

부등류조건에서 종확산방정식의 Eulerian-Lagrangian 모형

김 대 근 · 서 일 원^{*}
대불대학교 토목환경공학과 · 서울대학교 토목공학과
(2002년 6월 19일 접수; 2002년 9월 6일 채택)

Eulerian-Lagrangian Modeling of One-Dimensional Dispersion Equation in Nonuniform Flow

Dae-Geun Kim and Il-Won Seo^{*}

Department of Civil & Environmental Engineering, Daebul University, Chonnam 526-702, Korea
School of Civil, Urban & Geosystem Engineering, Seoul National University, Seoul 141-742, Korea
(Manuscript received 19 June, 2002; accepted 6 September, 2002)

Various Eulerian-Lagrangian models for the one-dimensional longitudinal dispersion equation in nonuniform flow were studied comparatively. In the models studied, the transport equation was decoupled into two component parts by the operator-splitting approach; one part is governing advection and the other is governing dispersion. The advection equation has been solved by using the method of characteristics following fluid particles along the characteristic line and the results were interpolated onto an Eulerian grid on which the dispersion equation was solved by Crank-Nicholson type finite difference method. In the solution of the advection equation, Lagrange fifth, cubic spline, Hermite third and fifth interpolating polynomials were tested by numerical experiment and theoretical error analysis. Among these, Hermite interpolating polynomials are generally superior to Lagrange and cubic spline interpolating polynomials in reducing both dissipation and dispersion errors.

Key words : Eulerian-Lagrangian model, dispersion equation, operator-splitting approach, method of characteristics

1. 서 론

단면에 걸친 혼합이 완료된 후, 자연하천에서 오염물질의 혼합과정은 1차원 종확산방정식으로 해석 할 수 있다. 1차원 종확산방정식을 수치해석적으로 풀기 위하여 많은 Eulerian 해석방법이 발전하였다.^{1~3)} 그러나 대부분의 수치해석방법은 특히 이송과정이 지배적인 경우에 과도한 수치진동 및 수치 확산으로 인하여 바람직한 해석결과를 보이지 못한다. 이러한 수치적인 오차는 이송-확산방정식의 이송과정의 쌍곡선성을 Eulerian 해석방법이 제대로 모의할 수 없기 때문에 발생하는 것으로, 이송이 혼합과정의 지배적인 인자인 경우에는 기존의 Eulerian 해석방법이 물리적인 현상을 제대로 모의하기

어려워진다. 이러한 수치적인 오차를 줄이기 위하여, 흐름과정을 따르는 좌표계를 사용함으로써, 단지 이송-확산방정식의 확산항만을 수치적으로 해석하는 Lagrangian 해석방법이 사용되기도 한다. 그러나 Lagrangian 해석방법은 지형이나 흐름이 복잡한 실제 현상에 적용하기에는 격자망(numerical grid)을 구성하기가 어려운 단점이 있다⁴⁾.

1차원 종확산방정식의 정확한 수치해를 구하기 위하여 Eulerian 해석방법과 Lagrangian 해석방법의 각각의 장점만을 사용하는 Eulerian and Lagrangian 해석방법(이하 ELM)이 최근 다양한 연구자들에 의해 연구되어지고 있다^{5~8)}. ELM에서는 계산의 편의를 위하여 Eulerian 해석방법의 고정격자체계를 이용하고 수치해석상의 오차를 줄이기 위하여 입자의 특성곡선을 따라가면서 이송방정식을 해석한다.

ELM에서는 종확산방정식이 이송방정식과 확산

Corresponding Author : Dae-Geun Kim, Department of Civil & Environmental Engineering, Daebul University, Chonnam 526-702, Korea

Phone : +82-61-469-1322

E-mail : greatgkim@mail.daebul.ac.kr

방정식으로 분리되는 연산자 분리방법이 사용된다. 그리고 이송방정식은 특성곡선법으로 해석되고 확산방정식은 기존의 유한차분법이나 유한요소법으로 해석된다. 이송방정식의 해석과정에서 특성곡선이 지나가는 임의 격자점에서의 농도값을 보간하여야 하는데, 여기에 사용되는 보간방정식의 정확성이 수치해의 정확도를 결정하게 된다.

Lagrange 보간다항식을 사용하는 경우에, 가장 간단한 방법은 인접한 2개 격자점의 농도값을 이용하는 1차보간법을 사용하는 것이다. 그러나 이 경우 과도한 수치확산이 발생하므로 대부분 Lagrange 2차, 3차, 4차와 같은 고차의 보간다항식을 사용한다^{6,9)}. 그러나 고차의 보간다항식을 사용하는 경우에는 수치확산을 줄일수 있으나, 많은 격자점의 정보를 필요로 하므로 경계의 처리가 어려워지고 수치진동은 도리어 심해지는 문제점이 있다.

