

Hermite와 Spline 함수를 이용한 매립토공량 계산

문두열* · 이용희** · 이문재***

*정회원, 동의대학교 토목도시공학부 교수, **중신회원, 양산대학, 건설교통정보과 조교수,
***동의대학교 대학원 토목공학과 박사과정

On the Reclamation Earthwork Calculation using the Hermite and Spline Function

Du-Yeoul Mun* · Yong-Hee Lee** · Mun-Jae Lee***

*Professor, Division of Civil Urban Engineering, Dongeui University, **Assistant Professor, Dept. of Construction & Traffic Intelligence, Yangsan College, ***Course of Dr., Post-Graduate, Dept. of Civil Engineering, Dong-Eeui University,

요 약 : 토공량 결정은 토질역학, 고속도로적용, 운송공학, 많은 측량에 자주 요구된다. 토공량 계산은 해안매립공사 같은 대규모의 토목설계나 계획에 큰 비중을 차지하므로 토공작업의 정확도를 향상시키는 것이 매우 중요하다. 이 연구에서는 3가지의 제안식(A, B, C)과 점고법 그리고 Chen 과 Lin법을 예제를 통하여 비교하였다. 그리고 주어진 3차원 자료를 스플라인 보간법을 이용하여 지형곡면을 양방향으로 보간하거나 자유경계조건에 의한 방법의 알고리즘을 제시하였다. 재래식방법의 수학적 방법은 절점에서 침단점을 곡선화하는 일반적인 결점을 내포하고 있다. 이러한 결점을 피하기 위하여 새로운 방법의 수학적 모델로서 3차 스플라인 보간법을 적용하였다. 3차 스플라인 보간의 특성상 새로운 방법의 모형곡선은 지형단면과 부드럽게 잘 맞아떨어졌다. 이 연구의 결과 제안된 3가지의 방법의 알고리즘이 점고법, Chen과 Lin보다 더 정확한 결과를 나타내었다. 그리고 언급된 수학적식에 의한 모형은 토공량 결정에 있어 최대의 정확도를 제시하는 것으로 판단된다.

핵심어 : 토공량, 지형곡면, 해안매립, 자유경계조건, 정확도, 3차 스플라인

Abstract : The estimation of the volume of a pit excavation is often required in many surveying, soil mechanics, highway applications and transportation engineering situations. The calculation of earthwork plays a major role in plan or design of many civil engineering projects such as seashore reclamation, and thus it has become very important to improve the accuracy of earthwork calculation. In this paper the spot height method, proposed formulas (A, B, C), and chen and Lin method are compared with the volumes of the pits in these examples. And we proposed an algorithm of finding a terrain surface with the free boundary conditions and both direction spline method which interpolates the given three dimensional data by using spline. The mathematical models of the conventional methods have a common drawback, i.e., the modeling curves form peak points at the joints. To avoid this drawback, the cubic spline polynomial was chosen as the mathematical model of the new method. From the characteristics of the cubic spline polynomial, the modeling curve of the new method was smooth and matched the ground profile well. As a result of this study, algorithm of proposed three methods to estimate pit excavation volume provided a better accuracy than spot height, chamber, chen and Lin method. And the mathematical model mentioned makes is thought to give a maximum accuracy in estimating the volume of a pit excavation.

Key words : Pit excavation volume, Terrain surface, Seashore reclamation, Free boundary conditions, Accuracy, Cubic spline

1. 서 론

대규모의 항만매립공사에서 토공작업은 총공사비의 상당한 비중을 차지하므로 경제적인 시공을 위하여 절·성토량은 정확하게 계산되어야 한다. 특히, 요즈음과 같이 토취장이나 사토장의 확보가 어려워 공사의 차질이 혼란 여건 속에서 실제 지형과 부합되는 이론식의 결정은 매우 중요한 사안이다. 또한 저수지, 호수, 해안·해변지역 같이 지형의 형상이 직선이 아니고 불규칙한 곡선지형의 면·체적계산은 그 경계식에 대한 수식 가정을 합리적이고도 체계적으로 정립할 필요가 있다. 매립과 절취를 위한 토공량의 계산은 운송, 토질, 측량기

술자들이 많이 이용하고 있는데 과거의 식들은 격자 점들간의 관계를 선형으로 가정하여 토공량을 구하였는데 이것은 별로 실제지형과는 부합되지 못한다. 토공량 계산에서 가장 중요한 것은 실제 지형표면의 형상과 부합되는 경계식의 결정인데 Vern and Price(1978)는 지형의 면적계산에서 격자 점들 사이를 선형으로 가정하였는데, 이전에는 주로 1차선형식에 기초한 사다리꼴법칙이나 좌표법이 주된 방법이었다. 지형표면의 부분적 비선형해석은 Ahmed(1983)가 경계선에 대하여 최대로, 최소, 변곡점을 고려한 2차곡선식(Simpson 1법칙)과 1차 직선의 사다리꼴 식을 교대로 합한 종합 면적 식을 제시하였고, 그밖에 불규칙한 지형의 해석은Hoffman(1983), Brinker and Wolf(1984), Gerald and Wheatly(1984), Schmidt and Wong(1985)의 연구가 있었고, Hassan(1987)은 3차보간다항식에 의해 지거가 3개인 Simpson 제1법칙, 지거가 4개인 Simpson 제2법칙을 유도하였다. Easa(1988)는 Lagrange 다항

