재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 결정적 척도

(Deterministic Measures of Fault-Tolerance in Recursive Circulants and Hypercubes)

박 정 흠 † 김 희 철 ††
(Jung-Heum Park) (Hee-Chul Kim)

요 약 다중 컴퓨터 네트워크의 고장 감내에 대한 대표적인 결정적 척도로 연결도와 에지 연결도가 있다. 연결도나 에지 연결도는 어떤 정점 분리 집합이나 에지 분리 집합을 제거했을 때 남은 그래프의 형태를 고려하지 않는다는 문제가 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, restricted connectivity와 같은 일반화된 연결성 척도들이 함께 사용된다. 이 논문에서는 재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 이러한 결정적 척도를 분석하고, 고장 감내 측면에서 비교한다.

키워드 : 고장 감내, 연결도, 재귀원형군, 하이퍼큐브

Abstract The connectivity and edge-connectivity have been the prime deterministic measure of fault tolerance in multicomputer networks. These parameters have a problem that they do not differentiate the different types of disconnected graphs which result from removing the disconnecting vertices or disconnecting edges. To compensate for this shortcoming, one can utilize generalized measures of connectedness such as superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, and restricted connectivity. In this paper, we analyze such deterministic measures of fault tolerance in recursive circulants and hypercubes, and compare them in terms of fault tolerance.

Key words : Fault tolerance, connectivity, recursive circulants, hypercubes

1. 서 론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크(multicomputer network)를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다[1]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조(interconnection structure)는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

연결망 구조를 설계함에 있어서 노드의 수가 많아질수록 고장 감내(fault tolerance)에 대한 중요성이 높아가고 있다. 감내할 고장의 형태는 게이트에서 노드나 통신 링크에 이르기까지 다양하게 고려할 수 있지만, 노드나 통신 링크에서 발생하는 고장에 감내하고자 하는 시스템 레벨 고장 감내(system-level fault tolerance)가 다중 컴퓨터 네트워크에서는 보편적이고 타당한 모델로 인정되고 있다.

시스템에 고장이 발생하더라도 원래의 기능을 수행할 수 있을 때, 그 시스템을 고장 감내 시스템이라고 부른다. 원래 기능을 수행한다는 것에 대한 서로 다른 두 가지 해석이 있다. 하나는 원래 시스템의 연결망 구조를 유지하는 것이 원래의 기능을 수행한다는 것이라고 간

· 이 논문은 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(R02-2000-00289)의 연구비를 지원 받았음.

† 종신회원 : 가톨릭대학교 컴퓨터 · 전자공학부 교수
j.h.park@catholic.ac.kr
†† 정 회 원 : 한국외국어대학교 컴퓨터 및 정보통신공학부 교수
hckim@hufs.ac.kr

논문접수 : 2002년 5월 30일
심사완료 : 2002년 7월 19일

주하는 것인데, 이에 대한 기본적인 접근 방식은 시스템 전반에 걸쳐서 노드나 통신 링크를 중복(redundancy)시키고 이들을 재구성(reconfiguration)하는 것이다. 이러한 접근을 시도한 연구가 계속되고 있으나, 노드나 통신 링크의 중복으로 인한 비용이 상당히 높다는 것이 문제점으로 지적되고 있다.

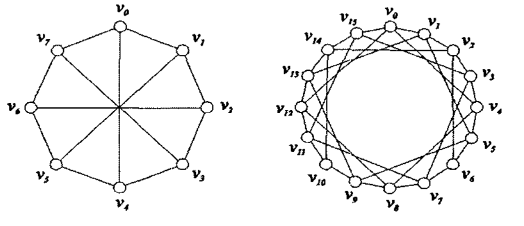
이 논문에서는 원래 기능을 수행한다는 것을 연결망 구조를 유지하는 것으로 간주하지 않고, 고장이 아닌 노드 사이에 통신 경로가 있는 것으로 간주한다. 다시 말하면, 어떤 고장이 발생하더라도 연결망 구조가 연결되어 있다는 것을 의미한다. 이와 관련하여 확률적 척도(probabilistic measure)와 결정적 척도(deterministic measure)가 제안되고 있다. 확률적 접근에서는 노드나 통신 링크에 고장이 발생할 확률이 주어져 있을 때, 네트워크가 원래의 기능을 수행할, 즉 연결되어 있을 확률을 구하는 것이다. 이 확률이 높을수록 고장 감내도가 높다고 말할 수 있다.

다중 컴퓨터 네트워크의 연결망 구조의 고장 감내에 대한 대표적인 결정적 척도로 연결도(connectivity)와 에지 연결도(edge-connectivity)가 있다. 그래프의 연결도는 임의의 k개미만의 노드에 고장이 발생하여 이것들을 제거하더라도 그래프가 연결되어 있는 최대 정수 k를 말한다. 에지 연결도는 연결도와 유사하게 정의할 수 있는데, 고장이 노드에 발생하지 않고 에지(통신 링크)에 발생한다는 것이다.

연결망 구조의 고장 감내에 대한 척도로 연결도나 에지 연결도의 단점은 어떤 정점 집합이나 에지 집합을 제거했을 때(제거된 정점이나 에지 집합을 분리 집합(disconnecting set)이라고 한다), 남은 그래프의 형태를 고려하지 않는다는 것이다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 superconnectivity, toughness, scattering number, vertex-integrity, binding number, restricted connectivity와 같은 척도들이 사용되는 것으로 알려져 있다. 이런 척도들은 연결도(에지 연결도)와 함께 사용될 때 고장 감내에 대한 좋은 척도로 인정되고 있다[2,3].

이런 척도들이 고장 감내에 대한 훌륭한 척도로 인정됨에도 불구하고, 많은 연결망 구조에서 이런 척도에 대한 분석이 되어 있지 않다. 이 논문에서는 재귀원형군(recursive circulant)과 하이퍼큐브(hypercube)에 대해서 이러한 고장 감내에 대한 척도를 분석하고, 두 연결망 구조를 고장 감내 측면에서 비교해 보고자 한다.

재귀원형군은 [4]에서 제안된 다중 컴퓨터의 연결망 구조이다. 재귀원형군 $G(N,d)$는 N개의 노드 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}\}$을 가지고 $s+d^i \equiv t \pmod N$을 만족하는 정수 i, $0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil - 1$가 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 이 논문에서는 N이 2의 거듭제곱으로 제한되고 $d=4$인 재귀원형군 $G(2^m, 4)$를 고려한다. 재귀원형군의 예가 아래 그림 1에 있다. $G(2^m, 4)$는 분지수가 m이며, 연결도나 에지 연결도도 m이다. 또한 $G(2^m, 4)$는 정점 대칭이며, 해밀톤 사이클을 가진 삼분 그래프(tripartite graph)임이 알려져 있다[5].



(a) $G(2^3, 4)$ (b) $G(2^4, 4)$

그림 1 재귀원형군의 예

m-차원 하이퍼큐브 Q_m의 정점 집합은 m-비트 이진 스트링들이고, 두 이진 스트링에서 한 비트만 서로 다르면 이들 사이에 에지가 있다. Q_m은 분지수가 m이며, 연결도나 에지 연결도가 모두 m이다. 또한 Q_m은 정점 대칭이며 에지 대칭이고, 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프(bipartite graph)로 알려져 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 고장 감내에 대한 결정적 척도의 정의와 기존 연구 결과를 기술하고, 하이퍼큐브에 대해서 분석되지 않은 결정적 척도를 분석한다. 3절에서는 재귀원형군에 대한 결정적 척도의 분석을 다룬다. 4절에서 재귀원형군과 하이퍼큐브의 고장 감내에 대한 분석을 요약하고 앞으로의 연구 과제를 기술한다.

