

전 속도영역 유동을 위한 비정렬격자 압력기반해법

최형일* · 이도형** · 맹주성†

(2002년 2월 26일 접수, 2002년 8월 13일 심사완료)

Unstructured Pressure Based Method for All Speed Flows

Hyung-il Choi, Dohyung Lee and Joo-sung Maeng

Key Words: Pressure Based Method(압력기반해법), SIMPLE Algorithm(SIMPLE 알고리즘), Node Centered Scheme(격자점 중심법), Unstructured Grid(비정렬격자)

Abstract

This article proposes a pressure based method for predicting flows at all speeds. The compressible SIMPLE algorithm is extended to unstructured grid framework. Convection terms are discretized using second-order scheme with deferred correction approach. Diffusion term discretization is based on structured grid analogy that can be easily adopted to hybrid unstructured grid solver. This method also uses node centered scheme with edge based data structure for memory and computing time efficiency of arbitrary grid types. Both incompressible and compressible benchmark problems are solved using the above methodology. The demonstration of this method is extended to slip flow problem that has low Reynolds number but compressibility effect. It is shown that the proposed method can improve efficiency in memory usage and computing time without losing any accuracy.

1. 서론

유체 유동을 해석하기 위한 수치기법은 크게 밀도기반 해법과 압력기반 해법으로 나눌 수 있다. 밀도기반 해법은 주로 고속의 압축성 유동을 그리고, 압력기반 해법은 비압축성 유동을 해석하기 위해 널리 이용되어 왔다. 그러나, 압축성 유동에서 나타나는 저속영역의 수렴성 문제, 또는 매우 느린 저속 유동이나 압축성효과를 무시할 수 없는 유동의 해석 문제 등을 해결하기 위해서는 전 속도 영역을 해석할 수 있는 일관된 수치기법이 필요하다. 따라서, 이를 위한 연구가 밀도기반 알고리즘과 압력기반 알고리즘에 대해

공히 수행되어 오고 있다.

먼저 밀도기반 알고리즘⁽¹⁻³⁾은 저속유동에 적용될 경우 밀도와 압력의 연계성(coupling)이 약화되어 쌍곡선형 미분 방정식계의 장점을 잃게 될 뿐만 아니라 시간전진법의 적용이 불가능해진다. 따라서, 이러한 단점을 극복하기 위하여 인공 압축성 알고리즘⁽⁴⁾이 개발되었다. 그러나, 이 기법도 최적의 수렴속도를 위해 인공압축성계수를 찾아야 하는 작업이 요구되며 최적화에 한계가 있다.^(5,6) 또한, 이 기법은 비압축성 유동을 해석하는 방법으로써 압축성 효과가 공존하는 영역을 동시에 해석할 수 없다. 이후, 수렴성을 향상시키며 시간전진 알고리즘을 적용시킬 수 있는 국소 예조건화 기법에 관해 연구가 진행되고 있다.^(7,8)

반면, 압력기반 알고리즘은 밀도장 대신 압력장을 계산하는 방법으로 비압축성 유동을 계산하기 위해 개발되어 왔으며 널리 적용되었다.⁽⁹⁻¹³⁾ 이 기법은 또한 압축성 유동 영역까지 해석할 수 있도록 확장되었는데, 이에 대한 연구는 주로 정렬격자에 대해 이루어져 왔다.⁽¹⁴⁻¹⁶⁾ 그러나, 이 기법은 복잡한 형상을 가지는 유동 영역을 해석할

* 회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 한양대학교 기계·정보경영학부

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : jsmaeng@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0439 FAX : (02)2298-4634

경우 양질의 격자를 생성하는 데 한계가 있으며, 이를 해결하기 위해서는 다중영역법 등을 사용해야 한다. 또한, 이 경우에도 영역 경계에서의 물성량의 보간과 이에 따른 해의 수렴성과 정확도의 저하 등의 어려움이 있다. 따라서, 이러한 어려움 없이 복잡한 유동장에 적용이 용이한 전 속도영역을 위한 비정렬격자 해석 기법이 필요하다. 이에 대해서는 Lien⁽¹⁷⁾이 압축성 유동까지 해석할 수 있는 비정렬격자 압력기반 해법을 최근 연구하였으며, 그는 여기에서 비엇갈림격자계에 대해 셀 중심법과 셀 중심 자료구조를 적용하였다. 그러나, 해석 영역이 클 경우에 기억장소와 연산의 효율성 면에서 개선의 여지를 갖고 있다.

이와는 달리 모서리 자료구조^(18,19)를 적용한 격자점 중심법은 기억장소의 절약과 연산의 효율성에서 우수하여 비정렬격자 밀도기반 알고리즘에서 널리 쓰여왔다. 따라서, 본 연구에서는 모서리 자료구조를 적용한 격자점 중심법을 압력기반해법에 새롭게 도입하였으며, 이를 바탕으로 하여 전 속도영역을 해석할 수 있는 비정렬격자 해법을 제안하였다. 먼저, 분리형 압력기반 해법에 격자점 중심법을 도입할 경우와 기존의 셀 중심법을 적용할 경우에 대해 기억장소와 연산의 효율성에 대해 연구하였다. 그리고, 이를 이용하여 비정렬 혼합격자에 적합한 이산화 과정을 제시하였다. 압력수정 단계에 대해서는 확장된 SIMPLE 기법을 적용하였고, 속도와 압력의 분리를 해결하기 위해서 널리 알려진 Rhie and Chow 보간법⁽²⁰⁾을 적용하였다. 또한 각각의 제어체적의 해의 분포를 선형으로 가정하여 비가중 최소자승법⁽¹⁹⁾을 이용하여 해를 재구성하였다. 대류항은 2차 정확도를 갖는 중앙차분법을, 확산항은 혼합격자에 대해서도 어려움 없이 적용할 수 있도록 유사정렬격자기법을 도입하였다.⁽²¹⁾ 제안된 기법을 이용하여 비압축성 유동과 압축성 유동에 대해 수치계산을 수행하였다. 또한 Reynolds수는 아주 작으나 압축성 효과가 나타나는 MEMS 유동의 대표적인 문제인 미소채널(microchannel flow)⁽²²⁻²⁶⁾에 대해 수치계산을 수행하였으며, 계산결과를 기존의 연구결과와 비교하여 타당성을 검증하였다.

