

# 가격함수에 교차곱항이 포함된 이산시간 LQR의 안정성 여유

## Stability Margin of Discrete-Time LQR with Cross-Product Term in Performance Index

최 재 원, 황 태 현  
(Jaе Weon Choi and Tae Hyun Fang)

**Abstract :** The guaranteed stability margin of LQ optimal regulators with cross-product terms in a performance index is derived for the discrete-time case. In order to obtain the guaranteed stability margin, the singular value of the return difference matrix is examined. A numerical simulation is provided to demonstrate the validity of the derived stability margin.

**Keywords :** discrete-time, LQR, cross-product term, guaranteed stability margin

### I. 서론

표준 LQR (Linear Quadratic Regulator)은 기본적으로 안정하며 비교적 큰 안정성 여유(stability margin)를 보장한다[1]. 대상 시스템의 파라미터 변동이나 부정확한 모델링 등에 의한 오차요인이 존재하더라도 LQR은 보장된 이득여유와 위상여유로 인하여 시스템을 안정하게 유지할 수 있다. 그러나 가격함수(performance index)에 교차곱항(cross-product term)을 가지는 LQR은 표준 LQR과 같은 안정성 여유를 보장하지 못한다. 이러한 가격함수에 교차곱항을 가지는 LQR의 안정성 여유는 적절한 충분조건을 가정함으로써 계산될 수 있다[2].

이산 시간(discrete-time) 시스템에서 고려되는 표준 LQR의 안정성 여유는 귀환차 행렬(return difference matrix)의 특이값(singular value)을 분석함으로써 계산될 수 있다[3]. 연속 시간 시스템에서는 상태변수와 제어입력 사이의 교차곱항이 표준 LQR의 안정성 여유를 감소시키기 때문에 이산 시간 시스템에서도 이러한 교차곱항이 안정성 여유를 감소시킬 것이라는 것을 예상할 수 있다. 그러나 가격함수에 교차곱항을 가지는 이산 시간 LQR(Discrete-time Linear Quadratic Regulator with Cross-Product Term: DLQRCPT)이 보장하는 안정도 여유에 대한 분석은 아직까지 이루어지지 않고 있다. 본 논문에서는 DLQRCPT가 보장하는 안정성 여유를 유도하고자 한다.

최근에 플랜트의 입출력부에 제한된 통신 자원을 가지는 시스템의 제어에 대한 관심이 제어기 설계자 사이에 증대되고 있다[4]. 이것은 설계된 제어기가 실제로 구현될 때 제어기가 디지털 컴퓨터에 의해 구현되며, 현실적인 제약 때문에 제어기와 플랜트간의 통신이 무한한 대역폭을 가질 수 없기 때문에 필요하다. 연속 시간에서 운동 방정식이 정의되고 LQR이 설계되었을 때, 근사화 없이 이를 이산화 시키

면 필연적으로 가격함수에 교차곱항을 포함하게 된다[5]. 본 연구는 제한된 통신 자원을 가지는 시스템에서의 최적 제어 문제[4]를 분석하는 과정에서 파생되었다. 예를 들어, 지능형 교통 시스템에 관한 주요 연구 주제 중 하나로 도로상의 수많은 차량을 하나의 중앙 관제소에서 무선 통신을 통하여 원격으로 제어해야 하는 문제를 설정할 수 있는데, 이 경우 중앙 관제소는 각 차량에 순차적으로 입력신호를 전달해야 한다. 하지만 중앙 관제소 통신시설의 대역폭이 모든 차량에 대해 동등한 기회를 가지고 신호를 전달할 정도로 충분하지 않다면 차량의 제어에 문제가 발생할 수 있다. 이때, 통신 자원의 효과적인 분배 문제를 해결하기 위해서는 제어 시스템의 이산화는 필수적이며, 특히 LQR 제어 시스템은 교차곱항을 포함하게 된다. 본 연구는 앞으로 이러한 시스템의 안정성 해석에 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

### II. 배경 지식

다음과 같이 주어지는 이산 시간 선형 시불변 상태공간 표현에 대한 최적 제어 문제를 고려해 보자.

