

탄성층 사이에 접합된 압전재료의 계면균열에 대한 전기-기계적 해석

정경문*, 김인옥*, 김지숙*, 범현규**

Electro-Mechanical Analysis of Interfacial Cracks in a Piezoelectric Layer Bonded to Dissimilar Elastic Layers

Kyoung Moon Jeong*, In Ock Kim*, Ji Suk Kim* and Hyeon Gyu Beom**

ABSTRACT

Interfacial cracks in a piezoelectric layer bonded to dissimilar elastic layers under the combined anti-plane mechanical shear and in-plane electrical loadings are considered. By using Fourier cosine transform, the mixed boundary value problem is reduced to a singular integral equation which is solved numerically to determine the stress intensity factors. Numerical results for the effects of the material properties and layer geometries on the stress intensity factors are obtained.

Key Words : Electro-mechanical analysis(전기-기계적 해석), Interface crack(계면균열), Piezoelectric layer(압전 재료), Stress intensity factor(응력강도계수)

1. 서론

압전재료는 압력이 가해졌을 때 전압을 발생하고, 전기장이 가해졌을 때 기계적인 변형이 일어나는 소자로서 기계적인 진동에너지를 전기에너지로, 전기에너지를 기계적인 진동에너지로 상호변환이 가능하며 변환효율이 매우 높은 재료이다. 이러한 현상을 이용하여 감지기, 작동기와 트랜스듀서 등과 같은 지능구조물(intelligent structure)에 광범위하게 응용되고 있다.⁽¹⁾

최근에 압전재료를 적층시킨 구조의 균열에 대한 전기-기계적 해석에 관하여 많은 연구가 진행되었다. 압전재료 내의 균열선단에서 Pak⁽²⁾은 응력과

전기변위(electric displacement) 등의 엄밀해를 복소 변수 방법을 이용하여 구하였다. Beom과 Atluri⁽³⁾는 이방성 압전체 내의 계면균열에 대한 균열 선단장을 해석하였다. 그들은 계면균열에 대하여 실수 값을 갖는 새로운 응력강도계수와 전기변위강도계수의 정의를 제안하였다. 면외 전단과 전기적 하중을 동시에 받는 압전재료를 적층시킨 구조에 대하여 Shindo 등^(4,5)은 균열면의 전기적 도전 조건과 유사한 특유의 경계조건을 적용하여 면외 전단하중과 전기적 평면하중을 받는 압전세라믹 무한 스트립에 수직인 균열과 평행한 균열에 대한 해를 적분 변환법을 이용하여 구하였다. 또한, 압전재료와 탄성체로 적층된 다양한 구조 내의 균열에 대

☞ 2002년 4월 30일 접수

* 전남대학교 기계공학과 대학원

** 전남대학교 기계공학과

하여 재료의 다양한 결합과 전기장이 응력강도계수에 미치는 영향에 대하여 여러 연구자들⁽⁶⁻¹²⁾에 의해 해석되었다. 그러나 압전재료와 탄성체로 적층된 구조에서 두 개의 계면균열이 응력강도계수에 미치는 영향에 대한 연구는 아직까지 해석되지 않았다.

본 연구의 목적은 선형압전이론을 이용하여 면외 전단 및 전기적 하중을 받는 탄성체 사이에 접합된 압전재료의 두 계면균열에 대한 응력강도계수를 구하고자 한다. Fourier cosine 변환을 이용하면 혼합 경계치 문제는 특이 적분 방정식(singular integral equation)⁽¹³⁾으로 줄어 들고, 수치적분을 수행하여 응력강도계수를 결정한다. 해석결과는 다양한 재료로 적층된 구조, 두 계면균열에 대한 비와 층의 두께에 따라 나타낸다.

2. 문제의 수식화

탄성체 사이에 접합된 압전재료의 계면에 놓여 있는 균열의 형상을 Fig. 1에 나타내었다. 두 개의 탄성체는 두께 h_1 과 h_2 를 갖고, 압전재료는 h_p 의 두께를 갖는다. Fig. 1에서 (1)과 (2)는 균질재료이고, 압전재료의 상하면의 계면에 $2b$ 와 $2a$ 의 길이를 갖는 균열이 각각 놓여있고, 두 균열은 x 축의 중앙에 위치한다. 좌표계 x, y, z 는 Cartesian 좌표계를 나타낸다. 압전재료는 z 방향으로 분극(poling) 처리되어 있다. 문제는 면외 전단 하중과 전기적 평면하중이 동시에 작용하는 경우이다.