2. 지배방정식

질량, 운동량, 에너지에 대한 적분형 2차원 정

상 보존 방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS - \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1)$$

여기에서 \mathbf{F} 는 대류플럭스 벡터이고, \mathbf{G} 는 점성 플럭스 벡터이다. 각각의 항을 직교좌표계에 대해 무차원 형태로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j}; \mathbf{G} = \frac{1}{Re} (f_v\mathbf{i} + g_v\mathbf{j}). \quad (1a)$$

$$f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u h_0 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v h_0 \end{pmatrix}; \quad (1b)$$

$$f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_x - q_x \end{pmatrix}; g_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_y - q_y \end{pmatrix}.$$

여기에서, ρ 는 유체의 밀도, p 는 정압, u 와 v 는 직교좌표계에서 각각 x 방향과 y 방향의 속도 성분이다. h_0 는 전 엔탈피를 의미하며 Re 는 레이놀즈수를 나타낸다. τ 는 점성소산항이고, q 는 열확산항이 된다. 여기에서 압력수정기법을 사용하게 되면, 첫 번째 행으로 표시되는 연속방정식은 압력수정방정식으로 변환된다. 완전가스로 가정하면 상태방정식은 다음과 같은 관계식을 사용할 수 있다.

$$p = \rho RT. \quad (2)$$

3. 유한체적 이산화

3.1 일반 수송방정식

식 (1)은 다음과 같은 일반적인 형태로 나타낼 수 있다.

$$\int_S \rho \mathbf{v} \phi \cdot \mathbf{n} dS - \int_S \lambda_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = S_\phi. \quad (3)$$

여기에서 ϕ 는 종속변수 u, v, h_0 를, λ_ϕ 는 무차원화된 확산계수, 그리고 S_ϕ 는 원천항을 나타낸다. 운동량방정식에서, 이 원천항은 속도구배항과 압력항, 그리고 체력항을 포함하고, 연속방정식도 확산항이 없는 형태의 식 (3)으로 표현되어질 수 있는데, 압력수정방정식을 도출하는 데 이용되어진다.

3.2 해석영역의 이산화

제어체적을 구성하는 방법은 크게 셀 중심법과 격자점 중심법으로 나뉘어진다. 격자점 중심법의 특징은 적분체적을 구성하는데 격자의 형태에 관계없이 자유롭게 구성되어지며, 격자의 찌그러짐이 심하더라도 제어경계면의 중심이 셀 중심법에 비해 더 경계의 중앙이 된다. 즉, 경계에서의 플럭스 계산이 일반적으로 셀 중심법에 비해 더 정확해질 수 있다. 또한, 경계조건이 Dirichlet condition일 때 셀 중심법은 경계를 따로 처리해야 하나, 격자점 중심법은 특별한 처리 없이 직접 부과할 수 있다.

격자의 기억장소의 관점에서 보면 격자가 모두 사각형 요소로 이루어지지 않았다면, 셀 중심법의 제어체적의 갯수가 격자점 중심법의 제어체적의 갯수보다 크다. 만약 모두 삼각형 요소로 이루어져 있고 경계에서의 영향을 무시한다면, 셀 중심법의 제어체적의 갯수가 격자점 중심법의 제어체적의 갯수의 2배가 된다. 이것은 계산하려는 실수변수의 기억장소가 2배로 늘어남을 의미한다. 3차원의 경우, 사면체의 잘 생성된 격자를 사용할 경우 셀의 갯수는 격자점 갯수의 5-6배가 된다. 따라서, 3차원의 경우에 연산량과 기억장소 면에서 격자점 중심법이 월등히 우월하다. 분리형 알고리즘의 경우 필요한 실수 메모리의 양은 회소행렬과 변수의 갯수가 지배적인 인자이므로 2차원에 대해서 비교하면 Table 1과 같다. Table 1에서 a 는 플럭스를 계산하는 경계면의 수이다. 따라서 삼각형 요소에서는 3, 사각형 요소에서는 4이다. 하나의 예로써 격자가 모두 양질의 삼각형 요소로 이루어져 있고, 비압축성 비점성 계산이며 경계에서의 영향을 무시한다고 가정하면, $a = 3$, $N(\text{variable}) = 3$, $N(\text{element}) \sim 2 \times N(\text{vertex})$ 개가 되므로, 필요한 실수 기억장소는 셀 중심법의 경우 $14 \times N(\text{vertex})$ 이 되고 격자점 중심법의 경우 $10 \times N(\text{vertex})$ 로 훨씬 작게 된다.