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (1)$$

여기서,  $x_i$ 는 시간  $i$ 에서의 상태변수 벡터이고  $u_i$ 는 제어 입력 벡터이다. 이때 최적 제어입력을 구하기 위한 가격함수가 다음과 같이 주어진다고 가정한다.

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} [x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2x_i^T N u_i] \quad (2)$$

여기서,  $R > 0$  이고  $Q - NR^{-1}N^T \geq 0$ 이라고 가정한다. 또한  $SS^T = Q - NR^{-1}N^T$ 을 만족하는  $S$ 에 대하여  $(A, B)$ 가 안정가능(stabilizable)하고  $(S, A - BR^{-1}N^T)$ 이 검출가능(detectable)하면 폐루프 시스템을 안정화시키는 최적 제어입력은 다음과 같이 구해질 수 있다[6].

$$u_i = -Kx_i \quad (3)$$

여기서,  $K$ 는 다음과 같이 주어지는 폐루프 이득 행렬을

나타낸다.

$$K = (R + B^T P B)^{-1} (B^T P A + N^T) \quad (4)$$

행렬  $P$ 는 다음과 같은 이산 시간 대수 행렬 Riccati 방정식(discrete-time algebraic matrix Riccati equation: DARE)을 만족하는 양의 한정(positive definite) 전치행렬이다.

$$P = A^T P A + Q - (N^T + B^T P A)^T \times (R + B^T P B)^{-1} (N^T + B^T P A) \quad (5)$$

폐루프 시스템 행렬의 고유값은 다음과 같은 귀환차 행렬의 영점이 된다.

$$F(z) = I + K(zI - A)^{-1} B \quad (6)$$

이산 시간 LQR 제어기의 보장된 안정성 여유를 구하기 위한 기본적인 조건은 다음의 부등식을 만족하는 양의 스칼라 값인  $R_F$ 가 존재한다는 것이다.

$$\underline{\sigma}(F(z)) \geq R_F > 0, \quad \text{for all } |z| = 1 \quad (7)$$

여기서,  $\overline{\sigma}(F)$ 과  $\underline{\sigma}(F)$ 은 각각  $F$ 의 최대 특이값과 최소 특이값을 나타낸다. 이때, LQR의 보장된 이득여유(Gain Margin: GM)는 다음과 같이 주어진다[1].

$$GM = (1 \pm R_F)^{-1} \quad (8)$$

그리고 위상여유(Phase Margin: PM)는 다음과 같이 주어진다.

$$PM = \pm \cos^{-1} [1 - R_F^2/2] \quad (9)$$

따라서, DLQRCPT에 대한 안정성 여유를 구하는 문제는 결국  $R_F$ 를 구하는 문제로 귀착된다.

### III. DLQRCPT의 안정성 여유

II장에서 주어진 DARE와 귀환차 행렬을 이용하여 주파수역 등가식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

DLQRCPT에 대하여 다음과 같은 주파수역 등가식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & F^T(z^{-1})(R + B^T P B)F(z) \\ &= R + B^T(z^{-1}I - A)^{-T} Q(zI - A)^{-1} B \\ & \quad + B^T(z^{-1}I - A)^{-T} N + N^T(zI - A)^{-1} B + N^T Q^{-1} N \\ &= R - N^T Q^{-1} N + \{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \quad \times Q\{Q^{-1} N + (zI - A)^{-1} B\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $N$ 이 영행렬이면 (10)은 표준 이산 시간 LQR의 주파수역 등가식과 같아진다. 그러나 DLQRCPT에서는 교차곱항에 대한 가중치 행렬이 영이 아니므로 DLQRCPT의 안

정성 여유는 표준 이산 시간 LQR이 보장하는 안정성 여유와 일치하지 않게 된다. 또한 (10)에서는  $Q$ 의 역행렬이 존재하는 것으로 가정하였는데, 이산화된 시스템에서 이러한 가정은 일반적으로 무리한 가정이 아니다.

DLQRCPT에 대한 안정성 여유를 유도하기 위하여 먼저 교차곱항이 없는 이산 시간 LQR의 안정성 유도에서 정의된 다음의 세가지 경우[3]를 고려한다.