압전 재료의 경계치 문제에서 면외 전단 변위와 면내 전기장이 작용할 때의 변위와 전기장은 다음과 같이 단순하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y) \\ E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0 \\ u_x^{(i)} = u_y^{(i)} = 0, \quad u_z^{(i)} = u_z^{(i)}(x, y), \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 (u_x, u_y, u_z) 와 (E_x, E_y, E_z) 는 압전재료의 변위와 전기장을 나타내고, $(u_x^{(i)}, u_y^{(i)}, u_z^{(i)})$ 는 탄성체의 변위를 나타낸다. 괄호 안의 1과 2는 Fig. 1에서 탄성체 1과 2를 나타내고 앞으로 사용하게 될 수식에서 상첨자로 표기하였고, 첨자가 없는 경우는 압전재료와 관련된 양이다. 압전재료와 탄성체의 구성방정식은 다음과 같다.

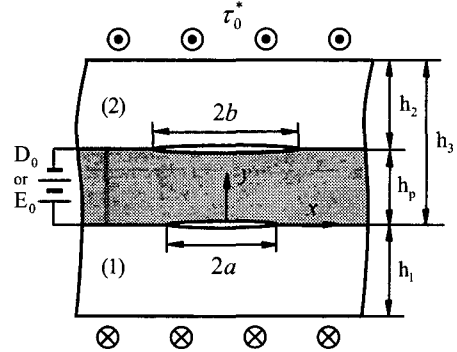


Fig. 1 Piezoelectric layer bonded to dissimilar elastic layers with interfacial cracks

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = c_{44}u_{z,x} - e_{15}E_x, \quad \tau_{zy} = c_{44}u_{z,y} - e_{15}E_y \\ D_x = e_{15}u_{z,x} + \epsilon_{11}E_x, \quad D_y = e_{15}u_{z,y} + \epsilon_{11}E_y \\ \tau_{zx}^{(i)} = c_{44}^{(i)}u_{z,x}^{(i)}, \quad \tau_{zy}^{(i)} = c_{44}^{(i)}u_{z,y}^{(i)}, \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 (τ_{zx}, τ_{zy}) 와 $(\tau_{zx}^{(i)}, \tau_{zy}^{(i)})$ 는 압전재료와 탄성체의 전단응력을 나타내고, (D_x, D_y) 는 전기변위(electric displacement)를 나타낸다. c_{44} 는 탄성 계수, e_{15} 는 압전 상수(piezoelectric constant), ϵ_{11} 은 유전율(dielectric permittivity)을 의미한다. 그리고 탄성체에 대한 $c_{44}^{(1)}$ 과 $c_{44}^{(2)}$ 는 탄성체 1과 2의 탄성계수를 나타낸다. 전기장과 전위(electric potential) ϕ 와의 관계식은 다음과 같다.

$$E_x = -\phi_{,x}, \quad E_y = -\phi_{,y} \quad (3)$$

지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} c_{44}\nabla^2 u_z + e_{15}\nabla^2 \phi = 0 \\ e_{15}\nabla^2 u_z - \epsilon_{11}\nabla^2 \phi = 0 \\ \nabla^2 u_z^{(i)} = 0, \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 은 변수 x 와 y 에 대한 2차원 Laplace 연산자이다.

본 모델은 대칭구조이므로 문제는 $0 \leq x < \infty$ 에 대하여만 생각한다. 길이가 $2b$ 인 균열에 대하여 $y=h_p$ 인 계면에서의 변위와 트랙션의 연속조건과 균열면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{zy}^{(2)}(x, h_p^+) &= \tau_{zy}(x, h_p^-) = 0, \quad (0 \leq x < b) \\ u_z(x, h_p) &= u_z^{(2)}(x, h_p), \quad (b \leq x < \infty) \\ \tau_{zy}(x, h_p) &= \tau_{zy}^{(2)}(x, h_p), \quad (b \leq x < \infty) \end{aligned} \quad (5)$$

길이가 $2a$ 인 균열에 대하여 $y=0$ 인 계면에서의 변위와 트랙션의 연속조건과 균열면에서의 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{zy}(x, 0^+) &= \tau_{zy}^{(1)}(x, 0^-) = 0, \quad (0 \leq x < a) \\ u_z(x, 0) &= u_z^{(1)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty) \\ \tau_{zy}(x, 0) &= \tau_{zy}^{(1)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty) \end{aligned} \quad (6)$$

$y=h_3$ 와 $y=-h_1$ 에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\tau_{zy}^{(2)}(x, h_3) = \tau_{zy}^{(1)}(x, -h_1) = \tau_0^*, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (7)$$

압전재료의 상하면에 적용되는 두 가지 전기적 경계조건은 다음과 같다.^(4,5)

Case I

$$D_y(x, h_p) = D_y(x, 0) = D_0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (8)$$

Case II

$$E_y(x, h_p) = E_y(x, 0) = E_0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (9)$$

여기서 D_0 와 E_0 는 균일한 전기변위와 전기장이다. 전기적 경계조건으로 Case I은 압전 재료의 계면에 일정한 전하밀도(density of charge)가 작용하고, Case II는 일정한 전기장(electric field)이 작용한다. 전단 응력 τ_0^* 는 두 가지 전기적 경계조건에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.^(6,7)

$$\tau_0^* = \begin{cases} \frac{c_{44}}{c_{44}} \tau_0 - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} D_0 & \text{(Case I)} \\ \tau_0 - e_{15} E_0 & \text{(Case II)} \end{cases} \quad (10)$$

여기서 τ_0 는 전기장이 없는 균일한 전단응력을 나타내고, $\overline{c_{44}} = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$ 는 압전 탄성계수(piezoelectric stiffened elastic constant)를 의미한다.