Fig. 1은 격자점 중심법에서 격자점 o 를 중심으로 하는 제어체적을 의미한다. 여기에서 격자점 o 와 j 는 하나의 모서리를 나타내는 두 점이 되며, 셀의 경계들은 메디안 형태로 구성된다.^(18,19) 하나의 모서리를 포함하는 주 격자의 도심과 모서리의 중점을 연결한 선을 격자점 o 에 대하여 모두 표현하면 Fig. 1의 점선으로 표현된 제어경계면이 구성된다. Fig. 2는 하나의 제어경계면을 포함하는 메디안셀(median dual cell)을 나타낸 것이다.

경계에서의 플럭스는 이 모서리를 기준으로 계산하며, 모든 모서리에 대해 플럭스를 계산해 나가면 전 해석영역에 대해 플럭스를 계산한 것이 된다. 위와 같이 모서리를 중심으로 플럭스를 계산하는 방법을 격자점 중심법과 결합하여 사용할 경우 기억장소와 플럭스의 계산량을 크게 줄일 수 있으며, 혼합 비정렬격자에도 쉽게 적용할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 격자점 중심법과 하나의 모서리를 기준으로 플럭스를 한번 계산하는 방법을 적용하였다. 여기에서 경계면의 길이벡터는 두 조각의 경계면의 길이벡터의 면적 평균값이 된다.⁽¹⁸⁾

Table 1 Memory requirements for cell centered scheme and node centered scheme

	Cell centered scheme	Node centered scheme
Sparse matrix	$(a+1) \times N(\text{element})$	$7 \times N(\text{vertex})$
variables	$N(\text{variable}) \times N(\text{element})$	$N(\text{variable}) \times N(\text{vertex})$

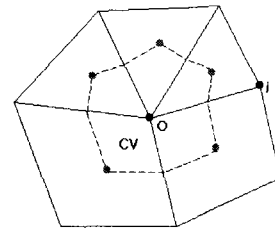


Fig. 1 Cell vertex CV

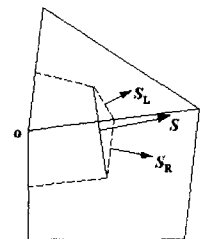


Fig. 2 Median dual cell interface

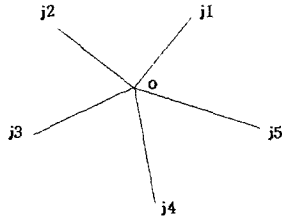


Fig. 3 Neighbouring nodes for reconstruction of variables

3.3 해의 재구성 기법

격자점 중심법에서 제어체적의 중심이 점 o 와 차이가 있으나 유한체적법에서 중심 o 에서의 값을 셀의 대표값으로 하였다. 이 셀의 값이 공간에 대해 2차 이상의 정확도를 유지하기 위해서 해의 재구성^(18,19,21)이 필요하기 때문에 여기에서는 수치적으로 안정적이어서 비교적 많이 쓰이는 비가중 최소자승법⁽¹⁹⁾을 이용하였다. 이웃점의 값은 다음과 같이 점 o 에서의 값과 구배로 나타낼 수 있다(Fig. 3).

$$\phi_j = \phi_o + \phi_{x_0}(x_j - x_o) + \phi_{y_0}(y_j - y_o). \quad (4)$$

이것을 전 이웃점에 대하여 행렬의 형태로 쓰면 과결정(over-determined) 선형연립방정식이 된다.

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_N & \Delta y_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{x_0} \\ \phi_{y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 - \phi_o \\ \phi_2 - \phi_o \\ \vdots \\ \phi_N - \phi_o \end{pmatrix}. \quad (5)$$

식 (5)를 풀기 위하여, Modified Gram-Schmidt 직교화⁽²⁷⁾를 이용하였다. 행렬을 직교분해하면,

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}. \quad (6)$$

여기에서 \mathbf{Q} 는 직교행렬이고, \mathbf{R} 은 상삼각행렬이 된다.

3.4 대류항의 이산화

대류항은 다음과 같이 질량플럭스와 셀 경계면의 해의 곱으로 근사시킬 수 있다.

$$\int_S \rho \mathbf{v} \phi \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j F_j \phi_j. \quad (7)$$

하나의 j 경계면에 대하여 2차 정확도의 이산화 기법은 다음과 같이 경계면 좌우의 값을 평균하여 사용한다.

$$F_j \phi_j = F_j \cdot \frac{1}{2} \left[\left\{ \phi_{P_0} + \gamma \nabla \phi_{P_0} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{P_0}) \right\} + \left\{ \phi_{P_j} + \gamma \nabla \phi_{P_j} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{P_j}) \right\} \right].$$

(8)

여기에서 γ 는 이완계수로 0이면 좌우 셀 대표값의 선형보간이 되고, 1이면 셀 경계면 좌우 값의 중앙차분법이 된다. 이산화된 선형계의 대각선지배성을 향상시키기 위해서 지연수정법을 이용하여 이산화하였다.⁽²¹⁾ 지연수정법은 대류항의 이산화시에 1차의 흐름차분법은 \mathbf{A} 행렬의 계수로 들어가게 하고, 고차항과 1차항과의 차는 원천항(즉, b)에 들어가게 하는 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_j \phi_j = F_j \phi^{UDS} + F_j (\phi^{HIGH} - \phi^{UDS})^{old}. \quad (9)$$

여기에서 상첨자 UDS 는 1차의 흐름차분법, $HIGH$ 는 2차 이상의 고차차분법을 나타낸다. 그리고, 우변의 첫째항은 내재적으로 \mathbf{A} 의 계수에 포함되고 둘째항은 외재적으로 원천항에 포함된다.