Lagrange 보간다항식의 이상과 같은 단점 때문에, Holly와 Preissmann⁵⁾은 농도와 농도의 도함수를 이용하는 Hermite 보간다항식을 도입하였으며, 좋은 해석결과를 얻을 수 있었다. Holly와 Polate-ra¹⁰⁾는 2차원 이송방정식의 해석에 Hermite 보간다항식을 이용하였으며, Toda와 Holly¹¹⁾는 이송-확산방정식을 연산자 분리방법을 사용하지 않고 특성곡선법을 적용하는 방법을 제안하였다. Yang과 Hsu⁷⁾는 시간적분의 횟수를 줄임으로써 보간과정에서 발생하는 오차를 줄이는 방법을 제안한바 있다. Jun과 Lee^{12,13)}는 Hermite 5차보간다항식을 사용하여 이송방정식을 해석하고 확산방정식은 Crank-Nicholson 방법을 사용하였다. ELM을 사용한 종확산방정식의 해석결과는 Eulerian 해석방법에 의한 해석결과보다 훨씬 좋은 결과를 보였다.

본 연구에서는 ELM의 적용성을 높이기 위하여, 다양한 보간다항식을 사용하여 이송방정식을 해석하고 그 결과를 검토하였으며 이론적인 오차해석을 수행하였다. 또한 기존의 연구는 흐름이 등류조건인 경우에 대해서만 이루어 졌으나, 본 연구에서는 부등류조건에 ELM을 적용하였다.

2. 지배방정식

부등류조건에서의 1차원 종확산방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + uA \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(KA \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (1)$$

여기서 A 는 단면적; x 와 t 는 거리 및 시간; C 는 농도; u 와 K 는 단면평균 유속과 종확산계수이다. 본 연구에서는 A 와 K 를 일정한 상수로 가정하였다. 식 (1)은 선형방정식이므로 이송방정식과 확산방정식은 다음과 같이 분리될 수 있다.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq f\Delta t \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad f\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (3)$$

식 (2)와 (3)은 다음과 같이 시간에 대해 이산화된다.

$$\frac{C^f - C^n}{\Delta t} = u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{C^{n+1} - C^f}{\Delta t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5)$$

여기서 C^f 는 이송만이 발생한 후의 농도; C^n 과 C^{n+1} 은 현재 및 다음 시간단계에서의 농도; Δt 는 시간 간격이다.

3. 이송모형

이송방정식 (4)는 특성곡선을 따라 농도는 일정한 상수의 값을 가짐을 의미한다. 즉, 시간에 대한 농도의 전미분은 영(zero)임을 의미한다. 이는 수학적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = u^* \quad (7)$$

여기서 u^* 는 평균특성속도(average characteristic velocity)이다. 평균특성속도는 격자와 격자 사이에서 선형으로 변한다는 가정하에 다음과 같이 계산된다

$$u^* = \frac{u^* \Delta t}{\Delta x} u_{i-1} + \left(1 - \frac{u^* \Delta t}{\Delta x} \right) u_i \quad (8)$$

여기서 Δx 는 격자간 간격이다.

따라서 식 (6)과 (7)은 다음과 같이 쓸 수 있다 (Fig. 1 참조).

$$C'_R = C_P^n \quad (9)$$

$$\frac{x_R - x_P}{\Delta t} = u^* \quad (10)$$

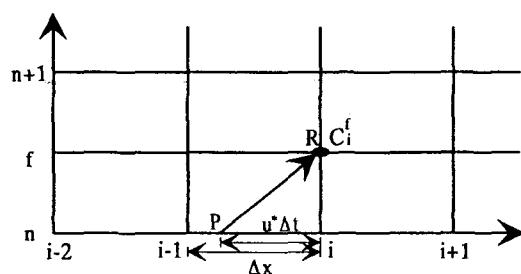


Fig. 1. One dimensional computational grid.

식 (9)와 (10)의 의미하는 것은 시간단계 n 에서의 농도는 Δt 동안 농도의 변화 없이 $u^* \Delta t$ 만큼 이송됨을 의미한다. 따라서 특성곡선법의 정확도는 P점에서의 농도를 산정하는 보간법에 크게 좌우된다.