3. 응력강도계수

지배방정식 (4)에 대하여 Fourier cosine 변환을 이용하면 압전재료와 탄성체에 대한 변위와 전위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁴⁾

$$\begin{aligned} u_z(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_1(a) \exp(ay) \\ &\quad + A_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da + a_0 y \\ \phi(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [B_1(a) \exp(ay) \\ &\quad + B_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da - b_0 y \\ u_z^{(1)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_1(a) \exp(ay) \\ &\quad + C_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da + c_0 y \\ u_z^{(2)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [D_1(a) \exp(ay) \\ &\quad + D_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da + d_0 y + e_0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $A_i(a)$, $B_i(a)$, $C_i(a)$ 와 $D_i(a)$ ($i=1, 2$)는 미지 함수(unknown function)이며, a_0 , b_0 , c_0 , d_0 와 e_0 는 해석 모델의 상하 끝단과 계면에 작용하는 하중 조건으로부터 결정되는 상수이다. 식 (11)을 식 (2)와 (3)에 대입하면 응력장과 전기장을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{zy}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{ [c_{44} A_1(a) + e_{15} B_1(a)] \exp(ay) \\ &\quad - [c_{44} A_2(a) + e_{15} B_2(a)] \exp(-ay) \} \cos(ax) da \\ &\quad + c_{44} a_0 - e_{15} b_0 \\ E_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{ -B_1(a) \exp(ay) \\ &\quad + B_2(a) \exp(-ay) \} \cos(ax) da + b_0 \\ D_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a \{ [e_{15} A_1(a) - \epsilon_{11} B_1(a)] \exp(ay) \\ &\quad - [e_{15} A_2(a) - \epsilon_{11} B_2(a)] \exp(-ay) \} \cos(ax) da \\ &\quad + e_{15} a_0 + \epsilon_{11} b_0 \\ \tau_{zy}^{(1)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a c_{44}^{(1)} [C_1(a) \exp(ay) \\ &\quad - C_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da + c_{44}^{(1)} c_0 \\ \tau_{zy}^{(2)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a c_{44}^{(2)} [D_1(a) \exp(ay) \\ &\quad - D_2(a) \exp(-ay)] \cos(ax) da + c_{44}^{(2)} d_0 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 a_0 , b_0 , c_0 , d_0 와 e_0 는 식 (12)와 조건 (5)-(9)를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

Case I

$$a_0 = \frac{\epsilon_{11}\tau_0^* + e_{15}D_0}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2}, \quad b_0 = \frac{c_{44}D_0 - e_{15}\tau_0^*}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2}$$

$$c_0 = \frac{\tau_0^*}{c_{44}^{(1)}}, \quad d_0 = \frac{\tau_0^*}{c_{44}^{(2)}}$$

$$e_0 = -\frac{c_{44} - c_{44}^{(2)}}{c_{44}c_{44}^{(2)}} h_p \tau_0^* + \frac{e_{15}}{c_{44}\epsilon_{11}} h_p D_0 \quad (13)$$

Case II

$$a_0 = \frac{\tau_0^* + e_{15}E_0}{c_{44}}, \quad b_0 = E_0$$

$$c_0 = \frac{\tau_0^*}{c_{44}^{(1)}}, \quad d_0 = \frac{\tau_0^*}{c_{44}^{(2)}}$$

$$e_0 = -\frac{c_{44} - c_{44}^{(2)}}{c_{44}c_{44}^{(2)}} h_p \tau_0^* + \frac{e_{15}}{c_{44}} h_p E_0 \quad (14)$$

함수 $B_i(a)$, $C_i(a)$ 와 $D_i(a)$ ($i=1, 2$)는 변위와 응력을 경계조건 (5)-(9)에 대입하여 $A_1(a)$ 와 $A_2(a)$ 의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_1(a) = \begin{cases} \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} A_1(a) & \text{(Case I)} \\ 0 & \text{(Case II)} \end{cases}$$

$$B_2(a) = \begin{cases} \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} A_2(a) & \text{(Case I)} \\ 0 & \text{(Case II)} \end{cases} \quad (15)$$

$$C_1(a) = \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(1)}} \frac{A_1(a) - A_2(a)}{1 - \exp(-2ah_1)}$$

$$C_2(a) = \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(1)}} \frac{\exp(-2ah_1)[A_1(a) - A_2(a)]}{1 - \exp(-2ah_1)} \quad (16)$$

$$D_1(a) = -\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} \frac{\exp(-2ah_2)}{1 - \exp(-2ah_2)} \times [A_1(a) - \exp(-2ah_p)A_2(a)]$$

$$D_2(a) = -\frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} \frac{1}{1 - \exp(-2ah_2)} \times \left[\frac{A_1(a)}{\exp(-2ah_p)} - A_2(a) \right] \quad (17)$$