* 정회원 dymun@dongeui.ac.kr, 051)890-1635

** 중신회원yhlee@yangsan.ac.kr, 055)370-8176

*** leemj@dongeui.ac.kr, 051)890-1630

식에 의한 Simpson 제1법칙을 유도했고, Chambers(1989)는 격자간격을 지금까지와는 달리 부등간격으로 나누어 구하였다. Chen and Lin(1991)은 3차 Spline 보간다항식을 이용하여 절토량을 구하는 식을 개발하였고, Easa(1993)는 Chen과 Lin 방법의 문제점을 몇 가지 더 언급하였으며, Easa(1998)는 3차 Hermite 다항식에 기초한 식을 유도하여 체적을 구하였으며 실제 지형과 유사한 곡면을 나타내는 장점이 있는 복합식을 제시하였다.

국내의 발표된 논문을 조합해 보면 1980년대 중반부터 1995년까지 토공량계산에 대한 직접적인 이론에 대한 연구보다 과거의 단순한 식 즉, 좌표법, 양단면평균법, Simpson 1, 2 법칙을 주연구(예측모델연구, 초구장의 규모 결정, 도로의 최적노선 선정, 수치표고모형의 정확도비교 등)의 결과비교를 위하여 간단히 이용하는 수준에 불과하였다.(류재철, 2002)(문두열, 1995, 2000, 2002)(박운용, 1991)(유복모, 1990)(이용희, 1997, 2001)

본 연구에서는 첫째, 1998년 발표된 Easa방법을 개선한 제안법 (A)를 유도하는데 이 방법은 돌출표고점을 현장상황에 따라서 적절히 취득할 수 있는 3차 Hermite함수를 사용한 토공량 산정식의 알고리즘을 개발함으로써 토공량계산의 경제성과 정확성, 그리고 신속성을 추구함을 목적으로 한다. 둘째, Chen과 Lin이 제시한 방법은 축(x축 또는 y축) 1개를 고정하여 spline 곡선을 구하고 그 곡선들을 이용하여 단면적을 구한 후, 그 단면적들의 평균을 이용하여 근사적인 토공량을 결정하는데 이 방법은 1개 축은 3차로 근사시키고, 다른 한 축은 1차로 근사시키는 것이므로 제안법 (B)에서는 두 축 모두를 각각 3차 spline으로 근사시킴으로써 Chen과 Lin이 제시한 방법보다 더욱 정확성을 갖는다. 두 축 모두를 각각 3차 spline으로 근사시키는 문제는 주어진 3차원 데이터를 지나는 spline 곡면을 구하는 문제와 같다. 따라서 본 연구는 주어진 3차원 데이터를 지나는 spline 곡면을 구하는 알고리즘을 제시함으로써 좀더 정확한 토공량 결정을 목표로 한다. 셋째, 자연경계조건과 주어진 3차원 데이터를 지나는 3차 spline 곡면을 구하기 위하여 제안법 (C)에서는 3차 B-spline을 사용할 것이다. 본 논문에서는 spline 곡면을 기술하고 또 그것을 이용한 토공량 계산을 위한 알고리즘에 중점을 두며 알고리즘과 프로그래밍에 필요한 수학적 내용을 기술한다. 본 논문에서 제시된 모든 수치적 계산 결과는 Maple 프로그램을 이용하여 계산하였으며, Chen과 Lin이 제시한 방법과 본 논문에서 제시한 위의 3가지 방법(제안법 A, B, C)의 정확도를 비교, 분석한다.

2. 토공량 계산식

2.1 3차 Hermite함수와 면적의 평가(제안식A)

Fig. 1의 불규칙한 곡선에서 $x(0), x(1), \dots, x(m)$ 에 각각 해당되는 지거 $f(0), f(1), \dots, f(m)$ 이 측정된 m 개의 구간을

고려하고, 각 구간에 대응되는 x 방향 간격은 h_1, h_2, \dots, h_m 으로 정의한다. i 번째 구간 $[x(i-1), x(i)]$ 에서 3차 Hermite 함수는 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$H_i(x) = a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})^2 + d_i(x-x_{i-1})^3 \quad (1)$$

