력만이 작용할 때의 안정한 영역 중에서도, 맥동 분포력에 의해 주기력의 진동수 Ω와 계의 고유진동수 ω가

어떤 특정관계($\Omega \approx \omega_i - \omega_j$ ($i=1, 2, \cdots$) : 차형불안정, $\Omega \approx 2\omega_i$ ($i=1, 2, \cdots$) : 2배형, $\Omega \approx \omega_i + \omega_j$ ($i=1, 2, \cdots$) : 합형)에 놓이게 되면 계가 불안정하게 되는 것을 일컫는다.

이에 대한 이론은 2. 3절에 잘 나타나 있다.

Fig. 5부터 Fig. 10은 분포 스프링상수 K가 $K=0$, 좌단 스프링상수, K_1이 $K_1=20$일 때, 우단 스프링 상수 K_2값의 변화에 따른 파라미터 불안정 영역들을 나타낸 그림들이다. 이 그림들에 있어 가로축은 무차원 맥동 분포력 δ로서, 일정크기 분포마찰력만이 작용할 때의 임계분포마찰력 크기의 1/2이내에서 계의 고유진동수 1, 2차와의 관계로부터 나타낸 파라미터 불안정 영역들이다.

먼저 $K_2=1, 10, 20$일 때는 $\omega_1+\omega_2$의 합형 불안정

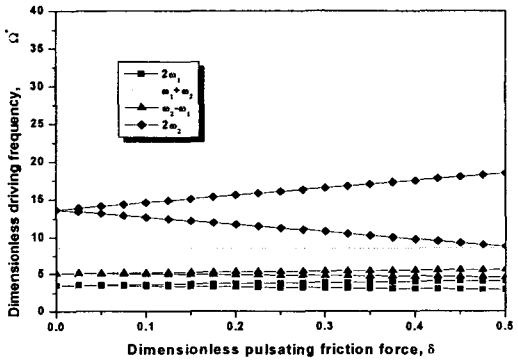

Fig. 5 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness ($K_1=20$, $K_2=1$)

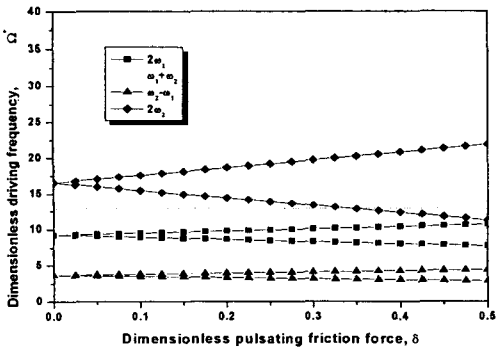

Fig. 6 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness($K_1=20$, $K_2=10$)

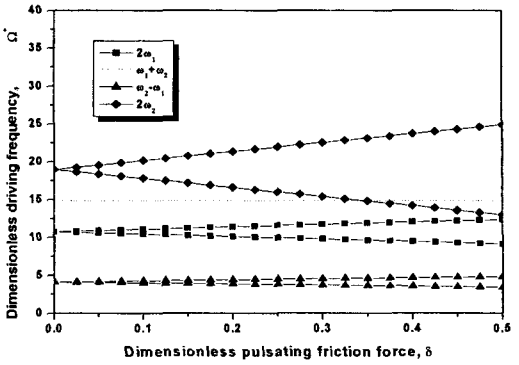

Fig. 7 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness($K_1=20$, $K_2=20$)

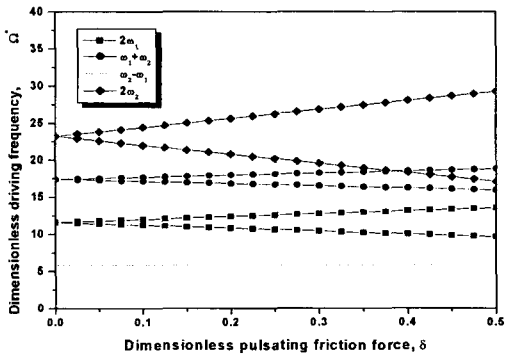

Fig. 8 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness($K_1=20$, $K_2=50$)

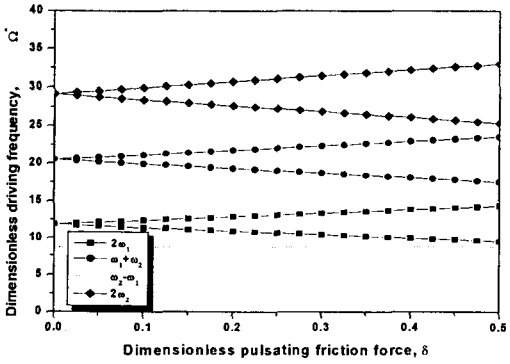

Fig. 9 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness($K_1=20$, $K_2=10^3$)