여기서

$$c_{44}^* \equiv \begin{cases} c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}} & \text{(Case I)} \\ c_{44} & \text{(Case II)} \end{cases} \quad (18)$$

이다. 새로운 보조함수 $g_1(x)$ 와 $g_2(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.⁽¹³⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \{u_z(x, 0) - u_z^{(1)}(x, 0)\} = g_1(x), \quad (0 \leq x < \infty)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{u_z(x, h_p) - u_z^{(2)}(x, h_p)\} = g_2(x), \quad (0 \leq x < \infty) \quad (19)$$

식 (5)와 (6)의 변위에 대한 연속조건과 식 (19)를 이용하면 보조함수 $g_1(x)$ 와 $g_2(x)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹³⁾

$$g_1(x) = 0, \quad (a \leq x < \infty)$$

$$\int_0^a g_1(t) dt = 0 \quad (20)$$

$$g_2(x) = 0, \quad (b \leq x < \infty)$$

$$\int_0^b g_2(t) dt = 0 \quad (21)$$

식 (20)과 (21)를 이용하여 식 (11)의 변위를 식 (19)에 대입하면 $A_1(a)$ 와 $A_2(a)$ 를 $g_1(t)$ 와 $g_2(t)$ 의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_1(a) = -\frac{1}{a} \frac{F_4(a)}{F_5(a)} \int_0^a g_1(t) \sin(at) dt + \frac{1}{a} \frac{F_2(a)}{F_5(a)} \int_0^b g_2(t) \sin(at) dt$$

$$A_2(a) = \frac{1}{a} \frac{F_3(a)}{F_5(a)} \int_0^a g_1(t) \sin(at) dt - \frac{1}{a} \frac{F_1(a)}{F_5(a)} \int_0^b g_2(t) \sin(at) dt \quad (22)$$

여기서

$$F_1(a) = 1 - \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(1)}} \coth(ah_1)$$

$$F_2(a) = 1 + \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(1)}} \coth(ah_1)$$

$$F_3(a) = \left[1 + \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} \coth(ah_2) \right] \exp(ah_p)$$

$$F_4(a) = \left[1 - \frac{c_{44}^*}{c_{44}^{(2)}} \coth(ah_2) \right] \exp(-ah_p)$$

$$F_5(a) = F_1(a)F_4(a) - F_2(a)F_3(a) \quad (23)$$

이다. 식 (22)를 식 (15)-(17)에 대입하면 함수 $B_i(a)$, $C_i(a)$ 와 $D_i(a)$ ($i=1, 2$)도 $g_1(t)$ 와 $g_2(t)$ 의

항으로 쉽게 나타낼 수 있다. 이 결과를 식 (5)와 (6)의 첫 번째 경계조건에 대입하고, $g_1(t) = -g_1(-t)$ 와 $g_2(t) = -g_2(-t)$ 의 관계를 이용하면 $g_1(t)$ 와 $g_2(t)$ 를 결정하기 위한 특이적분방정식(singular integral equation)을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g_1(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_{11}(t,x) g_1(t) dt \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b K_{12}(t,x) g_2(t) dt = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{g_2(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K_{21}(t,x) g_1(t) dt \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b K_{22}(t,x) g_2(t) dt = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 적분핵(kernel) $K_{ij}(t,x)$ ($i,j=1,2$)와 γ_1, γ_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_{11}(t,x) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{-c_{44}^*[F_3(a)+F_4(a)]}{\gamma_1 F_5(a)} - 1 \right\} \\ &\quad \times \sin \alpha(t-x) da \\ K_{12}(t,x) &= \int_0^\infty \frac{c_{44}^*[F_1(a)+F_2(a)]}{\gamma_1 F_5(a)} \\ &\quad \times \sin \alpha(t-x) da \\ K_{21}(t,x) &= \int_0^\infty \frac{-c_{44}^*[\exp(-2ah_p)F_3(a)+F_4(a)]}{\gamma_2 \exp(-ah_p)F_5(a)} \\ &\quad \times \sin \alpha(t-x) da \\ K_{22}(t,x) &= \int_0^\infty \left\{ \frac{c_{44}^*[\exp(-2ah_p)F_1(a)+F_2(a)]}{\gamma_2 \exp(-ah_p)F_5(a)} - 1 \right\} \\ &\quad \times \sin \alpha(t-x) da \\ \gamma_1 &= \frac{c_{44}^* c_{44}^{(1)}}{c_{44}^* + c_{44}^{(1)}}, \quad \gamma_2 = -\frac{c_{44}^* c_{44}^{(2)}}{c_{44}^* + c_{44}^{(2)}} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (20)과 (21)의 근을 갖기 위한 조건(single-valuedness condition)으로 다음과 같다.