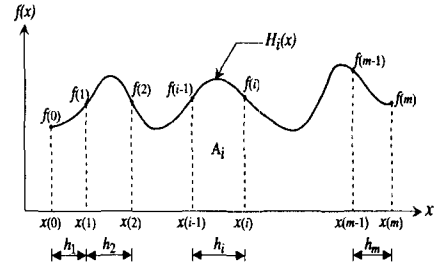


Fig. 1 An area base line and cubic hermite function

위의 식에서 각 항의 계수 값은 경계조건을 적용하여 구할 수 있다(Burden et al. 1978). 즉, 각구간 3차 Hermite함수 $H_i(x)$ 는 $x=x(i-1)$ 과 $x=x(i)$ 에 각각 대응되는 두 지거 $f(i-1)$ 과 $f(i)$ 를 통과하고, 또한 각 점에 대한 일계 도함수값인 $f'(i-1)$ 과 $f'(i)$ 을 만족해야 한다. 따라서 식 (1)에 포함된 4개의 미지수는 다음과 같이 계산된다.

$$a_i = H_i(x_{i-1}) = f(i-1) \quad (2)$$

$$b_i = H_i'(x_{i-1}) = f'(i-1) \quad (3)$$

$$c_i = \frac{1}{h_i^2} [-3 \{f(i-1) - f(i)\} - h_i \{2f'(i-1) + f'(i)\}] \quad (4)$$

$$d_i = \frac{1}{h_i^3} [2 \{f(i-1) - f(i)\} + h_i \{f'(i-1) + f'(i)\}] \quad (5)$$

식 (3)~(5)에 포함된 일계 도함수값은 Taylor정리를 적용한 수치미분법에 따라 다음 식과 같이 유도된다.(Hoffman, 1983)

$$f'(0) = \frac{-f(0)[2h_1 + h_2]h_2 + f(1)[h_1 + h_2]^2 - f(2)h_1^2}{h_1h_2[h_1 + h_2]} \quad (6)$$

$$f'(i) = \frac{-f(i-1)h_{i+1}^2 + f(i)[h_{i+1}^2 - h_i^2] + f(i+1)h_i^2}{h_ih_{i+1}[h_i + h_{i+1}]}, \quad i=1, 2, \dots, m-1 \quad (7)$$

$$f'(m) = \frac{f(m)[2h_m + h_{m-1}]h_{m-1} - f(m-1)}{h_mh_{m-1}[h_m + h_{m-1}]} = \frac{[h_m + h_{m-1}]^2 + f(m-2)h_m^2}{h_mh_{m-1}[h_m + h_{m-1}]} \quad (8)$$

i 번째 구간에 대한 3차 Hermite함수와 기준선 사이의 면적 A_i 는 식 (1)을 $x(i-1)$ 에서 $x(i)$ 까지 정적분한 후 식 (2)에서 식 (5)의 계수를 대입하여 구할 수 있다.

$$A_i = \frac{h_i}{12} [6 \{f(i-1) + f(i)\} + h_i \{f'(i-1) - f'(i)\}] \quad (9)$$

부등간격 구간으로 구성된 불규칙한 곡선의 3차 Hermite 함수에 의한 총면적 계산식은 다음과 같이 유도된다.

$$A = \sum_{i=1}^m A_i = \left[\frac{1}{12} [h_1 \{6f(0) + h_1 f'(0)\} + h_m \{6f(m) - h_m f'(m)\}] + \sum_{i=1}^{m-1} \{6(h_i + h_{i+1})f(i) + (h_{i+1}^2 - h_i^2)f'(i)\} \right] \quad (10)$$

식 (10)의 Hermite 면적함수를 y 축 방향으로 적분하기 위해서는 y 축에 독립적인 성분을 분리하여 식을 재구성할 필요가 있다. 즉, 식 (6)~(8)을 식 (10)에 대입함으로써 Hermite 면적함수에서 지거의 일계 도함수항을 제거하고 x 방향 간격을 계수로 하는 지거만의 함수가 다음 식과 같이 유도된다.

$$A = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^m w(i) f(i) \quad (11)$$

여기서 $w(i)$ 는 면적계산을 위한 지거의 가중치이며 x 방향 간격 h_i 의 함수이다. 식 (6)과 식 (8)에 나타낸 바와 같이 양쪽 경계에서 3차 Hermite함수의 도함수값은 각각 연속된 3개 점의 지거를 사용하여 평가되기 때문에 식 (11)의 가중치는 $m \geq 5$ 의 조건에서 다음 식으로 계산된다.