3.5 확산항의 이산화

확산항은 다음과 같이 점 o 와 주위점 j 가 이루는 모서리들에서 계산한 확산 플럭스의 총합으로 근사시킬 수 있다.

$$\int_S \lambda_\phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \approx \sum_j (\lambda_\phi \nabla \phi^* \cdot \mathbf{S})_j. \quad (10)$$

확산항의 계산은 연구자들에 따라 몇 가지 방법을 사용한다. Anderson 등⁽¹⁹⁾은 이중셀의 좌우 격자에서 Gauss 정리를 이용하여 구배를 계산하였으며, 이외의 많은 연구자들은 Galerkin 유한요소법을 이용하여 확산항을 계산하였다.⁽¹⁸⁾ 그러나, 이 방법들은 혼합격자에 대해 모서리 자료구조를 일관성 있게 적용하기가 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 정렬격자계의 이산화방법을 비정렬 격자에 맞게 변형시킨 방법을 격자점 중심법에 적용하였다.^(13,21) 이 방법은 모서리에 일치하는 방향의 확산성분(normal diffusion)은 중앙차분법을 사용하고, 모서리에 수직방향 성분(cross diffusion)은 최소자승법이나 Gauss 정리를 이용해서 구한 값을 평균하여 사용하는 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다(Fig. 4).

$$\nabla \phi_j^* = \left\{ \nabla \phi_j - (\nabla \phi_j \cdot \mathbf{n}_d) \cdot \mathbf{n}_d \right\} + \left\{ \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{d_j} \cdot \mathbf{n}_d \right\}. \quad (11)$$

여기에서 \mathbf{n}_d 는 모서리방향 단위벡터이며, 우변의 첫째 항이 모서리의 수직 방향 구배, 두 번

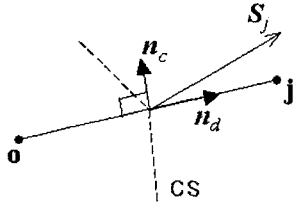


Fig. 4 Splitting the gradient on the control surface boundary

째 항이 모서리방향 구배이다. 식 (11)로 표현되는 구배와 확산계수, 그리고 경계면의 수직 길이 벡터의 곱이 제어경계면의 확산 플럭스 값이 된다.

3.6 압력수정기법

밀도의 변화를 고려하면, 질량보존 방정식을 만족하는 질량플럭스는 하나의 경계면에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.^(15,16)

$$F_j = (\rho^n + \rho')_j (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}')_j \cdot \mathbf{S}_j \quad (12)$$

여기에서, 상첨자 *는 운동량 방정식을 만족하는 물성량을 나타내며, 상첨자 n은 이전 반복에서의 물성량을 나타낸다. 또한 상첨자 '은 수정성분을 의미한다. 이 식을 다시 쓰면,

$$F_j = (\rho^n \mathbf{u}^* \mathbf{S} + \rho^n \mathbf{u}' \mathbf{S} + \rho' \mathbf{u}^* \mathbf{S} + \rho' \mathbf{u}' \mathbf{S})_j \quad (13)$$

따라서, 질량플럭스의 수정성분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F'_j = (\rho^n \mathbf{u}' \mathbf{S} + \rho' \mathbf{u}^* \mathbf{S} + \rho' \mathbf{u}' \mathbf{S}')_j \quad (14)$$

여기에서 우변의 셋째 항은 미소량의 곱이므로 무시한다. 또한, 첫 번째 항은 SIMPLE기법의 경우 속도의 수정성분에 관계된 항으로 다음과 같이 나타내어진다.

$$(\rho^n \mathbf{u}' \mathbf{S})_j = -(\rho^n S)_j \left(\frac{V_o}{A_o} \right)_j \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_j \quad (15)$$

식 (14)의 우변의 두 번째 항에서 밀도의 수정성분을 압력수정성분으로 바꾸면,

$$\rho' \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s p' = C_\rho p' \quad (16)$$

그러므로, 식 (14)의 우변의 둘째항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\rho' \mathbf{u}^* \mathbf{S})_j = \left(\frac{C_\rho F^*}{\rho^n} \right)_j p'_j \quad (17)$$

따라서, j 경계면에서의 질량플럭스의 수정성분은 다음과 같다.

$$F'_j = -(\rho^n S)_j \left(\frac{V_o}{A_o} \right)_j \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_j + \left(\frac{C_\rho F^*}{\rho^n} \right)_j p'_j \quad (18)$$

이 식에서 우변의 첫 번째 항은 확산항의 역할을 하고, 두 번째 항은 대류항의 역할을 하게 되어 대류항의 이산화기법을 적용할 수 있다. 식 (18)을 이산화하여 만든 연립 대수방정식을 풀어 다음과 같이 압력, 밀도, 그리고 속도를 수정한다.

$$p_o = p_o^{old} + \beta p_o' \quad (19)$$

$$\rho_o = \rho_o^{old} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{P_o} \beta p_o' \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_o = \mathbf{u}_o^* + \mathbf{u}_o' = \mathbf{u}_o^* - \frac{V_o}{A_o} \nabla p_o' \quad (21)$$

여기에서 β 는 압력 이완계수로 보통 0.2-0.4 정도를 사용한다.