3.1. Lagrange 4차 보간다항식

Lagrange 4차 보간다항식을 사용하는 경우에 C_i^f 는 다음과 같이 계산된다.

$$C_i^f = C_P^n = H_1 C_{i-3}^n + H_2 C_{i-2}^n + H_3 C_{i-1}^n + H_4 C_i^n + H_5 C_{i+1}^n + H_6 C_{i+2}^n \quad (11)$$

여기서

$$H_1 = \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{120} \quad (12a)$$

$$H_2 = \frac{(3-\alpha)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{24} \quad (12b)$$

$$H_3 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{12} \quad (12c)$$

$$H_4 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)}{12} \quad (12d)$$

$$H_5 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)(\alpha-1)\alpha(\alpha+2)}{24} \quad (12e)$$

$$H_6 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-2)(1-\alpha)\alpha(\alpha+1)}{120} \quad (12f)$$

여기서 α 는 Courant number($= u^* \Delta t / \Delta x$)이다.

3.2. Cubic spline 보간다항식

Cubic spline 보간다항식을 사용하는 경우에 C_i^f 는 다음과 같이 계산된다.

$$C_i^f = \alpha C_{i-1}^n + (1-\alpha) C_i^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \alpha (\alpha^2 - 1) CXX_{i-1}^f + \frac{1}{6} \Delta x^2 (1-\alpha) ((1-\alpha)^2 - 1) CXX_i^f \quad (13)$$

$$\Delta x CXX_{i-1}^f + 4 \Delta x CXX_i^f + \Delta x CXX_{i+1}^f = \frac{6}{\Delta x} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (14)$$

여기서 CXX 는 C 의 2차 도함수이다. 식 (14)에서 CXX 를 계산하고 이를 식 (13)에 대입하여 각 격자점에서의 농도를 계산한다.

3.3. Hermite 보간다항식

Hermite 보간다항식은 농도와 농도의 도함수를 이용하여 이송방정식의 해를 구할 수 있다. Hermite 3차 보간다항식을 사용하는 경우에 C_i^f 는 다음과 같이 계산된다¹⁴⁾.

$$C_i^f = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 CX_{i-1}^n + a_4 CX_i^n \quad (15)$$

여기서

$$a_1 = \alpha^2(3-2\alpha) \quad (16a)$$

$$a_2 = 1 - a_1 \quad (16b)$$

$$a_3 = \alpha^2(1-\alpha)\Delta x \quad (16c)$$

$$a_4 = -\alpha(1-\alpha)^2 \Delta x \quad (16d)$$

식 (15)의 농도의 도함수를 구하기 위하여 다음 관계를 이용한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (17)$$

따라서 식 (15)는 다음과 같이 차분된다.

$$CX_i^f = b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 CX_{i-1}^n + b_4 CX_i^n \quad (18)$$

여기서

$$b_1 = 6\alpha(\alpha-1)/\Delta x \quad (19a)$$

$$b_2 = -b_1 \quad (19b)$$

$$b_3 = \alpha(3\alpha-2) \quad (19c)$$

$$b_4 = (\alpha-1)(3\alpha-1) \quad (19d)$$

이상과 마찬가지 방식으로 Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 경우에는 농도, 농도의 1차도함수 및 2차도함수가 이용된다. Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 경우에 C_i^f 는 다음과 같이 계산된다.

$$C_i^f = c_1 C_{i-1}^n + c_2 C_i^n + c_3 CX_{i-1}^n + c_4 CX_i^n + c_5 CXX_{i-1}^n + c_6 CXX_i^n \quad (20)$$

$$CX_i^f = d_1 C_{i-1}^n + d_2 C_i^n + d_3 CX_{i-1}^n + d_4 CX_i^n + d_5 CXX_{i-1}^n + d_6 CXX_i^n \quad (21)$$

$$CXX_i^f = e_1 C_{i-1}^n + e_2 C_i^n + e_3 CX_{i-1}^n + e_4 CX_i^n + e_5 CXX_{i-1}^n + e_6 CXX_i^n \quad (22)$$