(경우 1) 주어진 시스템 (1)이 점근적으로 안정하고  $\overline{\sigma}(A) < 1$ 을 만족한다.

(경우 2) 주어진 시스템이 점근적으로 안정하고  $A$ 의 모든 고유값이 서로 다르며 (distinct),  $\overline{\sigma}(A) \geq 1$ 을 만족한다.

(경우 3)  $A$ 의 모든 고유값이 서로 다르고 고유값 중 어떠한 것도 단위원상에 존재하지 않으며 어떤 고유값은 단위원 밖에 존재한다. 또한 단위원 밖에 있는 고유값이 단위원 안에 있는 고유값의 역수가 아니다.

위의 세가지 경우에 대하여 다음과 같은 정리 1이 성립한다.

정리 1 : DLQRCPT에 대하여  $D = R - N^T Q^{-1} N > 0$ 이 성립한다고 할 때, 단위원 상에 있는  $z$ 에 대하여 귀환차 행렬의 최소 특이값은 다음과 같은 하한(lower bound)  $R_F$ 를 가진다.

$$R_F^2 = \frac{\overline{\sigma}^2(\overline{D})}{\overline{\sigma}(R) + \overline{\sigma}^2(B)\delta} \quad (11)$$

여기서,  $\delta$ 는 가격 행렬  $P$ 의 최대 특이값의 상한(upper bound)에 대한 추정값을 나타내며 위에서 정의한 세가지 경우에 대하여 각각 다음과 같다.

$$\delta = \begin{cases} \overline{\sigma}(Q) [1 - \overline{\sigma}^2(A)]^{-1} & \text{for Case 1} \\ \overline{\sigma}(Q) [1 - \overline{\alpha}^2]^{-1} & \text{for Case 2} \\ [\overline{\sigma}(Q) + \gamma^2] [1 - \widehat{\alpha}^2]^{-1} & \text{for Case 3} \end{cases} \quad (12)$$

여기서,  $\overline{\alpha}$ 는  $A$ 의 고유값 중에서 최대 절대값이고,  $\gamma$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \overline{\sigma}(V_2) \overline{\sigma}(V_2 B)^{-1} \underline{\sigma}^{-1}(A_2) \overline{\sigma}(R) \\ & \quad \times (\overline{\alpha}^2 - 1) \underline{\sigma}^{-1/2}(R) \underline{\sigma}^{-2}(B^T V_2^H) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $A_2$ 는 단위원 밖에 있는  $A$ 의 고유값만으로 대각화한 행렬을 나타내고  $V_2$ 는  $A_2$ 에 연관된 고유벡터를 나타낸다. 위첨자로 사용된  $H$ 는 Hermitian 전치(transpose)를 나타낸다. 그리고  $\widehat{\alpha}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\widehat{\alpha} \equiv \max \{ \alpha_m, 1/\alpha_m \} \quad (14)$$

여기서,  $\alpha_m$ 은 단위원 안에 있는  $A$ 의 고유값 중에서 최대 절대값을 나타내고,  $\alpha_m$ 은 단위원 안에 있지 않는

A의 고유값 중에서 최소값을 나타낸다. (11)의  $\bar{D}$ 는 D를 Cholesky 분해함으로써 얻을 수 있는 상삼각 행렬(upper triangular matrix)이다.

증명 : (10)으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$(R + B^T P B) = F^{-T}(z^{-1})[R - N^T Q^{-1} N + \{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}]F^{-1}(z) \quad (15)$$

부등식  $0 \leq \alpha(T)\bar{\sigma}^2(W) \leq \bar{\sigma}(W^T T W)$ 이 성립하므로, (15)의 우변 항에 대한 다음의 부등식이  $|z|=1$ 에 대해 성립한다.