$$w(0) = \frac{4h_1^3 + 6h_1^2 h_2 - h_2^3}{h_1(h_1 + h_2)} \quad (12)$$

$$w(1) = \frac{1}{h_1 h_2} (2h_1^3 + 6h_1^2 h_2 + 5h_1 h_2^2 + h_2^3 - h_1 h_2^2 + h_1 h_2 h_3) \quad (13)$$

$$w(2) = \frac{1}{h_2 h_3} (h_2^3 + 5h_2^2 h_3 + 5h_2 h_3^2 + h_3^3 - h_1^2 h_3 - h_2 h_4^2 + h_1 h_2 h_3 + h_2 h_3 h_4) - \frac{h_1^3}{(h_1 + h_2)h_2} \quad (14)$$

$$w(i) = \frac{1}{h_i h_{i+1}} (h_i^3 + 5h_i^2 h_{i+1} + 5h_i h_{i+1}^2 + h_{i+1}^3 - h_{i-1}^2 h_{i+1} - h_i h_{i+2}^2 + h_{i-1} h_i h_{i+1} + h_i h_{i+1} h_{i+2}), \quad i=3, 4, \dots, m-3 \quad (15)$$

$$w(m-2) = \frac{1}{h_{m-2} h_{m-1}} (h_{m-2}^3 + 5h_{m-2}^2 h_{m-1} + 5h_{m-2} h_{m-1}^2 + h_{m-1}^3 - h_{m-3}^2 h_{m-1} - h_{m-2} h_m^2 + h_{m-3} h_{m-2} h_{m-1} + h_{m-2} h_{m-1} h_m) - \frac{h_m^3}{(h_m + h_{m-1})h_{m-1}} \quad (16)$$

$$w(m-1) = \frac{1}{h_m h_{m-1}} (2h_m^3 + 6h_m^2 h_{m-1} + 5h_m h_{m-1}^2 + h_{m-1}^3 - h_m h_{m-2}^2 + h_m h_{m-1} h_{m-2}) \quad (17)$$

$$w(m) = \frac{4h_m^3 + 6h_m^2 h_{m-1} - h_{m-1}^3}{h_m(h_m + h_{m-1})} \quad (18)$$

3차 Hermite함수에 의한 토공량의 계산법은 굴곡이 많은 지형에 적합한 방법이므로 최소한의 측점이 확보될 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 $m < 5$ 의 경우에 대한 가중치의 평가를 생략하였다.

2.2 Spline함수의 x, y 양방향적용(제안식B)

그런데 Chen and Lin법은 격자점의 양쪽방향(x, y 축)중 한쪽 방향만 spline 보간을 취하기 때문에 격자간격이 넓은 경우 양단면 평균법에 의한 체적계산은 오차를 수반할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 앞면의 단면적을

$$A_{yk} = \int_{x_0}^{x_m} (S_{i,j})_{i=0}^{m-1}(x) dx$$

$$A_{yk} = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_{i-1,k}(x) dx \quad (19)$$

를 먼저 구한 후 뒷면의 단면적을 구한다.

$$A_{yk+1} = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_{i-1,k+1}(x) dx \quad (20)$$

그리고 나서 y 축방향으로 각 격자점에 3차 spline법을 적용하여 함수식을 평가하고 단위 격자구간을 s 등분하여 가상(보간)의 측정 격자점을 형성하였다. 따라서 제시된 방법에 의한 체적은 측정된 격자점과 격자점을 함께 고려하여 x 축 방향으로 3차 spline법을 적용 한 후 양단면평균법에 의해 계산한다. 즉, A_{yk} 와 A_{yk+1} 사이의 절토량은 다음의 식에 따라 평가된다.

$$V_k = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s (A_{y_{k,\beta}} + A_{y_{k,\beta+1}}) \frac{\Delta y_k}{s} \quad (21)$$

여기서, $A_{y_{k,1}} = A_{yk}$, $A_{y_{k,s}} = A_{yk+1}$ 이다.

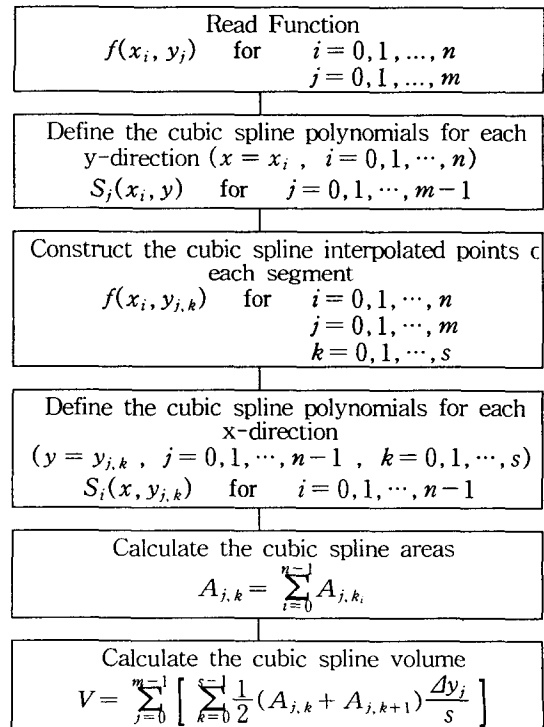


Fig. 2 Flow chart of a proposed equation B

2.3 자연경계조건을 만족하는 스플라인 곡면(제안식C)