여기서

$$c_1 = \alpha^3(10-15\alpha+6\alpha^2) \quad (23a)$$

$$c_2 = 1 - c_1 \quad (23b)$$

$$c_3 = \alpha^3(1-\alpha)(4-3\alpha)\Delta x \quad (23c)$$

$$c_4 = -\alpha(1-\alpha)^3(1+3\alpha)\Delta x \quad (23d)$$

$$c_5 = \alpha^3(1-\alpha)^2 \Delta x^2/2 \quad (23e)$$

$$c_6 = \alpha^2(1-\alpha)^3 \Delta x^2/2 \quad (23f)$$

$$d_1 = -30\alpha^3(1-\alpha)^2/\Delta x \quad (24a)$$

$$d_2 = -d_1 \quad (24b)$$

$$d_3 = -\alpha^2(2-3\alpha)(6-5\alpha) \quad (24c)$$

$$d_4 = (1-\alpha)^2(1-3\alpha)(1+5\alpha) \quad (24d)$$

$$d_5 = -\alpha^3(1-\alpha)(3-5\alpha)\Delta x/2 \quad (24e)$$

$$d_6 = -\alpha(1-\alpha)^2(2-5\alpha)\Delta x/2 \quad (24f)$$

$$e_1 = 60\alpha(1-3\alpha+2\alpha)^2/\Delta x^2 \quad (25a)$$

$$e_2 = -e_1 \quad (25b)$$

$$e_3 = 12\alpha(1-\alpha)(2-5\alpha)/4x \quad (25c)$$

$$e_4 = 12\alpha(1-\alpha)(3-5\alpha)/4x \quad (25d)$$

$$e_5 = \alpha(3-12\alpha+10\alpha^2) \quad (25e)$$

$$e_6 = (1-\alpha)(1-18\alpha+10\alpha^2) \quad (25f)$$

4. 이송방정식의 오차해석

Fourier 해석을 이용하여 상기 이송방정식의 이산방정식에 대해 오차해석을 수행하였다. Fourier 해석을 이용한 오차해석의 기본가정은 이송방정식은 선형 방정식이므로 해의 중첩(superposition)이 가능하다는 것이다.

4.1. Lagrange 5차 보간다항식

오차해석을 위하여, 식(11)의 C_i^n 에 $\overline{C}^n \exp(j\sigma i)$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\overline{C}' = G \overline{C}^n \quad (26)$$

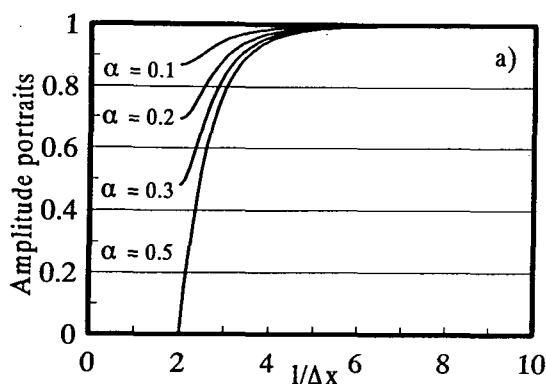
여기서 \overline{C}^n 은 임의 시간단계에서의 진폭이고 $j = \sqrt{-1}$ 이다. G 는 진폭계수(amplification factor)로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G &= H_1 \cos 3\alpha + (H_2 + H_6) \cos 2\alpha \\ &\quad + (H_3 + H_5) \cos \alpha + H_4 - j(H_1 \sin 3\alpha \\ &\quad + (H_2 - H_6) \sin 2\alpha + (H_3 - H_5) \sin \alpha) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 α 는 $2\pi \Delta x / L$, L 은 임의 사인곡선의 파장이다. 진폭오차(amplitude error)와 위상오차(celebrity error)는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{AmplitudeError}(G) \quad (28)$$

$$\text{Celerity Error} = -\frac{\arctan\left(\frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)}\right)}{\alpha\sigma} \quad (29)$$



식(28)과 식(29)를 이용한 진폭오차도와 위상오차도는 Fig. 2와 같다. Courant number가 0.5인 경우에 진폭오차는 최대가 되고 위상오차는 발생하지 않음을 알 수 있다.

4.2. Cubic spline 보간다항식

식 (13)과 (14)의 C_i^n 에 $\overline{C}^n \exp(j\sigma i)$ 을 대입하고 정리하면, 다음과 같은 진폭계수를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} G &= (1-\alpha) + \alpha \cos \sigma + (\alpha(\alpha^2-1) \cos \sigma \\ &\quad + (1-\alpha)((1-\alpha^2)-1)\left(\frac{\cos \sigma - 1}{\cos \sigma + 2}\right) \\ &\quad - j\left(\alpha \sin \sigma \left(1 + (\alpha^2-1)\left(\frac{\cos \sigma - 1}{\cos \sigma + 2}\right)\right)\right) \end{aligned} \quad (30)$$

진폭오차도와 위상오차도를 Fig. 3에 도시하였다.