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}[F^{-T}(z^{-1})[R - N^T Q^{-1} N \\ & + \{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}]F^{-1}(z)] \\ & \geq \bar{\sigma}^2[F^{-1}(z)]\alpha[R - N^T Q^{-1} N \\ & + \{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}] \end{aligned} \quad (16)$$

가정에 의해  $D = R - N^T Q^{-1} N$ 은 대칭인 양의 한정 행렬이다. 따라서, D에 대한 Cholesky 분해를 실시하면  $D = \bar{D}^T \bar{D}$ 를 만족하는 상삼각 행렬  $\bar{D}$ 를 구할 수 있다. 따라서, (16)의 우변에서  $R - N^T Q^{-1} N$ 을 상삼각 행렬  $\bar{D}$ 로 대체할 수 있다. 또한 특이값에 대한 관계식  $\alpha(I + W^H W) = 1 + \alpha(W^H W)$ 을 적용하면, (16)의 우변에 대한 다음과 같은 부등식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}^2[F^{-1}(z)]\alpha[R - N^T Q^{-1} N \\ & + \{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}] \\ & \geq \bar{\sigma}^2[F^{-1}(z)]\alpha^2(\bar{D}) \\ & \times \alpha[I + \bar{D}^{-T}\{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}\bar{D}^{-1}] \\ & = \bar{\sigma}^2[F^{-1}(z)]\alpha^2(\bar{D}) \\ & \times [1 + \alpha[\bar{D}^{-T}\{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}\bar{D}^{-1}]] \end{aligned} \quad (17)$$

또한 특이값에 대한 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\bar{\alpha}[F^{-1}(z)] = \alpha^{-1}[F(z)] \quad (18)$$

최종적으로 (15)에 (16), (17), 그리고 (18)을 대입하여 정리하면 귀환차 행렬의 최소 특이값에 대한 다음과 같은 부등

식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha^2[F(z)] & \geq \frac{\alpha^2(\bar{D})}{\alpha(R) + \alpha^2(B)\alpha(P)} \\ & \times [1 + \alpha[\bar{D}^{-T}\{B^T(z^{-1}I - A)^{-T} + N^T Q^{-1}\} \\ & \times Q\{Q^{-1}N + (zI - A)^{-1}B\}\bar{D}^{-1}]] \end{aligned} \quad (19)$$

$\bar{\sigma}(P)$ 에 대한 상한은 Lyapunov 방정식에 의해 결정될 수 있는데, 본 논문에서는 참고문헌 [3]의 결과를 이용하여 (12)의  $\delta$ 로 대체한다. 따라서, (19)의 우변에서  $[1 + \alpha \cdot ]$ 의 값은 1보다 크기 때문에 증명은 완료된다.

IV. 예제

III장에서 제안된 DLQRCPT의 안정성 여유 결정 기법을 시험하기 위해 그림 1에 도시된 수중 운동체의 심도제어 시스템을 고려해보자.

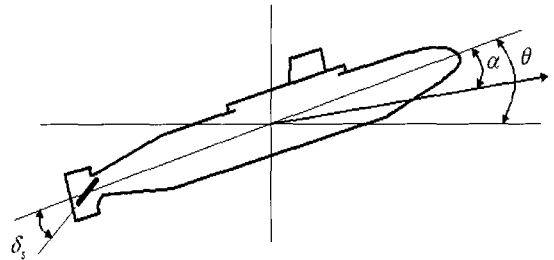


그림 1. 잠수함의 심도제어 시스템.  
Fig. 1. Depth control system for submarine.

$$\dot{x}^c(t) = A^c x^c(t) + B^c u^c(t) \quad (20)$$

여기서, 상태벡터는  $x^c(t) = [\theta \ \dot{\theta} \ \alpha]^T$ 이고 제어입력을  $u^c(t) = \delta_s(t)$ 이다. 시스템 행렬  $A^c$ 와 입력 행렬  $B^c$ 는 각각 다음과 같다[7].

$$A^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.007 & -0.111 & 0.12 \\ 0 & 0.07 & -0.3 \end{bmatrix}, B^c = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.095 \\ 0.072 \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서, 위첨자 c는 연속 시간 시스템을 나타내기 위해 첨가되었다. 샘플링 주기를  $T_s = 0.01 \text{ sec}$ 라고 할 때, 가정에 의한 근사화 없이 (20)을 이산화하면 시스템 행렬과 입력 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} A & = \begin{bmatrix} 1 & 9.9945 \times 10^{-3} & 5.9918 \times 10^{-6} \\ 6.9961 \times 10^{-5} & 0.9989 & 1.1975 \times 10^{-3} \\ -2.4467 \times 10^{-8} & 6.9856 \times 10^{-1} & 0.997 \end{bmatrix}, \\ B & = \begin{bmatrix} -4.7468 \times 10^{-6} \\ -9.4904 \times 10^{-4} \\ 7.1859 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