$$\int_{-a}^a g_1(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^b g_2(t) dt = 0 \quad (26)$$

적분방정식을 계산하기 위하여 변수치환 $g_1(t) = G_1(s)$ 과 $g_2(t) = G_2(s)$ 의 관계를 이용하면 식 (24)와 (26)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G_1(s)}{s-r} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}(s,r) G_1(s) ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}(s,r) G_2(s) ds = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_1} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G_2(s)}{s-r} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}(s,r) G_1(s) ds \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}(s,r) G_2(s) ds = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_2} \\ \int_{-1}^1 G_1(s) ds = 0, \quad \int_{-1}^1 G_2(s) ds = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)의 해는 다음과 같은 형태를 갖는다.⁽¹³⁾

$$G_1(s) = \frac{\Psi_1(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad G_2(s) = \frac{\Psi_2(s)}{\sqrt{1-s^2}} \quad (28)$$

Gauss-Chebyshev 적분공식을 이용하여 식 (27)은 선형대수방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left\{ \left[\frac{1}{s_i - r_k} + K_{11}(s_i, r_k) \right] \Psi_1(s_i) \right. \\ \left. + K_{12}(s_i, r_k) \Psi_2(s_i) \right\} = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_1} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left\{ K_{21}(s_i, r_k) \Psi_1(s_i) \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{s_i - r_k} + K_{22}(s_i, r_k) \right] \Psi_2(s_i) \right\} = -\frac{\tau_0^*}{\gamma_2} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} \Psi_1(s_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} \Psi_2(s_i) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 s_i 와 r_k 는 제1종 n 차와 제2종 $n-1$ 차의 Chebyshev 다항식의 근으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_i &= \cos \left(\pi \frac{2i-1}{2n} \right) \quad (i=1, \dots, n) \\ r_k &= \cos \left(\pi \frac{k}{n} \right) \quad (k=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (30)$$

모드 III 응력강도계수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} K_{IIIa} &= -\gamma_1 \sqrt{\pi a} \Psi_1(1) \\ K_{IIIb} &= -\gamma_2 \sqrt{\pi a} \Psi_2(1) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 K_{IIIa} 와 K_{IIIb} 는 길이가 $2a$ 와 $2b$ 인 균열선단에서의 응력강도계수를 나타낸다.

4. 결과 및 토론

수치해석에 사용된 길이가 $2a$ 와 $2b$ 인 균열에 대한 무차원화된 응력강도계수와 무차원화된 전기변위 및 전기장의 정의는 다음과 같다.

$$k_a = |K_{IIIa} / \tau_0 \sqrt{\pi a}|, \quad (a = a, b)$$

$$D_0^* \equiv \frac{c_{44} e_{15} D_0}{c_{44} \epsilon_{11} \tau_0} \quad (\text{Case I})$$

$$E_0^* \equiv \frac{e_{15} E_0}{\tau_0} \quad (\text{Case II}) \quad (32)$$

여기서 k_a ($a = a, b$)는 길이가 $2a$ 와 $2b$ 인 균열에 대한 무차원화된 응력강도계수이고, D_0^* 와 E_0^* 는 각각 무차원화된 전기변위와 전기장을 의미한다. 수치해석에 사용된 압전재료는 PZT-4를 이용하였고, 탄성체는 알루미늄(Aluminum)과 에폭시(Epoxy)를 사용하였다. 압전재료와 탄성체의 재료특성은 Table 1에 나타내었다. 길이가 $2b$ 인 균열이 없고, 탄성체 1과 2를 무한대로 가정하면 ($h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$), Narita와 Shindo⁽⁶⁾의 해석과 동일한 결과를 얻을 수 있고, 길이가 $2b$ 인 균열이 없고 탄성체 1만 무한대로 가정하면 정경문 등⁽¹²⁾의 해석결과와 동일한 결과를 얻음으로써 본 연구에서 얻은 수치해석 결과의 타당성을 검증하였다.

먼저, 본 모델(Fig. 1)에 대한 특별한 경우로서 탄성체의 두께를 무한대로 가정 ($h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$)하여 응력강도계수를 구하였다. 무차원화된 전기변위 D_0^* 와 전기장 E_0^* 의 값에 따라 압전재료의 두께와 균열길이의 비의 함수로서 길이가 $2a$ 와 $2b$ 인 균열에 대한 무차원화된 응력강도계수 k_a 와 k_b 를 Fig. 2에 나타내었다. 적용된 재료는 알루미늄/PZT-4/알루미늄이고 균열은 같은 길이($a=b$)를 갖는다. 압전재료의 균열길이가 증가하면서 응력강도계수는 증

Table 1 Material properties^(6,7)