2. 고장 감내에 대한 결정적 척도

2.1 Superconnectivity

그래프 G의 최소 정점 분리 집합이 모두 분지수가 δ인 한 정점에 인접한 정점들이면 G를 super-κ라고 부른다. 여기서 δ는 G의 최소 분지수를 말한다. super-κ인 그래프의 연결도는 항상 δ와 같게 된다. super-κ와 유사하게 에지 분리 집합을 고려한 super-λ를 정의할 수 있다.

연결된 circulant 그래프는 사이클 그래프와 홀수 n에

대하여 C_{2n} $(2, 4, 6, \cdots, n)$을 제외하면 모두 super-λ임이 알려져 있다[6]. 또한 연결되어 있고 에지 대칭인 그래프는 그것이 사이클 그래프가 아니면 모두 super-λ임이 알려져 있다. 재귀원형군 $G(cd^m, d)$는 길이가 6 이상인 사이클 그래프가 아니면 super-κ이고, 길이가 4 이상인 사이클 그래프가 아니면 super-λ이다[7]. 따라서 재귀원형군 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$은 super-κ이고 super-λ이다. 하이퍼큐브 Q_m, $m \geq 3$도 super-κ이고 동시에 super-λ임이 알려져 있다[8].

2.2 Toughness

완전 그래프 K_n의 toughness는 ∞로 정의한다. 완전 그래프가 아닌 그래프의 toughness $t(G)$는 다음과 같이 정의한다. 여기서 $G\langle V-F\rangle$는 그래프 G에서 정점 분리 집합 F를 제거했을 때 남은 그래프, 즉 $V-F$로 유도되는(induced) G의 부그래프를 말하고, $c(G\langle V-F\rangle)$는 $G\langle V-F\rangle$에 있는 연결된 요소의 수를 말한다.

$$t(G) = \min \{ |F| / c(G\langle V-F\rangle) \mid F\text{는 } G\text{의 정점 분리 집합} \}$$

toughness는 원래 해밀톤 그래프일 필요조건을 얻기 위해서 도입된 개념이었다. 해밀톤 그래프의 toughness는 1 이상이다. [9]에 있는 미해결 문제인 모든 toughness가 2 이상인 그래프는 해밀톤 사이클을 가지느냐는 것에 대해서는 toughness가 3/2 이상이면서 해밀톤 그래프가 아닌 예가 발견되었고, 또한 toughness가 3/2 이상인 모든 그래프는 2-팩터(factor), 즉 분지수가 2인 정규 스패닝 부그래프를 가지느냐는 문제는 부정되었다[10]. 현재까지 유효한 가설은 어떤 상수 t가 존재하여 toughness가 t 이상인 모든 그래프는 해밀톤 그래프이라는 것이다. 임의의 고정된(fixed) t에 대해서, toughness가 t 이상임을 인식하는 문제는 coNP-complete 문제임이 알려져 있고, 몇몇 그래프 부류에서 toughness를 계산하는 효율적인 알고리즘이 개발되어 있다[3].

재귀원형군 $G(2^m, 4)$의 toughness에 대해서는 다음이 성립한다. 이 정리의 증명은 3절에서 다루기로 한다.

정리 1 $G(2^m, 4)$, $m \geq 3$의 toughness $t(G)$는 $4/3 \leq t(G) \leq 5/3$이다.

이제 하이퍼큐브 Q_m의 toughness에 대해서 고려하기로 한다. 하이퍼큐브가 해밀톤 사이클을 가진 이분 그래프라는 사실을 이용하여 toughness를 분석할 수 있다.

보조 정리 1 이분 그래프 G의 toughness $t(G)$는 $t(G) \leq 1$이다.

증명 이분 그래프의 정점을 인접한 두 정점은 서로 다른 색을 가지도록 흰색과 검정색으로 칠할 수 있다. 흰색 정점의 수를 n_0, 검정색 정점의 수를 n_1이라고 하고, 일반성을 잃지 않고 $n_0 \leq n_1$이라고 하자. 흰색 정점을 분리 집합으로 잡으면, 분리된 그래프에는 검정색 정점만 남게 되는데 이들 사이에 에지가 없으므로 n_1개의 연결된 요소를 가지게 된다. 따라서 $t(G) \leq n_0/n_1 \leq 1$이 성립한다. □

보조 정리 2 해밀톤 그래프 G의 toughness $t(G)$는 $t(G) \geq 1$이다.

증명 하나의 해밀톤 사이클로 이루어진 사이클 그래프의 toughness가 1 이상임을 보이면 충분하다. 사이클 그래프에서 정점을 하나 제거하더라도 그래프는 연결되어 있다. 정점 2개를 제거하면, 최대 2개의 연결된 요소를 가지게 된다. 일반적으로 k개의 정점을 제거하더라도, 연결된 요소의 수가 k개를 넘지는 않음을 쉽게 알 수 있다. 이것은 $t(G) \geq 1$임을 의미한다. □

정리 2 하이퍼큐브 Q_m, $m \geq 2$의 toughness는 1이다.

2.3 Scattering number

완전 그래프 K_n의 scattering number는 $-\infty$라고 정의한다. 완전 그래프가 아닌 경우 그래프 G의 scattering number sc(G)는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{sc}(G) = \max \{ c(G\langle V-F\rangle) - |F| \mid F\text{는 } G\text{의 정점 분리 집합} \}$$

sc$(G) \leq 0$이면 $t(G) \geq 1$이고, 그 역도 성립함을 정의로부터 알 수 있다. sc$(G) > 0$인지를 판별하는 문제는 NP-complete임이 알려져 있고, 몇몇 그래프 부류에서 scattering number를 찾는 효율적인 알고리즘이 개발되어 있다[3].

재귀원형군 $G(2^m, 4)$의 scattering number는 아래와 같다. 그 증명은 3절에서 다루기로 한다. 하이퍼큐브 Q_m의 scattering number는 정리 2의 toughness 분석으로부터 쉽게 알 수 있다.

정리 3 (a) $G(2^m, 4)$, $m \geq 2$의 scattering number sc(G)는 $2-m$이다.

(b) 하이퍼큐브 Q_m, $m \geq 2$의 scattering number는 0이다.

2.4 Vertex-integrity

그래프 G의 vertex-integrity $I(G)$는 다음과 같이 정의한다. 여기서 $n(G\langle V-S\rangle)$는 $G\langle V-S\rangle$에서 최대 연결된 요소의 크기(정점 수)를 말한다.

$$I(G) = \min \{ |S| + n(G\langle V-S\rangle) \mid S \subseteq V \}$$

$I(G) \le k$인지를 판별하는 문제는 NP-complete임이 알려져 있다[11]. 평면 그래프로 제한하더라도 마찬가지이다. 몇몇 그래프 부류에서 $I(G)$를 찾는 알고리즘이 개발되어 있다[3]. 재귀원형군 $G(2^m,4)$의 vertex-integrity는 분석되어 있지 않고, 하이퍼큐브 Q_m의 vertex-integrity는 $O(2^m \log m/\sqrt{m})$임이 알려져 있다[11].