주어진 2차원 데이터 $(x_i, y_j)_{i=1}^n$ 이 주어졌을 때, $g(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ 와 자연경계조건을 만족하는 3차 spline 곡선이 유일하게 존재하기 위한 충분조건인 Schoenberg-Whitney nesting 조건을 만족하는 knots 벡터를 선택할 수 있다. 예를 들면, knots 벡터 $(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_n, x_n, x_n)$ 은 자연경계조건을 만족하고 주어진 n 개의 데이터를 만족하는 유일한 3차 spline 곡선을 생성시키는 $(n+2)$ 개의 일차독립인 3차 B-spline 함수들을 유도한다. 이제 3차원 데이터 $(x_i, y_j, f_{ij})_{i=1, j=1}^{m_1, m_2}$ 을 지나고 자연경계조건을 만족하는 3차 spline 곡면을 구하자.

여기서 $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m_1} = b, c = y_1 < y_2 < \dots < y_{m_2} = d$ $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, 라고 하고 x 축과 y 축에 대한 knots 벡터를 각각 $(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, \dots, x_{m_1-1}, x_{m_1}, x_{m_1}, x_{m_1}, x_{m_1})$ 와 $(y_1, y_1, y_1, y_1, y_2, \dots, y_{m_2-1}, y_{m_2}, y_{m_2}, y_{m_2}, y_{m_2})$ 으로 대입하면 Schoenberg-Whitney nesting 조건을 각각 만족한다(Chen, 1991). 그러므로 x 축에 대한 (m_1+2) 개의 3차 B-spline $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \phi_{m_1+2}$ 을 생성하고, y 축에 대한 (m_2+2) 개의 3차 B-spline $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m_2}, \psi_{m_2+1}, \psi_{m_2+2}$ 을 생성함으로 공간 $S_1 = \text{span} \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_1}, \phi_{m_1+1}, \phi_{m_1+2}\}$, 공간 $S_2 = \text{span} \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m_2}, \psi_{m_2+1}, \psi_{m_2+2}\}$ 라고 정의하면, 자연경계조건을 만족하고 $(m_1 \times m_2)$ 개의 주어진 데이터를 지나는 3차 spline 곡면 $g(x, y)$ 은 tensor product 공간 $S_1 \otimes S_2$ 에서 유일하게 존재하고 다음과 같이 구할 수 있다.

$$g(x, y) = \sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y) \phi_p(x) \tag{22}$$

라고 하면 주어진 데이터를 지나야 함으로 모든 i, j 에 대하여

$$\sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y_j) \phi_p(x_i) = f_{i,j} \tag{23}$$

가 된다. 식 (23)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{p=1}^{m_1+2} d_{p,i} \phi_p(x_i) = f_{i,j} \tag{24}$$

$$\sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \psi_q(y_j) = d_{p,i} \tag{25}$$

자연경계조건을 고려하면 식 (24)는 행렬의 크기가 $(m_1+2) \times (m_1+2)$ 인 유일한 해를 갖는 선형시스템이며, 이 선형시스템의 해를 이용하여 다시 자연경계조건을 고려하면 식 (25)도 행렬의 크기가 $(m_2+2) \times (m_2+2)$ 인 유일한 해를 갖는 선형시스템이다. 식 (25)로부터 유도된 해를 식 (23)에 대입함으로써 구하고자 하는 3차 spline 곡면을 구할 수 있다.

그러므로 3차 spline 곡면을 이용한 체적은 다음과 같이 쉽게 계산된다.

$$V = \sum_{p=1}^{m_1+2} \sum_{q=1}^{m_2+2} c_{p,q} \int_c^d \psi_q(y) dy \int_a^b \phi_p(x) dx \tag{26}$$

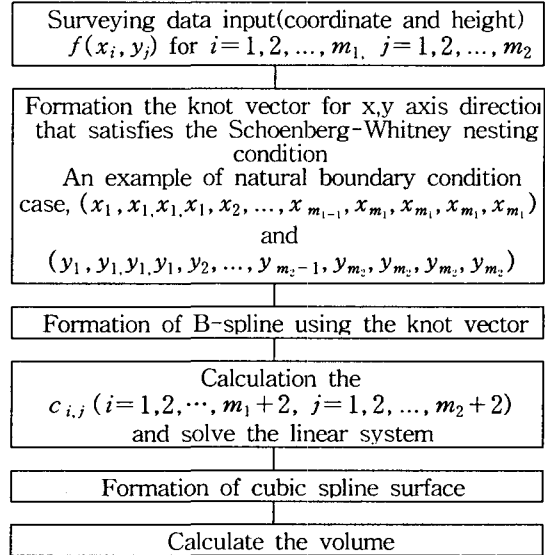


Fig. 3 Flow chart of a proposed equation C

3. 실험 및 고찰

본 연구의 실험을 위한 대상지형은 아래의 수학적 함수식 $Z = F(x, y) = \frac{(20+y)}{\sqrt{x}}$ 에 의한 표고자료로서 전체의 수치모형지형을 만들고, 각 지형의 체적은 중적분에 의하여 절대값에 가까운 값을 구한다. 각 식의 정확도비교를 위하여 3차 Hermite 함수방법(제안식A), 양방향 Spline법(제안식B)와 자연경계조건인 Spline법(제안식C)와 기존의 방법인 Chen과 Lin법과 점고법을 서로 비교를 하기로 한다. 여기서 실험지형의 형태는 x, y 양방향으로 비교적 평탄하지만 끝부분이 융기하는 지형이며 Fig. 4 와 같다.