식 (19), (20), (21)을 이용하여 수정한 해를 다시 초기값으로 사용하여 운동량방정식, 압력수정방정식, 에너지방정식을 반복적으로 풀어나가면 정상상태의 해를 얻을 수 있다.

3.7 자료구조

비정렬격자의 경우, 격자의 연결성을 암시적으로 나타낼 수 없기 때문에 지시자가 필요하다. 이러한 지시자들과 자료 구조의 구현이 실제 연산속도 등에 영향을 미치므로 효율적인 자료구조가 요구되어진다. 본 연구에서는 효율적인 방법으로 밀도기반 알고리즘에서 널리 쓰이는 모서리 자료구조를 적용하였다.^(18,19) 이 경우에 플럭스의 중복계산이 없으며 또한 각 모서리마다 A 행렬의 대각성분과 두 개의 비대각성분을 저장해 나가므로 매우 효율적이다. 지배방정식의 이산화를 통해 구성된 A 행렬은 성분이 0인 경우가 대부분인 희소행렬이 된다. 따라서 0이 아닌 성분만 저장하는 방법으로 널리 사용되는 CSR형식(Compressed Sparse Row format)을 사용하였다.⁽²⁸⁾

3.8 경계조건

연속류 영역의 유동에 대해서는 입출구에서 Dirichlet경계조건과 Neumann경계조건을 각각 사용하였으며, 벽면에서는 고착경계조건을 사용하였다.

또한, 미끄럼 유동(slip flow)에서 벽면의 미끄럼 현상을 예측하기 위해 널리 알려진 Maxwell 미끄럼 조건^(23,25)을 적용하였다. 이 조건은 기체운동이론에서 벽면-입자의 상호작용(surface-gas molecular interaction)에 관한 근사해법에 기초한 것으로, 등은 유동인 경우 아래와 같이 표현된다.

$$U_g = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \text{Kn} \frac{dU}{dy} \quad (22)$$

여기에서 하첨자 g 는 벽면에서의 기체를 나타낸다. 따라서, 벽면에서의 기체의 미끄럼속도는 Kn 수, 벽면에 평행한 속도성분의 구배, 그리고, 조절계수(accommodation coefficient) σ_v 에 의해 결정된다. 벽면의 속도구배는 해의 재구성 기법에서 구한 값을 사용하였다. 또한 수치적 안정성을 위하여 다음과 같이 이완기법을 적용하였다.

$$U_g^{n+1} = (1 - \omega) U_g^{old} + \omega U_g^{new} \quad (23)$$

여기에서 이완계수, ω 는 0.7~1.0을 사용하였다.

4. 결 과

본 연구에서 개발한 비정렬격자 Navier-Stokes 방정식 해석 프로그램의 정확도를 검증하기 위해 상판 끌림 공동유동, T형 분지관내 유동, 그리고 범프 위를 지나는 초음속 유동을 해석하였다. 또한 미끄럼 유동의 대표적인 문제인 미소채널 유동에 대해 수치계산을 수행하였다.

먼저 2차원 상판 끌림 공동유동은 경계가 모두 벽면으로 비압축성 유동의 대표적인 벤치마크 문제이다. 본 수치기법의 정확도를 검증하기 위해 Fig. 5와 같이 다양한 종횡비를 가진 삼각형요소와 사각형 요소로 이루어진 혼합격자를 생성하였다. Reynolds수가 1000일 때 해석영역의 도심을 통과하는 수직선에서의 u 속도성분을 Fig. 6에 도시하였다. 여기에서 보인 바와 같이 격자수가 증가할수록 속도분포는 Ghia 등⁽²⁹⁾의 수치해석 결과에 접근하며 격자수가 3725개 이상에서는 정확히 일치하는 결과를 보였다. Fig. 7은 격자수가 3725개 일때의 수렴곡선을 도시한 것으로 속도와 압력에 관한 오차가 안정적인 수렴을 이루는 것을 볼 수 있다. 다음으로 6400개의 벽면으로 밀집시킨 사각격자를 이용하여 Reynolds수가 5000일 경우에 대해 수치계산을 수행하였다. Fig. 8에서 보인바와 같이 해석영역의 도심을 통과하는 수직선

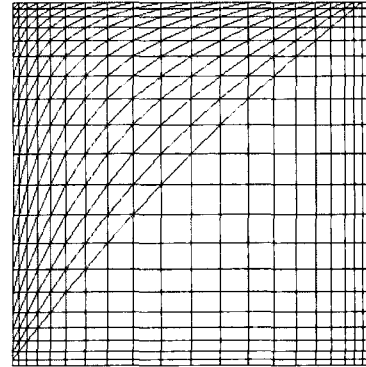


Fig. 5 Unstructured grid(590 elements)

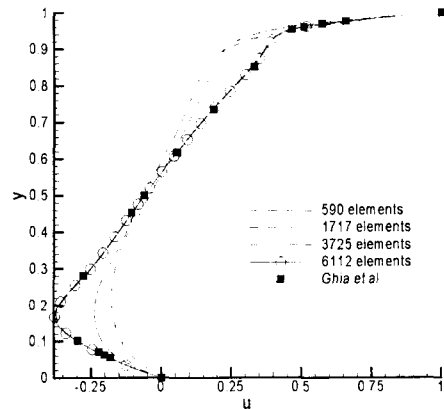


Fig. 6 U-velocity profiles along the vertical line through the geometric center (Re=1000)