2.5 Binding number

그래프 G의 binding number $b(G)$는 다음과 같이 정의된다. 여기서 $N(S)$는 S에 속한 정점에 인접한 정점들의 집합을 말한다. 즉, $N(S) = \{y \in V \mid$ 어떤 $x \in S$에 대해서 $(x,y) \in E$ 이다$\}$.

$$b(G) = \min \{ |N(S)| / |S| \mid \emptyset \ne S \subseteq V\text{이고 } N(S) \ne V\text{이다} \}$$

$b(G) \ge 4/3$인 그래프는 완전 매칭(perfect matching)이 있다[12]. [9]에 있는 $b(G) \ge 3/2$인 그래프는 모두 길이 3인 사이클을 가지느냐는 문제와 $b(G) \ge 3/2$인 그래프는 pancyclic, 즉 3이상 $|V|$ 이하인 임의의 길이를 가진 사이클이 존재하느냐는 문제는 참인 것으로 판명되었다[10]. 그리고 일반적인 그래프의 binding number는 다항 시간에 구할 수 있음이 알려져 있다[13].

재귀원형군 $G(2^m,4)$의 binding number는 알려져 있지 않고, 하이퍼큐브 Q_m의 binding number는 다음과 같다.

정리 4 Q_m, $m \ge 2$의 binding number는 1이다.

증명 Q_m의 노드는 m-비트 이진 스트링으로 나타낸다. 1의 개수가 짝수인 정점을 짝수 정점, 홀수이면 홀수 정점이라고 하자. 짝수 정점과 홀수 정점의 수는 각각 2^{m-1}이다. 모든 짝수 정점 집합을 S라고 두면, $N(S)$는 모든 홀수 정점이 된다. 이 경우 $|N(S)| / |S| = 1$이다. 이제 $b(Q_m) \ge 1$임을 보이면 충분하다. m에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다. $m = 2$인 경우 당연히 성립하므로, $m \ge 3$임을 가정한다. Q_m에서 마지막 비트가 0인 정점과 1인 정점의 집합을 각각 V_0, V_1이라고 하고, $V = V_0 \cup V_1$라고 둔다. V_0나 V_1로 유도된 부그래프는 모두 Q_{m-1}과 동형이다. S는 Q_m의 정점 부분 집합으로 $S \ne \emptyset$, $N(S) \ne V$를 만족한다고 하고, $S_0 = S \cap V_0$, $S_1 = S \cap V_1$이라고 하자. 모든 i, $0 \le i \le 1$에 대해서 $S_i = \emptyset$이거나 혹은 $|N(S_i) \cap V_i| / |S_i| \ge 1$을 보이기로 한다. $S_i \ne \emptyset$라고 가정하자. $N(S_i) \cap V_i \ne V_i$인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $|N(S_i) \cap V_i| / |S_i| \ge 1$이다. $N(S_i) \cap V_i = V_i$인 경우는 $|N(S_i) \cap V_i| / |S_i| = 2^{m-1} / |S_i| \ge 1$이다.

경우 1 $S_0 = \emptyset$ (대칭적으로 $S_1 = \emptyset$). $S_1 \ne \emptyset$이므로, $|N(S)| / |S| = |N(S_1)| / |S_1| \ge |N(S_1) \cap V_1| / |S_1| \ge 1$이다.

경우 2 S_0, $S_1 \ne \emptyset$. $|N(S_0) \cap V_0| / |S_0| \ge 1$이고 $|N(S_1) \cap V_1| / |S_1| \ge 1$이므로, $|N(S)| / |S| \ge (|N(S_0) \cap V_0| + |N(S_1) \cap V_1|) / (|S_0| + |S_1|) \ge 1$이다. □

2.6 Restricted connectivity

연결도나 에지 연결도를 고려할 때 모든 노드나 통신 링크가 잠재적인 고장 집합(faulty set)이 될 수 있다고 간주한다. 어떤 노드나 통신 링크는 절대 고장이 날 수 없는 경우를 고려할 수 있다. 이러한 노드나 링크들의 집합을 forbidden faulty set이라고 한다. 만약 네트워크에서 최소 분리 집합의 크기(원소의 수)를 k라고 할 때, 서로 다른 분리 집합의 수가 모든 가능한 경우의 수인 $\binom{|V|}{k}$에 비해서 매우 작은 경우에, forbidden faulty set의 노드들을 포함하지 않는 분리 집합을 구하면, 고장 감내도가 연결도보다 클 수 있다. 어떤 노드나 통신 링크의 집합에 고장이 발생할 확률이 너무 작아서 무시할 수 있는 경우도, 그것을 forbidden faulty set이라고 둘 수 있다. 이런 배경에서 restricted connectivity라는 개념이 나오게 되었다[2].

정점 v에 인접한(adjacent) 정점 집합을 $A(v)$, 인접한(incident) 에지 집합을 $I(v)$라고 하자. F가 모든 정점 v에 대해서 $A(v)$를 포함하지 않는다고 할 때의 restricted vertex-connectivity를 $\kappa'(G)$, F가 모든 정점 v에 대해서 $I(v)$를 포함하지 않는다고 할 때의 restricted edge-connectivity를 $\lambda'(G)$라고 정의한다.

임의의 그래프 G에 대해서 $\lambda'(G)$는 network flow를 이용하여 계산할 수 있다고 알려져 있지만, $\kappa'(G)$에 대한 알고리즘은 알려져 있지 않다. 재귀원형군 $G(2^m,4)$에 대한 restricted connectivity는 다음과 같고, 그 증명은 3절에서 다루기로 한다. 하이퍼큐브 Q_m, $m \ge 3$에 대해서 $\kappa'(Q_m) = \lambda'(Q_m) = 2m-2$이다[2].

정리 5 (a) $G(2^m,4)$, $m \ge 3$의 restricted vertex-connectivity $\kappa'(G) = 2m-2$이다.

(b) $G(2^m,4)$, $m \ge 3$의 restricted edge-connectivity $\lambda'(G) = 2m-2$이다.

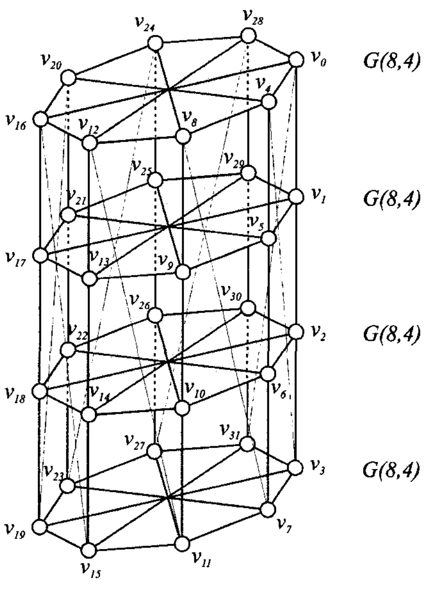
3. 재귀원형군의 결정적 척도 분석

3.1 재귀원형군의 재귀적 구조

재귀원형군 $G(N, d)$는 $N = cd^m$, $1 \le c < d$일 때 재귀적 구조(recursive structure)를 갖는다. 다시 말하면, $G(cd^m, d)$는 아래 성질을 이용하여 재귀적으로 정의할 수 있다[4].