4.3. Hermite 3차 보간다항식

Holly and Preissmann⁵⁾은 식(15)와 (18)의 C_i^n 에 $\overline{C}^n \exp(j\sigma i)$ 을 대입하여 다음과 같은 식을 얻었다.

$$\left(\frac{\overline{C}^{n+1}}{CX^{n+1}}\right) = F \left(\frac{\overline{C}^n}{CX^n}\right) \quad (31)$$

여기서 F 는 진폭행렬(amplification matrix)로 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

행렬 (32)의 각각의 요소는 다음과 같다.

$$k_1 = \alpha_1 \exp(-j\sigma) + \alpha_2 \quad (33a)$$

$$k_2 = \alpha_3 \exp(-j\sigma) + \alpha_4 \quad (33b)$$

$$k_3 = b_1 \exp(-j\sigma) + b_2 \quad (33c)$$

$$k_4 = b_3 \exp(-j\sigma) + b_4 \quad (33d)$$

이송방정식에 대한 해석해의 진폭행렬은 다음과 같다³⁾.

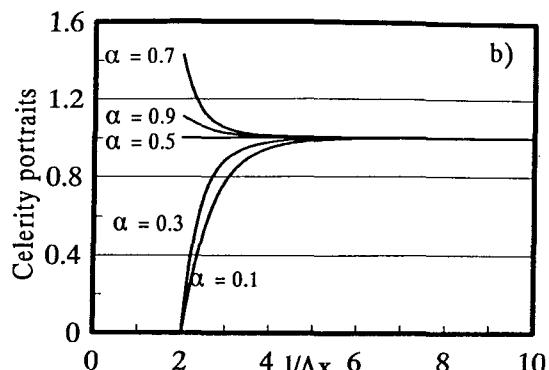


Fig. 2. Langrange 5th degree interpolating polynomials : a) Amplitude portraits; b) Celerity portraits.

$$F_0 = \begin{bmatrix} \exp(-j\sigma\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(-j\sigma\alpha) \end{bmatrix} \quad (34)$$

진폭오차와 위상오차는 식 (32)와 식 (34)를 비교함으로써 얻을 수 있다. 식 (34)의 진폭행렬의 고유치(eigenvalue)에 대한 진폭은 항상 1이고, 위상오차는 존재하지 않는다. 식 (32)의 진폭행렬의 고유치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(F - \lambda I)X = 0 \quad (35)$$

$$(k_1 - \lambda)(k_4 - \lambda) - k_2 k_3 = 0 \quad (36)$$

식 (36)의 해는 다음과 같다.

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k_1 + k_4) \pm \sqrt{(k_1 + k_4)^2 - 4(k_1 k_4 - k_2 k_3)}}{2} \quad (37)$$

식 (37)을 이용하여 진폭오차와 위상오차를 Fig. 4에 도시하였다. Fig. 2, 3과 비교하여, Hermite 3차 보간다항식을 사용하는 경우에 진폭오차와 위상오차가 훨씬 작은 값을 보이고 있음을 알 수 있다.

4.4. Hermite 5차 보간다항식

Hermite 3차 보간다항식의 오차해석과 마찬가지 방법으로 Hermite 5차 보간다항식의 진폭행렬을 구하면 다음과 같다.

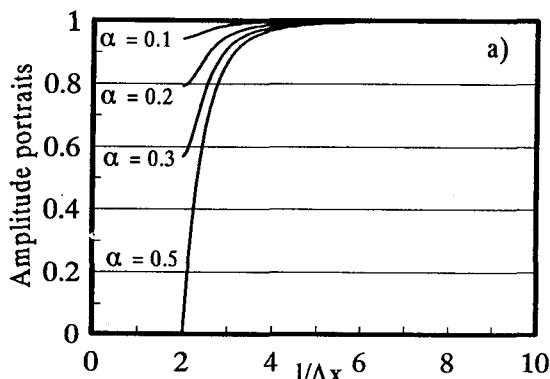


Fig. 3. Cubic spline interpolating polynomials : a) Amplitude portraits.

$$M = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \quad (38)$$

여기서 행렬의 각각의 요소는 다음과 같다.

$$k_1 = c_1 \exp(-j\sigma) + c_2 \quad (39a)$$

$$k_2 = c_3 \exp(-j\sigma) + c_4 \quad (39b)$$

$$k_3 = c_5 \exp(-j\sigma) + c_6 \quad (39c)$$

$$k_4 = d_1 \exp(-j\sigma) + d_2 \quad (39d)$$

$$k_5 = d_3 \exp(-j\sigma) + d_4 \quad (39e)$$

$$k_6 = d_5 \exp(-j\sigma) + d_6 \quad (39f)$$

$$k_7 = e_1 \exp(-j\sigma) + e_2 \quad (39g)$$

$$k_8 = e_3 \exp(-j\sigma) + e_4 \quad (39h)$$

$$k_9 = e_5 \exp(-j\sigma) + e_6 \quad (39i)$$

진폭오차와 위상오차는 Fig. 5와 같다. 진폭오차와 위상오차가 거의 발생하지 않고 있음을 알 수 있다.