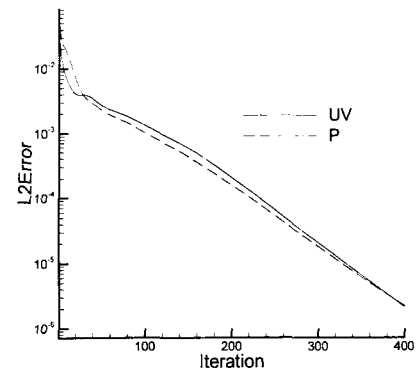


Fig. 7 Convergence History(3725 elements)

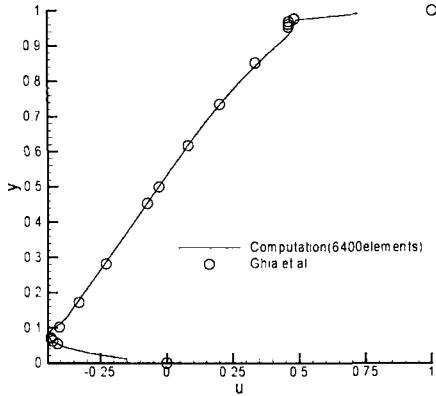


Fig. 8 U-velocity profiles along the vertical line through the geometric center (Re=5000)

에서의 u 속도성분을 Ghia 등⁽²⁹⁾의 수치해와 비교하였으며, 잘 일치하는 결과를 얻었다.

분지관 유동문제는 산업분야나 의공학 분야 등에서 중요한 유동문제로 여러 연구자들에 의해 연구되고 있다.⁽³⁰⁾ T형 분지관(T-shaped planar branch)은 하나의 입구와 출구, 그리고, 주 유동 방향에 수직으로 분지관이 나있는 형상으로 8100 개의 사각격자를 구성하였다. 입구에서는 포물선 형태의 완전발달된 속도경계조건을 주었으며, 출구에서는 정압 조건을 부과하였다. 본 연구의 계산결과를 Hayes 등⁽³⁰⁾의 유한요소법에 의한 수치 해석 결과와 비교하였다. Fig. 9는 Reynolds수가 400일 때의 유선을 도시한 것으로 분지관에서 박리가 일어남을 볼 수 있다. Fig. 10은 Reynolds수에 따른 주유동 방향의 유량비율을 나타낸 것으로, Hayes의 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

다음으로 압축성유동의 대표적인 벤치마크 문제인 범프(bump) 위를 지나는 Mach수가 1.65인 초음속유동에 대해 수치계산을 수행하였다.^(15,16) 범프의 높이는 범프 길이의 4%이다. 격자는 Marcum and Weatherill⁽³¹⁾의 격자생성법에 위상학적 개선과정을 부과한 기법⁽³²⁾을 이용하여 Fig. 11 과 같이 양질의 삼각격자를 생성하였다. 입구에서의 경계조건은 Mach수가 1.65인 자유류 (free-stream)라 가정하고 모든 종속변수에 대해 Dirichlet 경계조건을 부과하였다. 출구에서는 속도, 압력 등의 값을 내부점의 계산된 값으로부터 외삽하였다. Fig. 12는 등 Mach수 선도를 나타낸

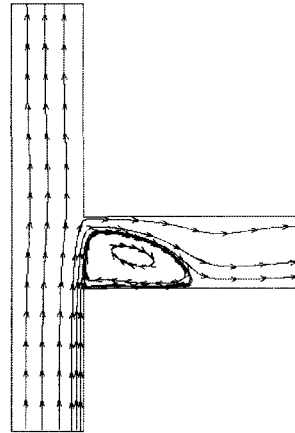


Fig. 9 Streamlines in the 2-D T-shaped planar branch (Re=400)

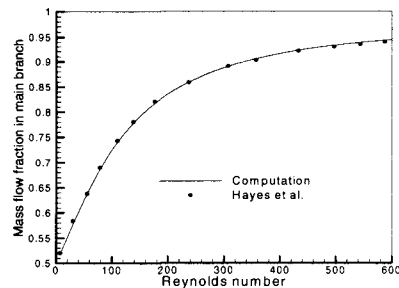


Fig. 10 Mass flow fraction at various Reynolds number range

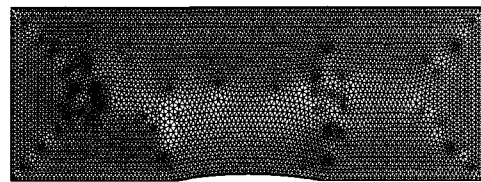


Fig. 11 Triangular grids(9906elements)

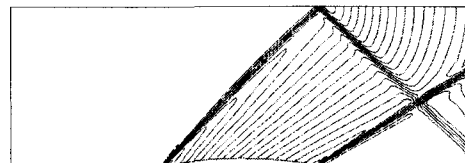


Fig. 12 Mach contours of the supersonic flow over a circular arc bump (M=1.65)

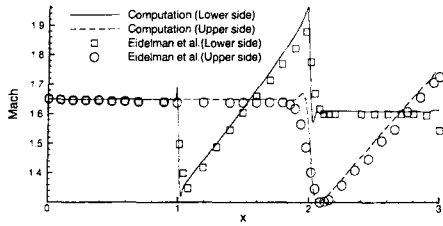


Fig. 13 Mach number at upper and lower boundary (M=1.65)