Materials	PZT-4	Aluminum	Epoxy
c_{44} ($\times 10^{10} \text{N/m}^2$)	2.56	2.65	0.176
e_{15} (C/m ²)	12.7	0	0
ϵ_{11} ($\times 10^{-10} \text{C/Vm}$)	64.6	-	-

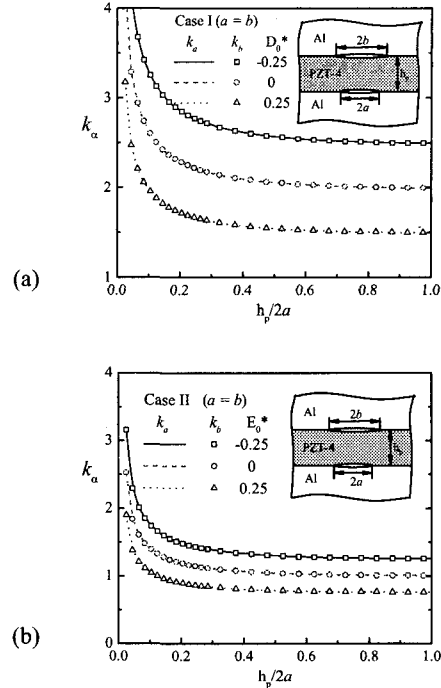


Fig. 2 Normalized stress intensity factors as a function of $h_p/2a$ with various D_0^* and E_0^*

가함을 보였다. 양(positive)의 값을 갖는 전기장은 응력강도계수를 감소하게 하고, 반대로 음(negative)의 방향을 갖는 전기장은 응력강도계수를 증가시킨다. 탄성체의 재료를 알루미늄 대신 에폭시를 사용하였을 때에도 Fig. 2와 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 전기변위 또는 전기장이 영(zero)이고, 균열길이의 비(b/a)에 따라 $h_p/2a$ 의 함수로서 응력강도계수 k_a 와 k_b 를 Fig. 3에 나타내었다. b/a 가 커질수록 k_a 보다 k_b 가 더 큰 값을 보이고, Case I인 경우에 균열길이의 비(b/a)에 따른 k_a 와 k_b 의 차이가 더 커짐을 알 수 있다. 탄성체의 재료가 에폭시인 경우에도 비슷한 경향을 보였다.

두께 h_1 과 h_2 를 갖는 탄성체 사이에 접합된 압전재료의 계면에 균열이 놓여 있을 때 응력강도계수를 구하였다. 탄성체와 압전재료의 두께가 같고 ($h_2:h_p:h_1=1:1:1$), 균열길이 $2a$ 와 $2b$ 가 같을 때 전기장의 방향에 따라 $h_p/2a$ 의 함수로서 응력강도계수 k_a 와 k_b 를 Fig. 4에 나타내었다. 탄성체의 재료가 알루미늄

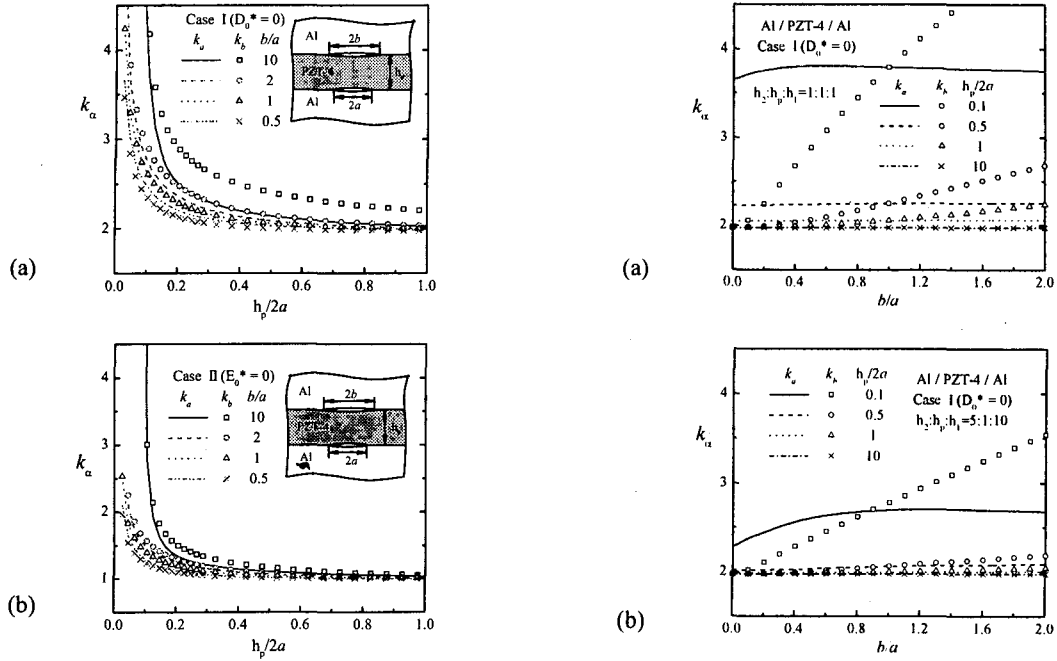


Fig. 3 Normalized stress intensity factors as a function of $h_p/2a$ with various b/a