$R^c$ 와  $Q^c$ 를 샘플링 주기  $T_s$ 에 대하여 이산화하는 식은 다음과 같다.

$$Q = \int_0^{T_s} (e^{A^c t})^T Q^c e^{A^c t} dt \quad (23)$$

$$R = \int_0^T (\bar{B}(t))^T Q^c \bar{B}(t) + R^c dt \quad (24)$$

$$N = \int_0^T (e^{A^t})^T Q^c \bar{B}(t) dt \quad (25)$$

$$\bar{B}(s) = \int_0^s e^{A^t} B^c dt \quad (26)$$

(25)로부터 교차공항에 직접적인 영향을 주는 설계 파라미터는  $Q^c$ 라는 것을 알 수 있다.  $N^T N$ 의 크기가 다양한 상황에서 안정성 여유를 검사하기 위하여, 입력 가중 행렬은  $R^c = 1$ 로 고정하고 상태 가중 행렬은  $Q^c = \text{diag}(\beta, 1, 1)$ 로 선정한다. 여기서,  $\beta$ 는 5개의 요소로 구성된 집합  $\{10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$ 이다.

정리 1을 이용하면 주어진 예제에 대한 이득여유와 위상여유를 구할 수 있다. 그림 2는 제안된 방법에 의해 구한 이득여유와 단위원 상에 있는 모든  $z$  값을 대입하여 구한 정확한 이득여유를  $\beta$ 에 따라 각각 나타내고 있다.

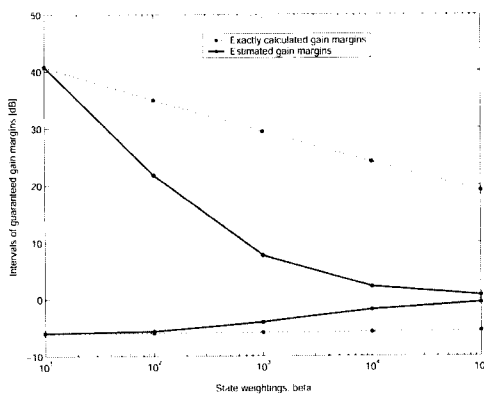


그림 2. DLQRCPT의 계인여유.  
Fig. 2. Gain margins of DLQRCPT.

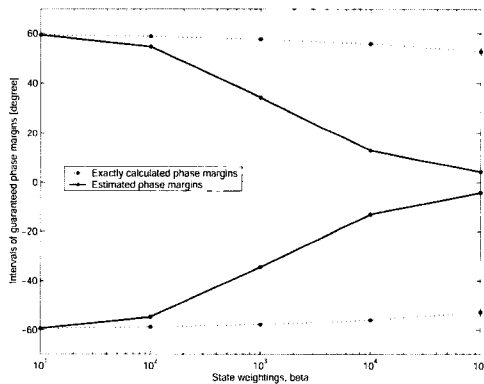


그림 3. DLQRCPT의 위상여유.  
Fig. 3. Phase margins of DLQRCPT.

그림 2에서 세로축은 이득여유를 나타내고 가로축은 적용된 상태가중 행렬의  $\beta$ 를 나타낸다. 동일한  $\beta$ 에 대한 두 개의 실선 상의 두개의 점은 각각 추정된 이득여유의 상한(위)과 하한(아래)을 나타낸다. 같은 형식으로 두 점선 상의 두개의 점은 각각 정확히 계산된 이득여유의 상한과 하한