성질 1 V_i를 다음과 같이 정의되는 $G(cd^m, d)$, $m \ge 1$의 정점 부분집합이라고 하자: $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{d}\}$. 모든 $0 \le i < d$에 대해서 V_i로 유도된 $G(cd^m, d)$의 부그래프는 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형(isomorphic)이다.

$G(cd^m, d)$, $m \ge 1$은 다음과 같이 d개의 $G(cd^{m-1}, d)$를 이용하여 설계할 수 있다. $G_i(V_i, E_i)$, $0 \le i < d$를 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형인 그래프라고 하고 $V_i = \{v_0^i, v_1^i, \cdots, v^i_{cd^{m-1}-1}\}$라 두자. 그리고 G_i는 v_j^i을 v_j에 대응시키는 사상에 의해서 $G(cd^{m-1}, d)$와 동형이라고 하자. v_j^i를 v_{jd+i}로 다시 레이블한 다음, 정점 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} V_i$이라고 두고, 에지 집합을 $\bigcup_{0 \le i < d} E_i \cup X$이라고 두면 $G(cd^m, d)$가 정의된다. 여기서 X는 크기가 1인 에지의 집합으로 $\{(v_j, v_{j'}) \mid j+1 \equiv j' \pmod{cd^m}\}$이다. 4개의 $G(8,4)$로 $G(32,4)$을 설계한 예가 그림 2에 있다.



G(32,4)

그림 2 G(32,4)의 재귀적 구조

$G(2^m, 4)$는 $G(cd^m, d)$ 부류에 속하므로 재귀적 구조를 갖는다. $G(2^m, 4)$의 재귀적 구조에서는 $G(2^{m-2}, 4)$와 동형인 G_0, G_1, G_2, G_3에 크기가 1인 에지가 2^m개 추가되어 있다.

3.2 $G(2^m, 4)$의 toughness와 scattering number

toughness와 scattering number는 그래프 G의 정점 분리 집합 F와 $G\langle V-F\rangle$의 연결된 요소의 수 $c(G\langle V-F\rangle)$를 이용하여 정의된다. 그런데 $c(G\langle V-F\rangle)$는 항상 G의 독립수(independence number), 즉 최대 독립 집합의 크기 이하가 된다. $G(2^m, 4)$의 독립수는 다음과 같이 알려져 있다[5].

보조 정리 3 $G(2^m, 4)$의 독립수는 $\frac{3}{8} \cdot 2^m$이다.

$G(2^m, 4)$의 정점 부분 집합 $V_i = \{v_j \mid j \equiv i \pmod{4}\}$, $0 \le i \le 3$이라고 두고, V_i로 유도된 부그래프를 G_i라고 하자. 그리고 F를 $G(2^m, 4)$의 정점 분리 집합이라고 하고, $F_i = V_i \cap F$라고 둔다. $G(2^3, 4)$와 $G(2^4, 4)$를 분석한 다음, 이를 기반으로 $G(2^m, 4)$의 toughness와 scattering number를 분석하고자 한다.

보조 정리 4 $G(2^3, 4)$의 toughness는 4/3이고 scattering number는 -1이다.

증명 정점 분리 집합 F에 대해서, $|F| \ge 3$이고, 보조 정리 3에 의해서 $c(G\langle V-F\rangle)$는 3 이하이다.

경우 1 $|F| = 3$. $G(2^3, 4)$는 super-κ이므로 F는 어떤 한 정점에 모두 인접하게 되고, $c(G\langle V-F\rangle)$는 2이다.

경우 2 $|F| \ge 4$. $c(G\langle V-F\rangle)$는 3 이하이다. $F = \{v_0, v_1, v_3, v_6\}$일 때 연결된 요소의 수가 3이다.

따라서 $G(2^3, 4)$의 toughness는 4/3이고 scattering number는 -1이다. □

보조 정리 5 $G(2^4, 4)$의 toughness는 4/3이고 scattering number는 -2이다.

증명 $|F| \ge 4$이고, $G\langle V-F\rangle$의 연결된 요소의 수는 독립수 이하, 즉 $c(G\langle V-F\rangle) \le \frac{3}{8} \cdot 2^4 = 6$이다. 아래 각 경우에 대해서 $G\langle V-F\rangle$의 연결된 요소의 수 $c(G\langle V-F\rangle)$를 찾고, toughness와 scattering number를 분석하기 위해서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle)$와 $c(G\langle V-F\rangle) - |F|$를 계산하기로 한다.

경우 1 $|F| = 4$. $G(2^4, 4)$가 super-κ이므로 F는 한 정점에 모두 인접하게 된다. $G\langle V-F\rangle$의 연결된 요소의 수는 2임을 확인할 수 있다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) = 2$이고, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| = -2$이다.

앞으로는 $|F| \ge 5$인 경우를 고려한다.

경우 2 어떤 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i|=0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=0$이라고 하자. 그러면, $V_0 \cup (V_1-F_1) \cup (V_3-F_3)$으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_2에는 최대 2개의 연결된 요소를 가질 수 있으므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 5/3$이고, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이다.

이제 모든 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \ge 1$인 경우를 고려한다.

경우 3 어떤 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i|=1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=1$이라고 하자.

경우 3.1 $|F_1| = 1$ (혹은 대칭적으로 $|F_3| = 1$). $(V_0-F_0) \cup (V_1-F_1)$로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. 그리고 이 부그래프에 G_2의 F_2에 속하지 않은 정점 중 최대 하나를 제외하고 모두 연결되어 있다. G_3에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이고, $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 5/3$, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이다.

경우 3.2 $|F_2| = 1$. 위 경우 3.1에 의해서 $|F_1|$, $|F_3| \ge 2$이고, 따라서 $|F| \ge 6$이다. V_0-F_0로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, V_1-F_1에 속한 최대 한 정점을 제외하고는 모두 이 부그래프에 연결되어 있다. G_2와 G_3에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le 4$이고, $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 3/2$, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이다.

경우 3.3 $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3| \ge 2$. 이 때 $|F| \ge 7$이다. V_0-F_0로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, V_1-F_1에 속한 최대 한 정점을 제외하고는 모두 이 부그래프에 연결되어 있다. V_3-F_3에 대해서도 마찬가지이다. G_2에 최대 2개의 연결된 요소가 있을 수 있으므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le 1+1+2+1 = 5$이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 7/5$, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이다.

이제 $|F| \ge 8$인 경우를 고려하면 충분하다.

경우 4 $|F| \ge 8$. $c(G\langle V-F\rangle) \le 6$이므로 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 4/3$, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이다.

위의 모든 경우에서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 4/3$이고 $F = \{v_0, v_2, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{13}, v_{15}\}$일 때 $c(G\langle V-F\rangle) = 6$이 되어 $G(2^4,4)$의 toughness는 4/3가 된다. 또한 모든 경우에 $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le -2$이고 경우 1에서 등식이 성립하므로 $G(2^4,4)$의 scattering number는 -2이다. □

이제 정리 1, 즉 $G(2^m,4)$, $m \ge 3$의 toughness $t(G)$는 $4/3 \le t(G) \le 5/3$임을 증명한다.