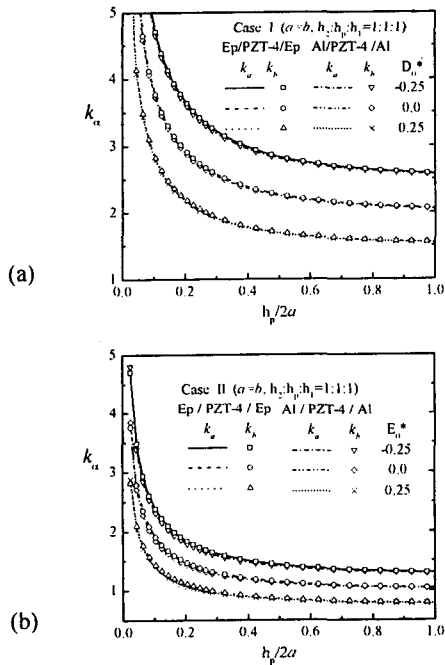


Fig. 4 Normalized stress intensity factors for multilayers as a function of $h_p/2a$

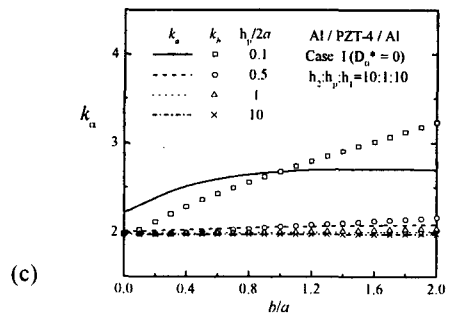


Fig. 5 Normalized stress intensity factors as a function of b/a and $h_p/2a$ with specific layer geometries

미늄 ($c_{44} < c_{44}^{(1)}$) 또는 에폭시 ($c_{44} > c_{44}^{(1)}$)일 때 응력강도계수는 거의 차이가 없음을 보였다. 또한, 알루미늄/PZT-4/에폭시와 에폭시/PZT-4/알루미늄 구조도 비슷한 경향을 보였다. 따라서, 압전재료의 상하 계면에 균열이 존재할 때 응력강도계수는 재료특성에 크게 의존하지 않음을 알 수 있다. 무차원화된 전기변위가 영(zero)이고, 알루미늄/PZT-4/알루미늄의 구조에 대하여 두 개의 계면균열 길이의 비(b/a)에 따라 응력강도계수를 Fig. 5에 나타내었다. 탄성체의 두께 h_1 과 h_2 가 압전재료의 두께 h_p 와 같을 때

(Fig. 5(a))와 훨씬 클 때(Fig. 5(c))의 경우에 대하여 무차원화된 균열길이($h_p/2a$)에 따라 b/a 의 함수로 응력강도계수를 구하였다. 압전재료의 두께가 균열 길이보다 아주 작을 때($h_p/2a=0.1$) 균열길이의 비(b/a)에 따른 응력강도계수 k_a 와 k_b 가 큰 차이를 보이고, 압전재료의 두께가 균열길이보다 아주 큰 경우에는 k_a 와 k_b 가 거의 일치한다. 또한, $h_p/2a=0.1$ 이고, $b/a < 1$ 인 경우에 균열길이 b 가 증가하면서 k_a 에 영향을 미치고 있음을 Fig. 5(c)에서 알 수 있다. 특히, 탄성체의 두께가 압전재료의 두께보다 훨씬 클 때 응력강도계수 k_a 가 k_b 에 미치는 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다. 탄성체의 두께가 압전재료의 두께보다 크면서 서로 다른 경우($h_2:h_p:h_1=5:1:10$)에 대해서도 Fig. 5(c)와 비슷한 경향을 보였다.

압전재료의 두께와 균열길이 $2a$ 의 비가 0.5이고, 두 개의 균열길이의 비에 따라서 탄성체와 압전재료의 두께의 비(h_2/h_p 또는 h_1/h_p)의 함수로 응력강도계수 k_a 와 k_b 를 Fig. 6에 나타내었다. 탄성체와 압전재료의 두께 비가 1보다 작은 경우에 응력강도계수의 변화가 크게 나타남을 알 수 있다. 즉, 탄성체의 두께보다 균열길이가 더 커질 때 응력강도계수는 크게 증가한다. 또한, 탄성체의 재료가 에폭시인 경우에도 비슷한 경향을 보였다.