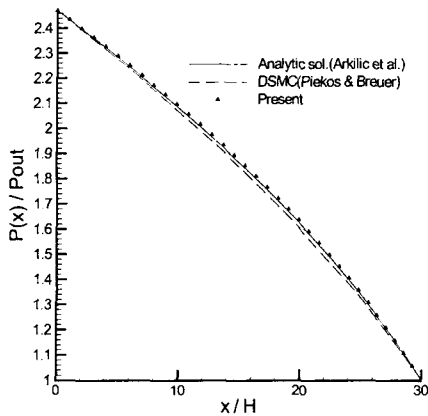


Fig. 14 Comparison of computed and analytic pressure distributions

Table 2 Memory requirements and Amount of flux calculation for three examples

		Cell-centered + Cell based	Node-centered + Edge based	Reduction (%)
Driven Cavity (Mixed grids)	Mem	4340	3824	11.9
	Flux cal.	1980	1030	48.0
T-shaped Branch (Quad. grids)	Mem	64800	66604	-2.8
	Flux cal.	32400	16500	49.1
Flow over a bump (Tri.grids)	Mem	79248	55608	29.8
	Flux cal.	29718	15019	49.5

것으로 충격파가 침투현상이 없이 잘 포착됨을 보여준다. Fig. 13은 채널 위벽과 아래벽에서의 Mach수를 도시한 것으로, 본 연구의 결과가 Eidelman 등⁽³³⁾의 수치해석 결과와 비교적 잘 일치하며 본 연구의 수치기법이 충격파를 보다 날카롭게 포착함을 볼 수 있다. 또한, 본 연구의 결과에서는 충격파가 생성되는 곳에서 작은 진동이 발생하는 데 이것은 격자의 수를 증가시킴으로써 감소시킬 수 있다.⁽¹⁵⁾

미끄럼 유동영역에 해당되는 미소채널 유동은 진단력 센서나 가속도계 등의 미소기구(micro device)에서 볼 수 있는 좁은 통로의 유동을 대표할 수 있다. 본 연구에서는 2차원 미소채널 내부의 정상상태, 등은 저속유동에 대해 수치계산을 수행하였다. 채널의 높이는 1.04 μm , 길이는 31.14 μm 이며, 채널 내부의 유체는 질소이다. 격자는 18000개의 요소를 가진 벽면으로 당겨진 사각격자를 구성하였다. 출구 Knudsen수가 0.05이고, 입구와 출구의 압력비가 2.47인 경우에 대하여 Maxwell 미끄럼 경계조건을 적용하여 계산을 수행하였다. Fig. 14에서 채널 중심선에서의 압력분포를 DSMC기법⁽²³⁾ 그리고 Arkilic⁽²⁵⁾의 해석해와 비교하였다. 본 연구의 수치해석 결과가 DSMC기법보다 해석해에 좀 더 일치하며, 큰 압력차로 인해 발생하는 압력의 비선형성을 적절히 예측함을 볼 수 있다.

끝으로 본 연구에서 제안한 기법의 기억장소와 연산의 효율성을 알아보기 위해서, 위에서 해석한 연속류 영역의 3가지 문제에 대해서 필수적인 실수 기억장소와 플럭스 연산량을 살펴보면 Table 2와 같다. 여기에서 비정렬격자 압력기반해법에서 널리 쓰이는 셀 중심 자료구조를 사용하는 셀중심법과 본 연구의 기법에 대해 비교하였다. 실수 기억장소는 Table 1을 적용하여 계산하였으며, 플럭스 연산량은 하나의 수송방정식을 기준으로 한 기본 연산횟수이다. Table 2에서 보인 바와 같이 혼합격자를 사용한 첫 번째 예제와 삼각격자를 사용한 세 번째 예제의 경우 기존 방법에 비해 기억장소를 각각 11.9% 와 29.8% 줄일 수 있으며, 사각격자를 사용하는 두 번째 예제의 경우에는 기억장소가 2.8% 증가하였다. 이는 사각격자를 사용할 경우 격자점의 개수가 요소의 개수보다 약간 증가하기 때문이다. 플럭스의 연산량은 모서리를 중심으로 계산하는 본 기법이

기존 방법에 비해 절반 가량 줄일수 있음을 보여 준다. 따라서, 본 연구에서 분리형 압력기반 해법에 도입한 격자점 중심법이 기존의 널리 쓰이는 셀중심자료구조를 이용하는 셀 중심법보다 효율적이라 할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 전 속도 영역의 유동을 해석하기 위한 효율적인 격자점 중심 비정렬격자 압력기반 해법을 제안하고, 상판 끝림 유동, T형 분기관 내 유동, 그리고 범프 위를 지나는 초음속 유동에 대해 수치계산을 수행하였다. 또한, Maxwell 미끄럼 경계조건을 적용하여 미끄럼류 영역에 해당되는 미소채널 내부의 유동 문제를 해석하였다. 해석결과들을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 상판 끝림 유동에 대하여 다양한 종횡비를 가진 혼합 비정렬격자를 이용하여 수치 계산한 결과 정확한 결과를 얻었으며 이는 제안된 수치 기법이 질이 좋지 않은 혼합격자에서도 정확한 해를 구할 수 있음을 보여준다. 또한 T형 분기관 내의 비압축성 유동을 해석한 결과 기존의 수치 해석 결과와 정확히 일치하였다.
- (2) 범프 위를 지나는 초음속유동을 해석한 결과, 충격파를 적절히 예측하였으며, 이는 제안된 기법이 압축성 영역까지 정확히 해석할 수 있음을 보여준다.
- (3) 저속유동이나 압축성 효과를 무시할 수 없는 미소채널 내부의 유동을 해석한 결과, 압축성 효과에 의해 나타나는 압력의 비선형성을 정확히 예측하였다.
- (4) 모서리 자료구조를 이용한 격자점 중심법을 분리형 압력기반 해법에 적용하는 것이 비정렬격자에서 해의 정확도를 잃지 않으면서 기존 방법에 비해 기억장소와 연산량을 감소시키는 보다 효율적인 방법임을 보여주었다.