정리 1의 증명 $G(2^m,4)$에서 독립 집합에 속하지 않은 정점들을 정점 분리 집합으로 잡으면, 생성되는 연결된 요소의 수는 독립수 $\frac{3}{8} \cdot 2^m$와 같다. 이 때 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) = 5/3$가 되므로, 이것은 $t(G)$의 상한값이 된다. 이제 m에 대한 수학적 귀납법으로 $t(G) \ge 4/3$임을 증명한다. $m=3$, 4인 경우는 앞의 보조 정리 4와 5에 의해서 성립한다. $m \ge 5$라고 가정한다. 정점 분리 집합 F는 $|F| \ge m \ge 5$를 만족한다.

경우 1 어떤 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \le 1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| \le 1$이라고 가정한다.

경우 1.1 $|F_1| \le 1$ (대칭적으로 $|F_3| \le 1$). $(V_0-F_0) \cup (V_1-F_1)$로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, G_2와 G_3에 각각 최대 하나의 연결된 요소가 있으므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이다. 따라서 $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 5/3$이다.

경우 1.2 $|F_2| \le 1$. 각각 V_0-F_0와 V_2-F_2로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_1과 G_3에 각각 최대 하나의 연결된 요소가 있고, 이들 연결된 요소는 정점 하나로 이루어져 있다. 그런데 G_1과 G_3에 동시에 하나의 연결된 요소가 존재할 수 없음을 보인다. 만약 그렇지 않다고 가정하면, 즉 G_1과 G_3에 있는 정점 v_j, $v_{j'}$이 각각 연결된 요소를 이룬다면 v_j와 인접하면서 G_0과 G_2에 있는 정점 v_{j-1}, v_{j+1}은 각각 F_0과 F_2에 속해야 한다. $v_{j'}$에 대해서도 마찬가지이다. $|F_0|$, $|F_2| \le 1$이므로 이것은 불가능하다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이며, $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 5/3$이다.

경우 1.3 $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3| \ge 2$. $(V_0-F_0) \cup (V_1-F_1) \cup (V_3-F_3)$으로 유도되는 부그래프는 최대 3개의 연결된 요소를 가진다. V_0-F_0로 유도된 그래프는 연결되어 있고, $|F_0| \le 1$임에 유의한다. V_2-F_2로 유도된 부그래프는 F_2가 G_2의 정점 분리 집합인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $|F_2| / c(G\langle V_2-F_2\rangle) \ge 4/3$, 즉 $c(G\langle V_2-F_2\rangle) \le (3/4)\,|F_2|$이다. F_2가 G_2의 정점 분리 집합이 아닌 경우라도 $|F_2| \ge 2$이므로, 위 식은 성립한다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le 3 + (3/4)\,|F_2|$이다. 그런데, $3 \le (3/4)\,(|F_0|+|F_1|+|F_2|)$이므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le (3/4)\,(|F_0|+|F_1|+|F_2|) + (3/4)\,|F_2| = (3/4)\,|F|$가 성립한다. 즉, $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 4/3$이다.

경우 2 모든 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \ge 2$. 위 경우

1.3과 같이 모든 i에 대해서 V_i-F_i로 유도된 부그래프의 연결된 요소의 수 $c(G\langle V_i-F_i\rangle) \le (3/4)\,|F_i|$가 성립한다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le \sum_{0\le i\le 3} c(G\langle V_i-F_i\rangle) \le (3/4) \sum_{0\le i\le 3}|F_i| = (3/4)\,|F|$이다. 즉, $|F| / c(G\langle V-F\rangle) \ge 4/3$이다. □

이제 정리 3 (a), 즉 $G(2^m,4)$, $m\ge 2$의 scattering number $\mathrm{sc}(G) = 2-m$임을 증명한다.

정리 3 (a)의 증명 $G(2^2,4)$의 scattering number는 0임을 쉽게 알 수 있다. $m=3$, 4인 경우는 보조정리 4와 5에 의해서 성립한다. 한 정점에 인접한 모든 정점을 정점 분리 집합 F로 잡으면, $c(G\langle V-F\rangle) = 2$가 되고 따라서 $\mathrm{sc}(G) \ge 2-m$이 된다. 이제 $m\ge 5$인 경우 $G(2^m,4)$의 scattering number $\mathrm{sc}(G) \le 2-m$임을 m에 대한 수학적 귀납법으로 증명하고자 한다. 어떤 경우는 $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$임을 보이면 충분하다. 왜냐하면 F가 정점 분리 집합이어서 $|F| \ge m$이므로 $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 2-m$이 성립하기 때문이다.

경우 1 어떤 i, $0\le i\le 3$에 대해서 $|F_i|=0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=0$이라고 가정한다. $V_0 \cup (V_1-F_1) \cup (V_3-F_3)$으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다.

경우 1.1 $|F_1| \le 1$ (대칭적으로 $|F_3| \le 1$). V_2-F_2에 속한 정점은 최대 한 정점을 제외하고 모두 G_1에 연결되어 있으므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$이다.

경우 1.2 $|F_1|$, $|F_3| \ge 2$. $G\langle V_2-F_2\rangle$가 연결된 그래프일 경우는 $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$가 된다. $G\langle V_2-F_2\rangle$가 연결된 그래프가 아닌 경우는 귀납적 가설에 의해서 $c(G\langle V_2-F_2\rangle) - |F_2| \le \mathrm{sc}(G_2) = 2-(m-2)$가 성립한다. 그리고 $c(G\langle V-F\rangle) \le 1 + c(G\langle V_2-F_2\rangle)$이고, $|F| = |F_1| + |F_2| + |F_3| \ge |F_2| + 2 + 2$이다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 1 + c(G\langle V_2-F_2\rangle) - (|F_2| + 2 + 2) = c(G\langle V_2-F_2\rangle) - |F_2| - 3 \le 2-(m-2) - 3 \le 2-m$이다.

이제 모든 i, $0\le i\le 3$에 대해서 $|F_i| \ge 1$인 경우를 고려한다.

경우 2 어떤 i, j, $0\le i\ne j\le 3$에 대해서 $|F_i|=|F_j|=1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0|=1$이라고 가정한다.

경우 2.1 $|F_1|=1$ (대칭적으로 $|F_3|=1$). V_2-F_2에 속한 정점 최대 하나를 제외하고는 모두 G_1에 연결되어 있고, V_3-F_3에 속한 정점도 최대 하나를 제외하고는 모두 G_0에 연결되어 있다. $G\langle (V_0-F_0) \cup (V_1-F_1)\rangle$이 연결된 그래프이므로, $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이다. $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$인 경우는 당연하므로, $c(G\langle V-F\rangle) = 3$인 경우를 고려한다. 이 경우 V_2-F_2에 속한 정점 하나가 연결된 요소가 되기 위해서는 G_2에서도 연결된 요소가 되어야 한다. 이것은 $|F_2| \ge m-2$임을 의미한다. V_3-F_3에 속한 정점 하나에 대해서도 마찬가지이므로, $|F_3| \ge m-2$이다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 3 - \{2(m-2) + 2\} = 5-2m \le 2-m$이다. $m\ge 5$임에 유의한다.