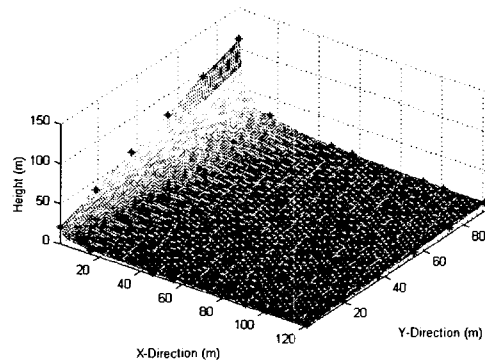


Fig. 4 A digital terrain $Z = F(x, y) = \frac{(20+y)}{\sqrt{x}}$ by hight data of case 1,2,3

본 예제의 지형에서 가로축은 m 단위로 $1 \leq x \leq 121$ 의 범위이며 세로축은 $1 \leq y \leq 91$ 의 범위에 대한 함수 $z = (20 + y)/\sqrt{x}$ 의 계산결과를 표고자료로 하였다. 절토량을 계산하기 위한 격자간격은 3가지 경우가 고려되었는데 첫 번째 경우(Case 1)는 x 방향으로 20 m 의 등간격, y 방향으로 (25, 10, 30, 15, 10 m)의 부등간격을 사용하여 6×5의 격자를 구성하였다. 두 번째 경우(Case 2)는 x 방향으로 (15, 30, 10, 35, 10, 20 m)의 부등간격, y 방향으로 18 m 의 등간격을 사용하여 6×5의 격자를 구성하였으며, 세 번째 경우(Case 3)는 x 방향은 Case 2의 부등간격, y 방향은 Case 1의 부등간격을 사용하여 6×5의 격자를 구성하였다. Chen and Lin(1991)의 논문에서 Case 2와 Case 3의 표고자료 중 ($x=101, y=91$)에 해당하는 값이 11.45 m 로 잘못 계산되어 있는데 본 논문에서는 각 방법의 정확한 비교를 위하여 정확한 값인 11.05 m 로 수정한 후 절토량을 평가하였다. 지표의 높이는 함수에 의해 계산되기 때문에 정확한 절토량은 해석적 적분에 의해 $V = \int_1^{91} \int_1^{121} \frac{20+y}{\sqrt{x}} dx dy = 118,800.00 m^3$ 로 평가되었고, 제안된 방법과 기존 방법의 평가결과 및 오차율을 Table 4에 나타내었다.

Table 1 A height data of x, y intervals to experimental example Case 1

x \ y	1m	21m	41m	61m	81m	101m	121m
1m	21.00	4.58	3.28	2.69	2.33	2.09	1.91
26m	46.00	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
36m	56.00	12.22	8.75	7.17	6.22	5.57	5.09
66m	86.00	18.77	13.43	11.01	9.56	8.56	7.82
81m	101.00	22.04	15.77	12.93	11.22	10.05	9.18
91m	111.00	24.22	17.34	14.21	12.33	11.05	10.09

Table 2 A height data of x, y intervals to experimental example Case 2

x \ y	1m	16m	46m	56m	91m	101m	121m
1m	21.00	5.25	3.10	2.81	2.20	2.09	1.91
19m	39.00	9.75	5.75	5.21	4.09	3.88	3.55
37m	57.00	14.25	8.40	7.62	5.98	5.67	5.18
55m	75.00	18.75	11.05	10.02	7.86	7.46	6.82
73m	93.00	23.25	13.71	12.43	9.75	9.25	8.45
91m	111.00	27.75	16.37	14.83	11.64	11.05	10.09

Table 3 A height data of x, y intervals to experimental example Case 3

x \ y	1m	16m	46m	56m	91m	101m	121m
1m	21.00	5.25	3.10	2.81	2.20	2.09	1.91
26m	46.00	11.50	6.78	6.15	4.82	4.58	4.18
36m	56.00	14.00	8.26	7.48	5.87	5.57	5.09
66m	86.00	21.50	12.68	11.49	9.02	8.56	7.82
81m	101.00	25.25	14.89	13.50	10.59	10.05	9.18
91m	111.00	27.75	16.37	14.83	11.64	11.05	10.09