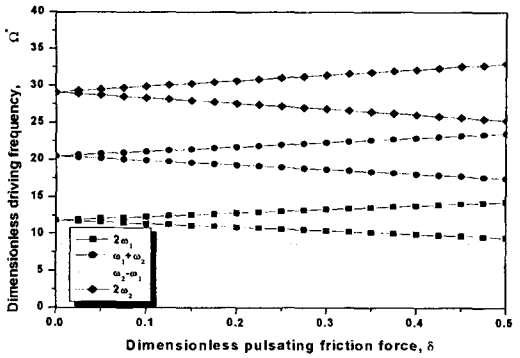

Fig. 10 Parametric instability regions depending on the translational spring stiffness($K_1=20$, $K_2=10^4$)

영역은 나타나지 않고, $2\omega_1$, $\omega_2-\omega_1$, $2\omega_2$ 형태의 불안정 영역만이 나타나며, K_2값이 증가됨에 따라 고정된 맥동 분포력 값 δ에 대해, $2\omega_1$형태의 불안정 영역 폭은 증가하고 $\omega_2-\omega_1$형태의 불안정 영역 폭은 증가하다가 $K_2=20$일 때 감소한 후 사라지며, $2\omega_2$형태의 불안정 영역 폭은 감소했다 다시 증가된다.

또한, $K_2=50$, 10^3, 10^4에 있어서는 $\omega_2-\omega_1$의 차형 불안정이 나타나지 않고, $2\omega_1$, $\omega_1+\omega_2$, $2\omega_2$의 불안정 영역이 나타나며, K_2값이 증가와 함께 고정된 맥동 분포력 값에서 $2\omega_1$, $\omega_1+\omega_2$형태의 불안정 영역들은 증가되나 $2\omega_2$형태의 불안정 영역들은 감소된다.

4. 결 론

일정크기의 분포마찰력과 주기적인 마찰력이 주어지는 브레이크-슈의 동적안정성에 대한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 일정크기의 분포마찰력의 경우

좌단 스프링 상수 K_1과 우단 스프링 상수 K_2값이 동일한 경우의 분포 스프링 상수 K값에 관계없이 $K_1=K_2<39.976$에서 항상 플러터형 불안정이 일어난다.

(2) 주기적인 분포마찰력의 경우

• 고정된 좌단 스프링 상수 K_1값에 대해 우단 스프링 상수 K_2값을 증가시켜갈 때 $K_2\leq 20$ 까지는 $\omega_1+\omega_2$형태의 합형 불안정은 나타나지 않고, $K_2\geq 50$에서는 $\omega_2-\omega_1$의 차형 불안정 형태가 나타나지 않는다.

• 고정된 맥동 분포력 δ값에 대해 $K_2\geq 50$에서는 K_2값의 증가와 함께 $2\omega_1$, $\omega_1+\omega_2$형태의 불안정 영역들은 증가되지만 $2\omega_2$형태의 불안정 영역은 감소된다.

후 기

본 논문은 2001년도 한밭대학교 교내학술연구비의 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten, Tangential Gedrückten Stabes", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik(ZAMP), Vol. 3, pp. 255~228.

(2) Pflüger, J., 1964, "Stabilitatsprobleme der Elastostatik", Springer-verlag, Vol. 44.

(3) Sugiyama, Y., Katayama, T. and Sekiya, T., 1971, "Studies on Non-conservative Problems of Instability of Columns by Difference Method", Proceedings of the 19th Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 23~32.

(4) Leipholz, H. H. E., 1980, "Stability of Elastic Systems", Sijthoff & Noordhoff International Publishers.

(5) Elishakoff, I. and Lottati, I., 1988, "Divergence and Flutter of Nonconservative Systems with Intermediate Support", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66, pp. 241~250.

(6) Richmond, J. W., Kao, T. K. and Moore, M. W., 1996, "The Development of Computational Analysis Techniques for Disc Brake Pad Design", Advances in Automotive Braking Technology (Barton, D. C., editor), pp. 69~86.

(7) Hulten, J. and Flint, J., 1999, "An Assumed Modes Methoes Approach to Disc Brake Squeal

Analysis", Proceedings of the SAE International Congress and Exposition, Detroit, MI, March, Paper No. 1999-0101335.

(8) 류봉조, 류시웅, 杉山吉彦, 오부진, 김효준, 2001, "마찰력을 받는 드럼 브레이크-슈의 동적안정성", 한국소음진동공학회논문집, Vol. 11, No. 6, pp. 216~222.

(9) Hsu, C. S., 1963, "On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 367~372.

(10) Kang, B. and Tan, C. A., 2000, "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, pp. 1097~1113.