경우 2.2 $|F_2|=1$. 이 경우 정리 1의 증명에서 경우 1.2에서 보인 것과 같이 $c(G\langle V-F\rangle) \le 3$이다. 경우 2.1에서와 같이 G_1 혹은 G_3에 속한 한 정점이 연결된 요소를 이루기 위해서는 G_1 혹은 G_3에서도 연결된 요소이어야 하므로, $|F_1| \ge m-2$ 혹은 $|F_3| \ge m-2$가 성립한다. 따라서 $|F| = |F_0| + |F_1| + |F_2| + |F_3| \ge 1 + (m-2) + 1 + 2 = m+2$이고, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 3 - (m+2) \le 2-m$이 성립한다.

경우 3 모든 F_i, $0\le i\le 3$은 $|F_i| \ge 1$이며, F_i들 중에서 $|F_i| = 1$인 것이 하나 이하. F_i가 G_i의 정점 분리 집합인 경우는 귀납적 가설에 의해서 $c(G\langle V_i-F_i\rangle) - |F_i| \le 2 - (m-2)$가 성립한다. 그렇지 않은 경우는 $c(G\langle V_i-F_i\rangle) - |F_i| = 1 - |F_i|$가 되는데, 이것은 $|F_i| = 1$이면 0이 되고, $|F_i| \ge 2$이면 -1 이하가 된다. F_i들 중에 몇 개가 G_i의 정점 분리 집합이 되느냐에 따라 경우를 나누어서 고려해 본다.

경우 3.1 F_i들 모두가 G_i의 정점 분리 집합. 이 경우 각 F_i는 $|F_i| \ge m-2$이므로, $|F| \ge 4m-8$이다. 정리 1에 의해서 $c(G\langle V-F\rangle) \le \frac{3}{4}\cdot|F|$이므로, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le \frac{3}{4}\cdot|F| - |F| = -\frac{1}{4}\cdot|F| \le -\frac{1}{4}\cdot(4m-8) = 2-m$이다.

경우 3.2 F_i들 중에 3개가 G_i의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le \sum_{0\le i\le 3} c(G\langle V_i-F_i\rangle) - |F| = \sum_{0\le i\le 3} \{c(G\langle V_i-F_i\rangle) - |F_i|\} \le 3\{2-(m-2)\} + 0 = 12-3m \le 2-m$이다. $m\ge 5$임에 유의한다.

경우 3.3 F_i들 중에 2개가 G_i의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le \sum_{0\le i\le 3} \{c(G\langle V_i-F_i\rangle) - |F_i|\} \le 2\{2-(m-2)\} + 0 + -1 = 7-2m \le 2-m$이다.

경우 3.4 F_i들 중에 하나가 G_i의 정점 분리 집합. $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 2-(m-2) + 0 + -1 + -1 = 2-m$이다.

경우 3.5 F_i들 모두는 G_i의 정점 분리 집합이 아님. 모든 $G\langle V_i - F_i\rangle$는 연결된 그래프이고 F는 정점 분리 집합이므로, 어떤 $0 \le i < 3$에 대해서 $V_i - F_i$에 속한 정점 x와 $V_{i+1} - F_{i+1}$에 속한 정점 y를 잇는 에지는 존재하지 않는다. 이것은 $|F_i \cup F_{i+1}| \ge 2^{m-2}$임을 의미한다. $c(G\langle V-F\rangle) \le 4$이므로, $c(G\langle V-F\rangle) - |F| \le 4 - 2^{m-2} \le 2-m$이다. □

3.3 $G(2^m, 4)$의 restricted connectivity

$G(2^m,4)$, $m \ge 3$에 대해서 $\kappa'(G) = 2m-2$임을 증명한다.

정리 5 (a)의 증명 $G(2^m,4)$의 분지수는 m이고 길이 3인 사이클을 가지고 있지 않으므로[5], 서로 인접한 두 정점 v, w에 인접한 정점의 집합 F, 즉 $F = A(v) \cup A(w) - \{v,w\}$의 크기는 $2m-2$이다. 따라서 $\kappa'(G) \le 2m-2$이다. 이제 $|F| \le 2m-3$인 임의의 정점 부분 집합 F에 대해서, $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$이고, 모든 $v \in V$에 대해서 $A(v) \not\subseteq F$이면 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프임을 m에 대한 수학적 귀납법으로 보인다. $m=3$인 경우는 $G(2^3,4)$의 연결도가 3이고 super-κ이므로 성립한다. $m \ge 4$이라고 가정한다.

경우 1 어떤 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| = 0$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 0$이라고 가정한다. $V_0 \cup (V_1 - F_1) \cup (V_3 - F_3)$으로 유도된 부그래프는 연결되어 있다.

경우 1.1 $|F_1| = 0$ (대칭적으로 $|F_3| = 0$). $V_2 - F_2$에 있는 정점은 G_1에 연결되어 있으므로, $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다.

경우 1.2 $|F_2| = 0$. $|F| \le 2m-3$이므로 $V_1 - F_1 \cup V_3 - F_3 \ne \emptyset$이고 따라서 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다.

경우 1.3 $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3| \ge 1$.

경우 1.3.1 $|F_1| = 1$ (대칭적으로 $|F_3| = 1$). $V_2 - F_2$에 속한 최대 한 정점 x를 제외하고 모두 G_1에 연결되어 있다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$이고 또한 $x \in F$이거나 $A(x) \not\subseteq F$이면 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다.

경우 1.3.2 $|F_2| = 1$. $G\langle V_2 - F_2\rangle$는 연결된 그래프이므로 $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$이다. 두 개의 연결된 요소를 가지기 위해서는 $|F_1| \ge 2^{m-2}-1$, $|F_3| \ge 2^{m-2}-1$ 즉, $|F| \ge 2^{m-2}-1+1+2^{m-2}-1 = 2^{m-1}-1$이어야 하는데, 이것은 $|F| \le 2m-3$이라는 가정에 모순이므로 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다.

경우 1에 의해서 어떤 F_i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| = 0$이면 다른 F_j, $j \ne i$들은 $|F_j| \ge 2$라고 가정할 수 있다. 이 경우에 대한 고려는 뒤로 미루고, 우선 모든 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \ge 1$인 경우를 고려한다.

경우 2 모든 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \ge 1$이고, 어떤 i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| = 1$. 일반성을 잃지 않고 $|F_0| = 1$이라고 가정한다.

경우 2.1 $|F_1| = 1$ (대칭적으로 $|F_3| = 1$). $(V_0 - F_0) \cup (V_1 - F_1)$로 유도된 부그래프는 연결되어 있다. G_2에 속하는 최대 한 정점 x를 제외하고 $V_2 - F_2$에 속한 모든 정점은 G_1에, G_3에 속하는 최대 한 정점 y를 제외하고 $V_3 - F_3$에 속한 모든 정점은 G_0에 연결되어 있다. 만약 x, $y \in F$이라면 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다. x나 y 둘 중 하나, 일반성을 잃지 않고 $x \in F$이라면 $c(G\langle V-F\rangle) \le 2$이고 또한 $A(y) \not\subseteq F$이면 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프가 된다. 마지막으로 x, $y \notin F$인 경우에 x나 y 둘 중 하나가 $V_0 - F_0$을 포함하는 연결된 요소에 포함되는 경우는 위 주장이 성립한다. 그렇지 않은 경우는 $|F| \ge 1 + 1 + m-2 + m-2 = 2m-2$가 되어 $|F| \le 2m-3$이라는 가정에 모순이 된다.