을 나타낸다. 그림에서는 정확히 계산된 이득여유의 하한이 추정된 이득여유의 하한과 거의 일치하고 있다. 그림 3은 제안된 방법에 의해 구한 위상여유와 단위원 상에 있는 모든  $z$  값을 대입하여 구한 정확한 위상여유를 그림 2와 동일한 방법으로 나타내고 있다. 그림의 결과는 정확히 계산된 안정성 여유에 비해 제안된 방법에 의해 구해진 안정성 여유의 범위가 많이 감소되었음을 알 수 있다. 주어진 예제에서는 가격 행렬  $P$ 의 최대 특이값의 상한에 대한 추정값의 부정확성은 크지 않은 것으로 판명되었다. 오히려 (19)의 우변의  $[1 + \alpha \cdot \cdot]$ 을 1로 가정하여 생긴 오차가 큰 비중을 차지하였다. 결론적으로 (10)의 주파수역 등가식을 재구성하여 (19)의 우변의  $[1 + \alpha \cdot \cdot]$ 에 대한 보수성을 축소한다면 보다 정확한 안정성 여유를 획득할 수 있을 것으로 판단되며, 이러한 문제는 향후 연구 과제로 남아있다.

### V. 결론

본 논문에서는 가격함수에 교차공항을 가지는 이산 시간 LQR이 보장하는 안정성 여유를 유도하였다. 안정성 여유는 귀환차 행렬의 최소 특이값을 알고 있다면 직접적으로 계산될 수 있다는 점에 착안하여 귀환차 행렬의 특이값을 조사하여 구해졌다. 이를 위해서 적절한 충분조건을 가정하여 주파수역 등가식에서 귀환차 행렬에 대한 부등식을 유도하고 이를 통하여 귀환차 행렬의 최소 특이값에 대한 하한을 추정하였다. 제안된 안정성 여유 추정 방법은 수중 운동체의 심도 제어 시스템 예제를 통하여 검증되었다.

예제를 통하여 확인한 바에 의하면, 유도 과정에서 도입된 보수적인 가정으로 인하여 추정된 안정성 여유는 실제 값에 비해 다소 감소되었음을 확인할 수 있었다. 그러나 DLQR과 같이 DLQRCPT에서도 모든 주파수 영역에서 안정성 여유를 검사해보지 않고 시스템의 행렬  $A$ ,  $B$ 와 가중 행렬  $Q$ ,  $R$ ,  $N$ 만을 이용하여 안정성 여유를 근사적으로 그리고 직접적으로 추정할 수 있게 되었다. 마지막으로 본 논문에서 제안하는 안정성 여유의 보수성을 축소하는 문제는 향후 연구 과제로 남아있다.

### 참고문헌

- [1] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell, Jr., and M. Athans, "Robustness results in Linear-Quadratic gaussian based multivariable control designs," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 1, pp. 75-92, February 1981.
- [2] D. Chung, T. Kang, and J. G. Lee, "Stability robustness of LQ optimal regulators for the performance index with cross-product terms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-39, No. 8, pp. 1698-1702, August 1994.
- [3] U. Shaked, "Guaranteed stability margins for the Discrete-Time linear quadratic optimal regulator," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 2, pp. 162-165, February 1986.
- [4] H. Rehlinger and M. Sanfridson, "Scheduling of a limited communication channel for optimal control," *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision*

and Control, pp. 1011-1016, December 2000.

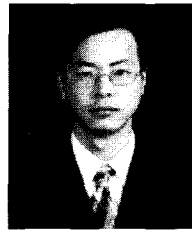
- [5] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall, 1990.
- [6] V. Kučera, *Analysis and Design of Discrete Linear Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall, 1990.

[7] V. Kučera, *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice-Hall, 1991.

- [8] 김종식, 한명철, 이민철, 최자원, 제어시스템설계, 청문각, pp. 596-597, 1998.

### 최재원

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 8 권 제 5 호 참조



### 황태현

1969년 5월 10일 출생. 1994년 부산대학교 기계공학과 졸업. 1994~1997년 울산 현대중공업 기계설계. 동대학원 기계공학부 석사(1999). 1999년~현재 동대학 기계공학부 박사과정. 관심분야는 표적 추적 필터, 센서 융합, 자동 차량/도로 시스템, 선형 시스템의 최적 스위칭.