5. 결론

선형압전이론을 이용하여 면의 전단 및 전기적 하중을 받는 탄성체 사이에 접합된 압전재료의 계면에 각각 놓여있는 균열에 대하여 해석하였다. 재료의 결합을 다르게 하거나 기하학적 형상의 변수, 두 균열길이의 비에 따라서 응력강도계수를 결정하였다. 수치해석의 결과를 이용하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

(1) 균일한 전기변위 또는 전기장이 작용하는 경우에 균열길이가 증가하면서 무차원화된 응력강도계수는 증가하였다. 특히, 균일한 전기변위가 작용하는 경우에 응력강도계수의 변화가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 재료의 결합을 다르게 한 경우에는 응력강도계수에 큰 변화를 보이지 않았다.

(2) 응력강도계수는 음의 방향을 갖는 전기장에서 높고, 양의 방향을 갖는 전기장에서는 낮은 값을 갖는다.

(3) 하나의 균열길이가 일정하고 다른 균열길이를 변화시켰을 때 일정한 균열길이에 대한 응력강

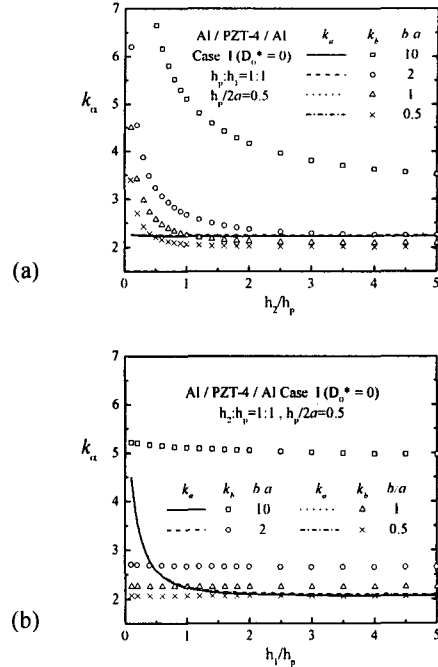


Fig. 6 Normalized stress intensity factors as a function of h_2/h_p and h_1/h_p with various b/a

도계수에 영향을 주었다. 특히, 압전재료의 두께가 균열길이보다 작을 때 또는 압전재료의 두께가 탄성층의 두께보다 작을 때 두 계면균열에 대한 상호작용이 더 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다. 그러나, 압전재료의 두께가 균열길이 보다 큰 경우에는 두 계면균열에 대한 응력강도계수는 균열길이가 증가하여도 서로 영향을 거의 미치지 않고 일정하다.

후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. 광문규, "압전세라믹을 이용한 지능 구조물의 능동 진동 제어," 한국정밀공학회지, 제18권, 제12호, pp. 30-46, 2001.
2. Pak, Y. E., "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material," J. Appl. Mech., Vol. 57, pp. 647-653, 1990.

3. Beom, H. G. and Atluri, S. N., "Near-Tip Fields and Intensity Factors for Interfacial Cracks in Dissimilar Anisotropic Piezoelectric Media," *Int. J. Fract.*, Vol. 75, pp. 163-183, 1996.
4. Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., "Electroelastic Intensification near Anti-Plane Shear Crack in Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoret. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 25, pp. 65-71, 1996.
5. Shindo, Y., Tanaka, K. and Narita, F., "Singular Stress and Electric Fields of a Piezoelectric Ceramic Strip with a Finite Crack Under Longitudinal Shear," *Acta Mech.*, Vol. 120, pp. 31-45, 1997.
6. Narita, F. and Shindo, Y., "Layered Piezoelectric Medium with Interface Crack Under Anti-Plane Shear," *Theoret. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 30, pp. 119-126, 1998.
7. Narita, F. and Shindo, Y., "The Interface Crack Problem for Bonded Piezoelectric and Orthotropic Layers Under Antiplane Shear Loading," *Int. J. Fracture*, Vol. 98, pp. 87-101, 1999.
8. Narita, F., Shindo, Y. and Watanabe, K., "Anti-Plane Shear Crack in a Piezoelectric Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces," *JSME Int. J. Series A*, Vol. 42, No. 1, pp. 66-72, 1999.
9. Kim, K. Y. and Lee, K. Y., "A Comment on Anti-Plane Shear Crack in a Piezoelectric Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces," *JSME Int. J. Series A*, Vol. 43, No. 2, pp.196-197, 2000.
10. Kwon, J. H. and Lee, K. Y., "Interface Crack Between Piezoelectric and Elastic Strips," *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 70, pp. 707-714, 2000.
11. Kwon, J. H. and Lee, K. Y., "Crack Problem at Interface of Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Layer Under Anti-Plane Shear," *KSME Int. J.*, Vol. 15, pp. 61-65, 2001.
12. 정경문, 임춘기, 범현규, "탄성층과 반무한체 사이에 접합된 압전재료의 계면균열에 대한 응력강도계수," *한국정밀공학회지*, 제19권, 제5호, pp. 81-88, 2002.
13. Erdogan, F. and Gupta, G., "The Stress Analysis of Multi-Layered Composites with a Flaw," *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 39-61, 1971.