5. 확산모형

확산방정식 (5)는 Crank-Nicholson 방법을 이용

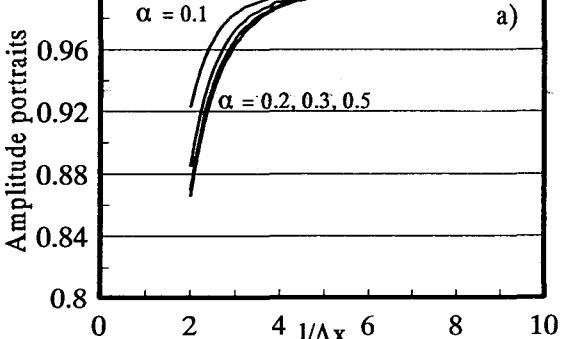
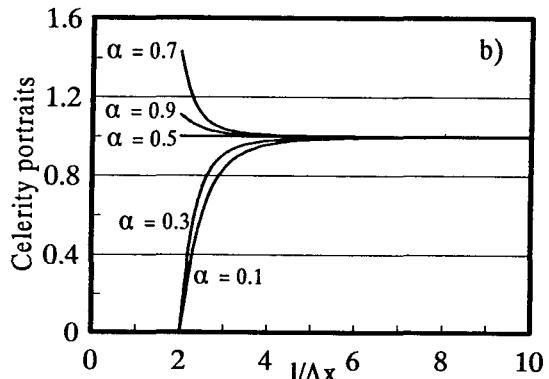


Fig. 4. Hermite 3rd degree interpolating polynomials : a) Amplitude portraits.

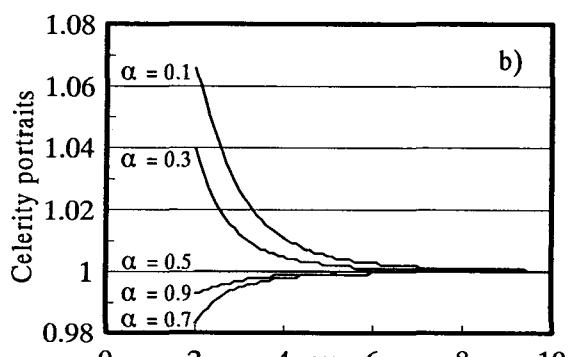


Fig. 4. Hermite 3rd degree interpolating polynomials : b) Celerity portraits.

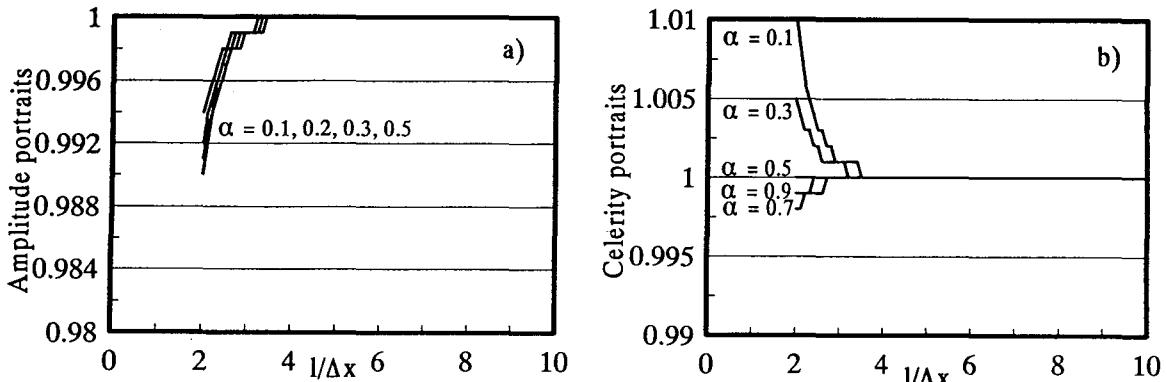


Fig. 5. Hermite 5th degree interpolating polynomials : a) Amplitude portraits; b) Celerity portraits.