경우 2.2 $|F_2| = 1$. $|F_1|$, $|F_3| \ge 2$이다. $V_0 - F_0$으로 유도된 부그래프는 연결되어 있고, $V_1 - F_1$에 속하는 최대 한 정점 x를 제외하고 모두 G_0에 연결되어 있다. $V_2 - F_2$로 유도된 부그래프도 연결되어 있고, $V_3 - F_3$에 속하는 최대 한 정점 y를 제외하고 모두 G_2에 연결되어 있다. 먼저 $V_0 - F_0$을 포함하는 연결된 요소와 $V_2 - F_2$를 포함하는 연결된 요소가 같음을 보인다. 서로 다른 연결된 요소라면, $V_1 - \{x\}$에 속하는 임의의 정점 p에 대해서 $p \in F_1$이거나 혹은 p에 인접하고 V_2에 속한 정점 q는 $q \in F_2$이다. 이것은 $|F_1 \cup F_2| \ge 2^{m-2} - 1$임을 의미하고, $|F| \ge 2^{m-2} - 1 + 1 + 2 = 2^{m-2} + 2$가 되어 $|F| \le 2m-3$이라는 가정에 모순이 된다. 경우 2.1과 같이 x나 y중 최소한 하나가 F에 속하거나 혹은 x, $y \notin F$이고 x나 y 둘 중 하나가 $V_0 - F_0$을 포함하는 연결된 요소에 포함되는 경우에 증명이 완성된다. 그렇지 않은 경우는 $|F| \ge 1 + m-2 + 1 + m-2 = 2m-2$가 되어 $|F| \le 2m-3$이라는 가정에 모순이 된다.

경우 1과 2에 의해서 어떤 F_i, $0 \le i \le 3$에 대해서 $|F_i| \le 1$이면 다른 F_j, $j \ne i$들은 $|F_j| \ge 2$라고 가정할 수 있다.

$m=4$인 경우는 위의 주장이 성립함을 알 수 있다. 즉, 어떤 F_i에 대해서 $|F_i|\le1$일 때는 경우 1과 2에 의해서 $|F|\ge6$이고, 모든 F_i에 대해서 $|F_i|\ge2$일 때는 $|F|\ge8$이 되어, $|F| \le 2\cdot4-3=5$라는 사실에 모순이 된다. 이후로는 $m\ge5$라고 가정한다.

이제 모든 i, $0\le i<3$에 대해서 (x,y)가 에지가 되는 V_i-F_i에 속한 정점 x, $V_{i+1}-F_{i+1}$에 속한 정점 y가 존재함을 보인다. 만약 모든 V_j-F_j에 속한 정점 x, $V_{j+1}-F_{j+1}$에 속한 정점 y가 에지를 이루지 않는다고 가정하자. 이것은 $|F_j\cup F_{j+1}|\ge2^{m-2}$을 의미한다. 경우 1과 2에 의해서 F_j와 F_{j+1}을 제외한 나머지 두 F_i들에 정점이 2 이상 포함되므로, $|F|\ge2^{m-2}+2$가 되는데, 이것은 $|F|\le2m-3$이라는 가정에 모순이 된다. 이것은 모든 i, $0\le i\le3$에 대해서 $G\langle V_i-F_i\rangle$은 연결되어 있다면, $G\langle V-F\rangle$가 연결된 그래프임을 의미한다. 이제 어떤 $G\langle V_i-F_i\rangle$가 연결된 그래프가 아니라고 가정하고, 일반성을 잃지 않고 $G\langle V_0-F_0\rangle$이 연결된 그래프가 아니라고 둔다. $G\langle V_0-F_0\rangle$에 속한 크기가 가장 작은 연결된 요소의 정점 집합을 R이라고 하자.

경우 3.1 $|R|\ge2$. 귀납적 가설에 의해서 $|F_0|\ge2(m-2)-2$이다. 경우 1과 2에 의해서 $|F_1|+|F_2|+|F_3|\ge4$이므로 $|F|\ge2(m-2)-2+4=2m-2$가 되어 $|F|\le2m-3$이라는 가정에 모순이 된다.

경우 3.2 $|R|=1$. $R=\{x\}$라고 둔다. $|F_0|\ge m-2$이다. 그리고 $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|<m-2$이다: 만약 그렇지 않다면, $|F|\ge m-2+m-2+2=2m-2$가 되어 모순이다. 따라서 $G\langle V_1-F_1\rangle$, $G\langle V_2-F_2\rangle$, $G\langle V_3-F_3\rangle$은 각각 연결된 그래프이고, $(V_1-F_1)\cup(V_2-F_2)\cup(V_3-F_3)$으로 유도된 부그래프도 연결되어 있다. 귀납적 가설에 의해서 $G\langle V_0-F_0-R\rangle$도 연결된 그래프이다. $G\langle V_0-F_0-R\rangle$이 독립된 연결된 요소를 이루지 않고, $(V_1-F_1)\cup(V_2-F_2)\cup(V_3-F_3)$으로 유도된 부그래프에 연결되어 있음을 보인다. 만약 그렇지 않다면 V_0-F_0-R에 인접하면서 V_1이나 V_3에 속한 정점은 모두 F에 속해야 한다. 이것은 $|F|\ge2\cdot|V_0-F_0-R|+|F_0|\ge2^{m-2}$를 의미하는데, $|F|\le2m-3$이라는 가정에 모순이 된다. 따라서 $c(G\langle V-F\rangle)\le2$이고, $A(x)\nsubseteq F$이면 $G\langle V-F\rangle$는 연결된 그래프이다. □

이제 $G(2^m,4)$, $m\ge2$에 대해서 $\lambda'(G)=2m-2$임을 보인다.

정리 5 (b)의 증명 $G(2^m,4)$에 있는 서로 인접한 두 정점 v, w에 인접한 에지 집합 $F=I(v)\cup I(w)-(v,w)$는 분리 집합이고 크기는 $2m-2$이다. 이제 $|F|\le2m-3$인 임의의 에지 부분 집합 F에 대해서, $c(G-F)\le2$이고, 모든 $v\in V$에 대해서 $I(v)\nsubseteq F$이면 $G-F$는 연결된 그래프임을 m에 대한 수학적 귀납법으로 보인다. $m=2$인 경우는 당연히 성립하고, $m=3$인 경우는 $G(2^3,4)$의 에지 연결도가 3이고 super-λ이므로 성립한다. $m\ge4$이라고 가정한다. $X=\{(v_j,v_{j'})\ |\ j+1\equiv j'\ (\mathrm{mod}\ 2^m)\}$이라고 두면, X는 $G(2^m,4)$의 해밀톤 사이클을 이룬다. $|X\cap F|<2$인 경우는 $G(2^m,4)$가 당연히 연결되어 있으므로, $|X\cap F|\ge2$라고 가정한다. G_i의 에지 집합을 E_i라고 하고, G_i와 G_j, $j\equiv i+1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 사이에 있는 에지를 $X_{i,j}$이라고 한다. 그리고 $F_i=E_i\cap F$, $F_{i,j}=X_{i,j}\cap F$라고 둔다. G_i에서 F_i에 속한 에지를 제거한 그래프를 G_i-F_i라고 쓰기로 한다.