참고문헌

- (1) Jameson, A. and Mavriplis, D. J., 1986, "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh," *AIAA Journal*, Vol. 24, April, pp. 611~618.
- (2) Anderson, W. K., 1994, "A Grid Generation and Flow Solution Method for the Euler Equations on Unstructured Grids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 110, pp. 23~38.
- (3) Venkatakrishnan, V. and Mavriplis, D. J., 1993, "Implicit Solvers for Unstructured Meshes," *J. Comput. Phys.*, Vol. 105.
- (4) Chorin, A. J., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *J. Comput. Phys.*, Vol. 2, pp. 12~26.
- (5) Rogers, S. E., 1989, "Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations," PhD Thesis, Stanford Univ.
- (6) Kwak, D. and Chakravarthy, S. R., 1986, "A Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables," *AIAA Journal*, Vol. 24, pp. 390~396.
- (7) Lee, D., 1996, "Local Preconditioning of the Euler and Navier-Stokes Equations," PhD Thesis, Univ. of Michigan.
- (8) Turkel, E., 1987, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 72.
- (9) Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787~1806.
- (10) Van Doormal, J. P. and Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows," *Numer. Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147~163.
- (11) Issa, R. I., 1986, "Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator Splitting," *J. Comput. Phys.*, Vol. 62, pp. 40~65.
- (12) Prakash, C. and Patankar, S. V., 1985, "A Control Volume-based Finite Element Method for Solving the Navier-Stokes Equations using Equal-order Velocity-Pressure Interpolation," *Numer. Heat Transfer, Part B*, Vol. 8, pp. 259~280.
- (13) Davidson, L., 1996, "A Pressure Correction

- Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 22, pp. 265~281.
- (14) Karki and Patankar, 1989, "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 9, pp. 1167~1174.
- (15) Demirdzic, I., Lilek, Z., and Peric, M., 1993, "A Collocated Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 16, pp. 1029~1050.
- (16) Rincon, J. and Elder, R., 1997, "A High-Resolution Pressure-based Method for Compressible Flows," *Comput. Fluids*, Vol. 26, No. 3, pp. 217~231.
- (17) Lien, F. S., 2000, "A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 33, pp. 355~374.
- (18) Ashford, G. A., 1996, "An Unstructured Grid Generation and Adaptive Solution Technique for High-Reynolds-Number Compressible Flows," PhD Thesis, Univ. of Michigan.
- (19) Anderson, W. K., and Bonhaus, D. L., 1994, "An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids," *Computers Fluids*, Vol. 23, No. 1, pp. 1~21.
- (20) Rhie, C. M. and Chow, W. L., 1983, "A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525~1532.
- (21) Muzafferija, S., 1994, "Adaptive Finite Volume Method for Flow Prediction using Unstructured Meshes and Multigrid Approach," PhD Thesis, Univ. of London.
- (22) Myong, R. S., 2000, "Analysis of Rarefied and MEMS Gas Flows Using Thermodynamically Consistent Nonequilibrium Hydrodynamic Models," *KSAS Journal*, Vol. 28, No. 4, pp. 35~47.
- (23) Piekos, E. S. and Breuer, K. S., 1996, "Numerical Modeling of Micromechanical Devices Using the Direct Simulation Monte Carlo Method," *J. of Fluids Engineering*, Vol. 118, pp. 464~469.
- (24) Beskok, A., Karniadakis, G. E., and Trimmer, W., 1996, "Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows," *J. of Fluids Engineering*, Vol. 118, pp. 448~456.
- (25) Arkilic, E. B., 1997, "Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels," Ph.D. Dissertation, MIT, Cambridge.
- (26) Choi, H., Lee, D., and Maeng, J., 2002, "Numerical Analysis of Microchannel Flows Using Langmuir Slip Model," *KSME Journal B*, Vol. 26, No. 4, pp. 587~593.
- (27) Golub, G. H., and Van Loan, C. F., 1996, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press.
- (28) Saad, Y., 1996, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company.
- (29) Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (30) Hayes, R. E., Nandakumar, K., and Nasr-el-din, H., 1989, "Steady Laminar Flow in a 90 Degree Planar Branch," *Comput. Fluids*, Vol. 17, No. 4, pp. 537~553.
- (31) Marcum, D. L. and Weatherill, N. P., 1995, "Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 9, pp. 1619~1625.
- (32) Maeng, J., Han, S., and Choi, H., 2001, "Extension of Topological Improvement Procedures for Triangular Meshes," *KSME Journal B*, Vol. 25, No. 6, pp. 853~859.
- (33) Eidelman, S., Colella, P., and Shreeve, R. P., 1984, "Application of the Godunov method and its second-order extension to cascade flow modelling," *AIAA Journal*, Vol. 22, pp. 1609~1615.