하여 다음과 같이 이산화 하였다.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^f}{\Delta t} = \frac{K}{2\Delta x^2} (C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + C_{i-1}^f + C_{i+1}^f - 2C_i^f + C_{i-1}^f \quad (40)$$

식 (40)은 다음과 같이 정리된다.

$$-0.5\beta C_{i+1}^{n+1} + (1+\beta)C_i^{n+1} - 0.5\beta C_{i-1}^{n+1} = 0.5\beta C_{i+1}^f + (1-\beta)C_i^f - 0.5\beta C_{i-1}^f \quad (41)$$

여기서 β 는 diffusion number로 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = K\Delta t / \Delta x^2 \quad (42)$$

식 (41)은 삼중대각행렬을 구성하는데, 이의 계산을 위해서는 토마스 알고리즘을 사용하였다. Hermite 보간다항식을 사용하는 경우에는 농도의 도함수에 대한 확산방정식을 풀어야 하는데, 여기에서는 식 (3)을 공간에 대해 미분하여 해석하였다.

6. 수치실험

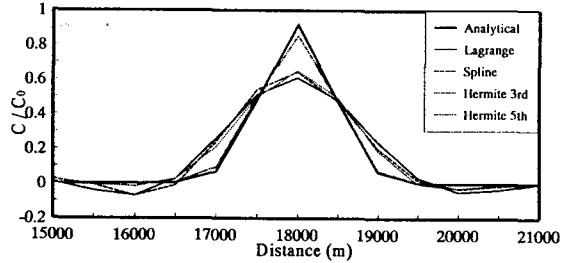
6.1. 등류조건

앞의 4가지 수치모형을 등류조건에 적용하여, 해석해와 비교 및 검토하였다. Δt , Δx , u 와 모의시간은 각각 300초, 500m, 0.5m/sec, 30,000초이다. 종확산계수는 0.5 m²/sec를 적용하였다. 종확산방정식의 확산에 대한 이송의 지배정도를 나타내는 지표인 Peclet number는 다음과 같이 정의된다.

$$Pe = u\Delta x / K \quad (43)$$

본 모의조건은 상기 Peclet number가 500인 경우로서, 이송과정이 지배적인 경우이다.

초기 농도조건은 다음과 같은 Gaussian 분포를 부여하였다.

Fig. 6. Comparison of each method in uniform flow, $Pe = 500$.

$$C(x, 0) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (44)$$

여기서 σ_0 과 x_0 는 400m와 3,000m를 적용하였다. 임의시간 t 에서의 해석해는 다음과 같다.

$$C(x, t) = \frac{\sigma_0}{\sigma_t} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (45)$$

여기서 $\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + 2Kt}$ 이다. 상류 및 하류경계조건으로는 무한경계조건을 부여하였다.

상기 조건에 대한 모의결과를 Fig. 6에 도시하였다. Lagrange 5차, Cubic spline, Hermite 3차 보간다항식을 사용한 경우에는 모두 수치진동 및 수치확산을 보이고 있다. 하지만 Hermite 5차 보간다항식을 사용한 경우에는 거의 해석해와 동일한 결과를 보이고 있으며, 수치진동 및 수치확산이 발생하지 않고 있다.

6.2. 부등류조건

4가지 수치모형을 부등류조건에 대해 적용하였다. 유속분포는 Fig. 7에 도시하였다. 확산이 없고 이송만이 있는 Peclet number가 무한대인 경우에 대한 계산결과를 Fig. 7a)에 도시하였다. Hermite 5

부등류조건에서 종확산방정식의 Eulerian-Lagrangian 모형

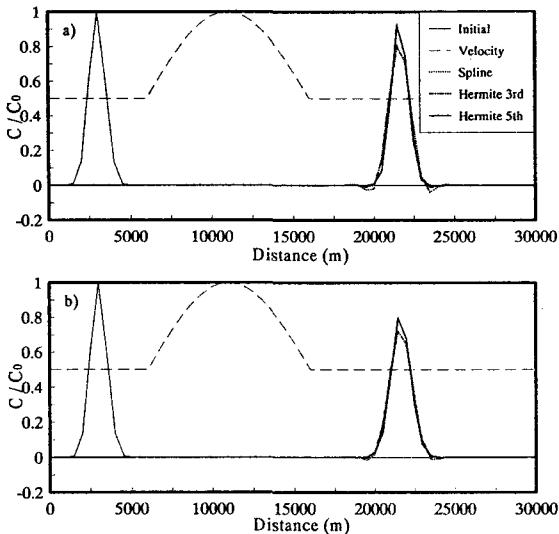


Fig. 7. Comparison of each method in nonuniform flow : a) $Pe = \infty$; b) $Pe = 100$.