경우 1 모든 i, $0\le i\le3$에 대해서 G_i-F_i가 연결된 그래프. 먼저 $F_{i,j}=X_{i,j}$를 만족하는 $F_{i,j}$, $0\le i\le3$은 하나 이하임을 보인다. 만약 둘 이상이라면, $|F|\ge2^{m-2}+2^{m-2}=2^{m-1}$이 되어, $|F|\le2m-3$이라는 가정에 모순이다. 따라서 $G-F$는 연결된 그래프이다.

경우 2 어떤 i, $0\le i\le3$에 대해서 G_i-F_i가 연결된 그래프가 아님. 일반성을 잃지 않고 G_0-F_0이 연결된 그래프가 아니라고 가정한다. $|F_0|\ge m-2$이다. 다른 G_i-F_i, $1\le i\le3$은 각각 연결된 그래프이다: 만약 그렇지 않다면, $|F|\ge m-2+m-2+|X\cap F|\ge2m-2$이므로, $|F|\le2m-3$이라는 가정에 모순이다. 또한 G_i-F_i, $1\le i\le3$은 서로 연결되어 하나의 연결된 요소 C에 속한다: 만약 그렇지 않다면, $|F|\ge m-2+2^{m-2}$인데 이 또한 모순이다. G_0-F_0에 속한 크기가 최소인 연결된 요소의 정점 집합을 R이라고 하자.

경우 2.1 $|R|\ge2$. 귀납적 가설에 의해서 $|F_0|\ge2(m-2)-2$이다. G_0-F_0의 연결된 요소는 모두 C에 속함을 보인다. 만약 C에 속하지 않는 연결된 요소 R'이 있다면, R'에 속한 정점에 인접하고 X에 속한 모든 에지는 F에 포함되어야 하므로, $|F|\ge2(m-2)-2+2|R'|\ge2m-2$이므로 $|F|$의 가정에 모순이다. 따라서 $G-F$는 연결된 그래프이다.

경우 2.2 $|R|=1$. $|F_0|\le2(m-2)-3=2m-7$인 경우는 귀납적 가설에 의해서 G_0-F_0는 2개의 연결된 요소를 가지고, 다른 연결된 요소 R'의 크기는 $|R'|=2^{m-2}-1$이므로 경우 2.1과 같이 R'은 C에 속함을 보

일 수 있다. $|F_0| \geq 2m-6$인 경우는 $|F-F_0| \leq 3$이므로, 정점의 수가 2 이상인 연결된 요소는 C에 속하고 정점의 수가 1인 최대 하나의 연결된 요소 R만이 C에 속하지 않을 수 있다. 따라서 두 경우 모두 $G-F$의 연결된 요소의 수는 2 이하이고, $I(x) \nsubseteq F$이면 $G-F$는 연결된 그래프가 된다. 여기서, $R = \{x\}$이다. □

4. 결 론

이 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m,4)$와 하이퍼큐브 Q_m의 고장 감내에 대한 결정적 척도를 조사하고 분석하였다. 이것을 정리하면 표 1과 같다. super-connectivity나 restricted connectivity 측면에서는 같고, toughness나 scattering number 측면에서는 $G(2^m,4)$가 Q_m보다 우수한 것으로 나타났다. $G(2^m,4)$의 toughness, vertex-integrity, binding number를 분석하는 것은 앞으로의 연구 과제이다. 다만 $G(2^3,4)$의 vertex-integrity와 binding number는 각각 6과 7/5로 Q_3의 5와 1보다 크다.

표 1 재귀원형군 $G(2^m,4)$와 하이퍼큐브 Q_m의 고장 감내도 비교 ($m \geq 3$)

		$G(2^m, 4)$	Q_m
노드의 수		2^m	2^m
분지수		m	m
super-connectivity	super-χ	yes	yes
	super-λ	yes	yes
toughness $t(G)$		$4/3 \leq t(G) \leq 5/3$	1
scattering number $sc(G)$		$2-m$	0
vertex-integrity $I(G)$		?	$O(2^m \log m/\sqrt{m})$
binding number $b(G)$		?	1
restricted connectivity	$\chi'(G)$	$2m-2$	$2m-2$
	$\lambda'(G)$	$2m-2$	$2m-2$

참 고 문 헌

[1] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.

[2] A.-H. Esfahanian, "Generalized measures of fault tolerance with application to n-cube networks," *IEEE Trans. Computers* **38(11)**, pp. 1586-1591, 1989.

[3] D. Kratsch, T. Kloks, and H. Muller, "Measuring the vulnerability for classes of intersection graphs," *Discrete Applied Mathematics* **77**, pp. 259-270, 1997.

[4] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," *Theoretical Computer Science* **244**, pp. 35-62, 2000.

[5] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군의 위상 특성: 서로소인 사이클과 그래프 Invariant," *한국정보과학회 논문지* **26(8)**, pp. 999-1008, 1999.

[6] F.T. Boesch and J.F. Wang, "Super line-connectivity properties of circulant graph," *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* **7**, pp. 89-98, 1986.

[7] 정성우, 김숙연, 박정흠, 좌경룡, "Recursive Circulant 그래프의 연결도," *한국정보과학회 봄 학술발표논문집* **19(1)**, pp. 591-594, 1992.

[8] C. Balbuena, A. Carmona, J. Fabrega, M.A. Fiol, "Superconnectivity of bipartite digraphs and graphs," *Discrete Mathematics* **197/198**, pp. 61-75, 1999.

[9] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, 5th printing, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1976.

[10] http://www.math.fau.edu/locke/unsolved.htm

[11] K.S. Bagga, L.W. Beineke, W.D. Goddard, M.J. Lipman, and R.E. Pippert, "A survey of integrity," *Discrete Applied Mathematics* **37/38**, pp.13-28, 1992.

[13] W.H. Cunningham, "Computing the binding number of a graph," *Discrete Applied Mathematics* **27**, pp. 283-285, 1990.

[12] A.M. Robertshaw and D.R. Woodall, "Binding number conditions for matching extension," *Discrete Mathematics* **248**, pp. 169-179, 2002.

박 정 흠

1985년 서울대학교 계산통계학과 학사. 1987년 한국과학기술원 전산학과 석사. 1992년 한국과학기술원 전산학과 박사. 1993년 한국과학기술원 정보전자연구소 연수연구원. 1996년 한국전자통신연구소 부호기술연구부 선임연구원. 1996년 ~ 현재 가톨릭대학교 컴퓨터·전자공학부 부교수. 관심분야는 알고리즘 설계, 그래프 이론

김 희 철

1980년 서울대학교 계산통계학과 학사. 1982년 한국과학기술원 전산학과 석사. 1987년 한국과학기술원 전산학과 박사. 1987년 ~ 현재 한국외국어대학교 컴퓨터 및 정보통신공학부 교수. 1997년 8월 ~ 1988년 8월 미국 Michigan State University 방문교수. 관심분야는 그래프 이론 및 응용, 알고리즘 설계와 분석, 상호연결망