Table 4 A comparison of error for experimental examples Case 1,2,3

Method	Case 1		Case 2	
	Excavation Volumn(m ³)	Errors (%)	Excavation Volumn(m ³)	Errors (%)
Real Excavation Volumn	118800.00	-	118800.00	-
Spot System	149510.25	25.85	141612.30	19.20
Method of Chen & Lin	139955.41	17.81	122007.06	2.70
Proposed(A)	138279.57	16.4	123175.07	3.68
Proposed(B)	139,957.02	17.809	122,095.36	2,774
Proposed(C)	117,657.45	0.960	119,116.21	0.260

Method	Case 3	
	Pit Excavation Volumn (m ³)	Errors (%)
Real Pit Excavation Volumn	118800.00	-
Spot System	141619.38	19.21
Chen & Lin법	122011.88	2.70
Proposed(A)	123181.43	3.69
Proposed(B)	122,011.67	2,703
Proposed(C)	119,116.21	0.260

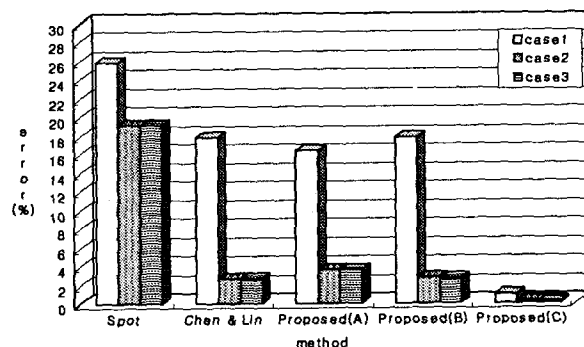


Fig. 5 An earthwork errors of Case1,2,3 for numerical example

본 실험은 총 42개의 표고데이터를 사용하여 평가되었으며 Hermite함수에 의한 제안된 방법 (A)에서는 6개의 데이터를 줄인 총 36개의 표고데이터만으로 유도된 식에 적용하였다.

Fig.5에 나타난 것처럼 각 방법의 오차크기는 Case 1 지형 데이터에서는 자연경계조건(proposed C) - 양방향 spline적용(proposed B) 및 Chen and Lin법 - Hermite함수법(proposed A) - 점고법 순이었으며 제안법 (C)는 최대 25% 정확도가 향상되었으며 특히, 제안법 (A)는 6개의 데이터를 줄였음에도 불구하고 정확도 면에서 타방법과 비슷한 결과를 나타낼 수 있었다.

Case 2 지형데이터에서는 자연경계조건(proposed C) - 양방향 spline적용(proposed B) 및 Chen and Lin법 - Hermite함수법(proposed A) - 점고법 순이었으며 제안법 (C)는 최대 19% 정확도가 향상되었으며 6개의 데이터를 줄인 제안법 (A)

는 역시 타방법과 비슷하였다. Case 3 지형데이터에서는 Case 2와 마찬가지로 제안법 (C)가 최대 19%의 정확도가 향상되었다.

따라서 제안된 방법 (A)에서는 표고자료를 3차곡선으로 보간하여 체적을 평가하게 되는데 본 예제와 같이 평탄한 지형은 보간점을 증가시킬 경우에 곡률변화에 의한 체적오차가 가중되어 나타난 결과이다. 즉, 제안법 (C)는 평탄한 지형에서는 다른 방법에 비하여 정확도가 다소 떨어지지만 소요되는 표고자료의 수를 자유로이 줄일 수 있는 장점이 있다. 제안된 방법 (B)에서는 x축으로도 3차 spline 곡선으로 근사 시키고 동시에 y축으로도 3차 spline 곡선으로 근사 시키는 방법이므로 이 방법을 이용하여 토공량을 계산하면 실험에서 나타난 결과와 같이 x와 y축 중에서 1개의 축만 3차 spline 곡선으로 근사 시킨 Chen과 Lin이 제시한 방법보다 더욱 정확한 값을 얻을 수 있다. 제안된 방법 (C)에서는 자연경계조건과 주어진 3차원 데이터를 지나는 3차 spline 곡면을 구하기 위하여 3차 B-spline을 사용한 것이다. 본 논문에서는 spline 곡면을 기술하고 또 그것을 이용한 토공량 계산을 하여본 결과 가장 정확한 값을 나타내었다.

4. 결 론

지금까지 본 연구에서는 토공량 계산의 정확도 향상을 위하여 알고리즘과 프로그래밍에 필요한 수학적 내용을 기술하였으며 제시된 모든 수치적 계산 결과는 Maple 프로그램을 이용하여 계산하였으며 제시한 새로운 세 가지 방법(제안식 A, B, C)과 기존의 방법들을 비교, 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 재래식 방법인 점고법, Chen과 Lin법, 그리고 제시된 방법(A, B, C)에 대하여 신속·정확하고도 간편하게 적용하기 위하여 컴퓨터 프로그래밍 하였으며, 이론식의 올바른 검증을 위하여 지형의 형태와 검사용 기준 토공량을 주어진 수학적 식으로 절대값에 가깝도록 인위적으로 구할 수 있게 함으로써 앞으로 토공량식의 결과 비교를 더욱 정확하게 할 수 있도록 하였다.