차 보간다항식을 사용한 경우에는 거의 오차가 발생하지 않고 있으나, 다른 방법을 사용한 경우에는 수치진동이 심하게 발생하고 있음을 알 수 있다. Fig. 7b)는 Peclet number가 100인 경우로 Peclet number가 무한대인 경우와 대동소이한 결과를 보이고 있다.

7. 결 론

부등류조건에 대해 1차원 종확산방정식을 해석하기 위하여 ELM을 사용하였다. 본 연구에서는 이송방정식을 해석하기 위하여 특성곡선법을 사용하였으며, 확산방정식을 해석하기 위하여 Crank-Nicholson 유한차분법을 사용하였다. 이송방정식을 해석하는데 필요한 보간다항식으로는 Lagrange 5차, Cubic spline, Hermite 3차 및 5차 보간다항식을 사용하였다. 이상 수치해석 방법의 오차해석 및 수치실험 결과는 다음과 같다.

- 1) 오차해석 결과, Hermite 5차 보간다항식을 사용한 경우에 진폭오차 및 위상오차가 최소로 발생하고 있음을 이론적으로 알 수 있었다.
- 2) 이송이 지배적인 혼합과정을 해석하는 경우에, Hermite 5차 보간다항식을 사용하는 경우가 해석해와 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다. 하지만 다른 보간다항식을 사용한 경우에는 수치진동이 크게 발생하였다.
- 3) 일반적으로 Hermite 보간다항식을 사용하는

경우에 좋은 해석결과를 얻을 수 있으나, 농도 및 농도의 도함수에 대한 계산시간이 추가로 필요하게 되어, 계산시간은 다른 방법에 비해 많이 걸리게 된다.

참 고 문 헌

- 1) Leonard, B.P., 1979, A stable accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Eng., 19, 59–98.
- 2) Lee, K. S. and J. W. Kang, 1987, Characteristics of the finite difference approximations for the convective dispersion model, J. of Korean Society of Civil Engineers, 7(4), 147–157.
- 3) Abbott, M.B. and D.R. Basco, 1989, Computational fluid dynamics : An introduction for engineers, Longman Scientific & Technical, London.
- 4) Noye, J., 1987, Numerical methods for solving the transport equation, Numerical Modeling : Application to Marine System, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V., 195–229.
- 5) Holly, F.M., and A. Preissmann, 1977, Accurate calculation of transport in two dimensions, J. Hyd. Div., ASCE, 103(11), 1259–1277.
- 6) Baptista, A.E.M., E.E. Adams, and K.D. Stolzenbach, 1984, Eulerian-Lagrangian analysis of pollutant transport in shallow water, Report No. 296, Ralph M. Parsons Laboratory Aquatic Sciences and Environmental Engineering, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- 7) Yang, J. E. and E. L. Hsu, 1991, On the use of the reach-back characteristics method for calculation of dispersion, International J. for Numerical Methods in Fluids, 12, 225–235.
- 8) Seo, I. W. and D. G. Kim, 1994, Numerical modeling of one-dimensional longitudinal dispersion equation using Eulerian-Lagrangian method, J. of Korea Water Resources Association, 27(2) 155–166.
- 9) Cheng, R.T., C. Vinenzo, and M. Nevil, 1984, Eulerian-Lagrangian solution of the convection-dispersion equation in natural coordinates, Water Resources Research, 20(7), 944–952.
- 10) Holly, F.M., and J.M. Usseglio-Polatera, 1984,

김 대 근 · 서 일 원

- Pollutant dispersion in tidal flow, J. Hyd. Eng.
ASCE, 110(7), 905-926.
- 11) Toda, K., and F.M. Holly, 1986, Hybrid numerical method for linear advection-dispersion, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.
- 12) Jun, K. S. and K. S. Lee, 1993, An Eulerian-Lagrangian hybrid numerical method for the longitudinal dispersion equation, J. of Korean Association of Hydrological Sciences, 26(3), 137-148.
- 13) Jun, K. S. and K. S. Lee, 1994, Eulerian-Lagrangian split-operator method for the longitudinal dispersion equation, J. of Korean Society of Civil Engineers, 14(1), 131-141.
- 14) Kim, D. G., 1995, Modeling transverse mixing in natural channels, Thesis, Seoul National University, Korea.