2. Hermite함수에 의한 제시된 방법 (A)는 변곡점을 고려하였기 때문에 표고데이터를 상당량 줄일 수 있어서 경제적인 방법이 될 수 있다. 그리고 제안된 방법 (B)에서는 x축으로도 3차 spline 곡선을 근사시키는 동시에 y축으로도 3차 spline 곡선으로 근사시키는 방법이므로 이 방법을 이용하여 토공량을 계산하면 가장 최근의 방법인 Chen과 Lin이 제시한 방법만큼 정확한 값을 얻을 수 있다.

3. 제시된 방법 (C)에서는 자연경계조건과 주어진 3차원 데이터를 지나는 3차 spline 곡면을 구하기 위하여 3차 B-spline을 사용한 것인데 실험결과 최대 19%~25%의 정확도 향상으로 가장 정확한 값을 나타내었다.

참 고 문 헌

- [1] 류재철, 이승훈, 문두열, (2002), "스플라인 곡면을 이용한 토공량 결정에 관한 연구", 한국측량학회지, 제20권, 제1호, pp.85~92.
- [2] 류재철, 이승훈, 문두열, (2002), "Spline Surface Approximation for Computing Pit Excavation Volume with the Free Boundary Conditions", Korean Journal of Geomatics, Vol.2, No.2, pp.1~5.
- [3] 문두열, (1995), "매립을 위한 토공량계산에 관한 연구", 한국항만학회지, 제9권, 제2호, pp.243~252.
- [4] 문두열, (2000), "Spline보간법을 이용한 토공량 결정에 관한 연구", 한국측량학회지, 제18권, 제3호, pp.305~313.
- [5] 문두열, (2002), "A Study on the Pit Excavation Volume Using Cubic B-Spline", *Journal of Ocean Engineering and Technology of Korea*, (9/2), pp.61~70.
- [6] 박운용, 문두열, (1991), "비선형해석에 의한 부등간격의 토공량에 계산에 관한 연구", 한국측지학회지, 제9권, 제2호, pp.19~36.
- [7] 유복모, 박운용, 권현, 문두열, (1990), "수치지형모형에 있어 지형의 분석과 조합보간법의 적용에 관한 연구", 한국측지학회지, 제8권, 제2호, pp.53~61.
- [8] 이용희, 문두열, (1997), "해안매립을 위한 토공량결정에 관한 연구", 한국항만학회지, 제11권, 제2호, pp.1~15.
- [9] 이용희, 문두열, (2001), "매립토공량 계산식에 관한 연구", 한국항만학회지, 제15권, 제1호, pp.87~97.
- [10] Ahmed, F.A., (1983), Area computation using salient boundary points, *J. Surv. Engrg., ASCE*, 109(1), pp. 54~63.
- [11] Binker, R. C., and Wolf, P. R., (1984), *Elementary Surveying*. Harper and row, New York, N.Y., pp. 245~254.
- [12] Chambers, D.W., (1989), Estimating pit excavation volume using unequal intervals, *J. Surv. Engrg., ASCE*, 115(4), pp. 390~401.
- [13] Chen, C. S., Lin, H. C., (1991), Estimating pit-excavation volume using cubic spline volume formula, *J. Surv. Engrg., ASCE*, 117(2), pp. 51~66.
- [14] Easa, S.M., (1988), Area of irregular region with unequal intervals, *J. Surveying Engrg., ASCE*, 114(2), pp. 50~58.
- [15] Easa, S.M., (1993), Smooth boundary approximation for directly computing irregular area, *J. Surv. Engrg., ASCE*, 119(3), pp. 86~101.
- [16] Easa, S.M., (1998), Smooth surface approximation for computing pit excavation volume, *J. Surv. Engrg., ASCE*, 124(3), pp. 125~133.

- [17] Gerald, C. F., and Wheatly, P. O., (1984), Applied Numerical Analysis. Addison-Wesley, Menlo Park, Calif., pp. 248~256.
- [18] Hoffman, L. D., (1983), Applied Calculus. Mc Graw-Hill, New York, N. Y., pp. 265~268.
- [19] Hassan, I.M., E1, (1987), Irregular boundary area computation by Simpson's 3/8 rule, J. Surv. Engrg., ASCE, 113(3), pp. 127~132.
- [20] Schmidt, M. O., and Wong, K. W., (1985), Fundamentals of Surveying. PWS, Boston, Mass., pp. 377~385.
- [21] Vern, J., and Price, (1978), W. F. Surveying for engineers. The Macmillan Press Ltd., London, U.K. p. 456.

원고접수일 : 2002년 8월 20일
원고채택일 : 2002년 10월 1일