대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 495-511. Sep 2002

학교수학에서의 매개변수의 역할 고찰[1)]

김성준[*] · 박선용[**]

Ⅰ. 서론

대수적 사고는 대수 기호와 분리되지 않은 상태에서 보통 인지되는데, 이는 대수 기호가 그 자체로 표현이 가능하면서 또한 형식화된 상태로 존재하기 때문이다. 그리고 그 대표적인 예가 '변수'이다. 변수는 산술적 사고와 대수적 사고를 구분 짓고 대수적 사고를 이해하는데 핵심적인 역할을 하는 개념으로, 대수 중심의 현대 수학에서 바탕이 되는 기본적인 개념 가운데 하나로, 변수 기호는 학교 수학에서 다양한 내용과 결부되어 함께 사용되고 있다 (우정호, 1998, p.243). 그러나 변수 개념은 그 중요성에 비해 학교 수학에서는 "함수 $y=f(x)$에서 x와 같이 여러 가지의 값을 갖는 문자를 변수라고 한다"(중1수학, 두산, p.144)와 같이 간단히 제시되는데 그치고 있으며, 이러한 대략적인 정의조차 이후 학교 수학에서 더 이상 다루어지지 않고 있다. 변수 개념은 이러한 상태에서 단지 암묵적으로 각각의 문제에서 경우에 따라 서로 다르게 적용되고 있는 것이 현실이다.

그러나 초등 수학에서 중등 수학으로의 이행에서 그 차이를 산술적 사고와 대수적 사고로 본다면, 변수 개념은 무엇보다 초등에서 중등으로의 이행에 있어서 핵심적인 내용으로 볼 수 있다. 다시 말해 중등 수학에서 본격적으로 진행되는 대수 학습에서 변수 개념에 대한 이해는 수학적인 표현을 의미 있게 받아들이기 위해서 우선적으로 요구되는 것으로, 이러한 변수 개념에 대한 이해가 원활하게 이루어지지 않을 경우 변화를 포함하는 수학적 안목이 결여되고 여러 가지 수학적 사고를 경험하지 못하게 된다. 따라서 변수에 대한 바른 안목을 갖는 것은 산술에서 대수로의 이행을 위한 기초가 되며, 여러 가지 수학적 사고의 의미를 이해하는데 있어서도 필수적인 것이 된다. 그러나 변수 개념에 관한 연구들은 많은 학생들이 변수의 의미를 정확하게 파악하지 못한 상태에 놓여 있다는 결과를 보여주고 있으며 (Küchemann, 1981), 또한 그러한 상태에서 학생들은 변수를 포함한 문제들을 학교 수학에서 접하고 있다. 학교 수학에서 이루어지는 변수 개념의 지도에 대하여 Freudenthal(1983)은 전통적으로 학교 수학에서 학생들이 형식적인 대수 언어를 잘 다룰 수 있도록 훈련시키는 것에만 치중해왔으며 의미 있는 문제를 해결하기 위해서 대수 언어가 어떻게 사용될 수 있는지를 이해시키는 것에는 소홀했음을 지적하고 있다(김남희, 1997, p.3, 재인용). 이처럼 학생들은 다양한 변수 개념을 학교수학에서 접하게 되는 반

* 서울대대학원
** 서울대대학원
1) 이 논문은 2000-2002년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.

면, 그 내용에 대한 강조는 단지 형식적인 조작을 통해 이루어지고 있다. 그 결과 학생들은 이해의 부족을 메우기 위하여 규칙과 절차를 암기하게 되고, 결국에는 수학은 규칙을 바탕으로 하는 것이고 수학을 학습하는 것은 규칙을 암기하는 것이며 이러한 활동이 수학의 본질을 나타낸다고 믿게 된다(우정호, 1998, p.251).

이러한 상황에서 Freudenthal(1983)이 제시한 변수 개념의 지도는 의미 있는 학습을 만들어 가기 위한 제안으로 볼 수 있을 것이다. 그에 따르면 변수 개념의 지도에서 '자리지기' (placeholder)를 통한 형식적인 변수 개념의 획득은 의미가 없으며, 변수는 실세계의 변화하는 현상을 정리하는 수단으로서, 그리고 다양한 현상 가운데에서 관찰되는 패턴을 일반화하는 수단으로서 그 본질이 파악되도록 한 다음 점진적으로 형식화하는 과정이 강조되어야 한다. 그렇다면 매개변수는 변수로서는 어떤 특성이 있으며 어떻게 지도되어야 할까? 매개변수가 특정한 상수가 되면 방정식 족, 함수 족이 특정한 방정식, 함수가 되는 것처럼 매개변수는 변수의 정적인 측면, 형식화된 변수의 측면을 가지고 있다. 변화하는 현상을 정리하는 맥락에서 접할 수 있는 변수의 동적 측면과는 대비되는 것이다. 매개변수는 변수의 정적인 의미와 함께 문제 해결에서 가변적인 역할 변화[2]를 가장 분명하게 보여준다. 곧, 매개변수에 대한 해석은 그 역할과 의미에 있어서 가변성(역동적 해석)을 바탕으로 하고 있다. 이러한 매개변수의 특징을 고려한다면, 실세계의 변화하는 현상을 정리하고 다양한 수학적 현상 가운데에서 관찰되는 패턴을 일반화해 보는 변수에 대한 학습이 충분히 이루어진 후, 역동적인 사고(관점의 전환 능력)를 기를 수 있도록 매개변수에 대한 지도가 이루어져야 한다고 볼 수 있다. 다시 말해, 문자역할이 문제를 해결하는 과정에서 어떻게 변화되어 가는가를 파악할 수 있도록 지도되어야 한다.

이 글은 학교수학에서 (암묵적으로) 다루어지는 매개변수에 대하여 그 학습-지도의 의미를 변수의 한 측면으로 논의하고 있으며, 실제로 학교수학에서 매개변수가 어떻게 사용되고 있는지, 그 과정에서 어떠한 역동적 변화가 일어나며 문제 풀이과정에서 이러한 변화가 어떻게 작용하는지, 그리고 그 변화를 해석하기 위해서는 어떤 관점이 필요한지 등을 살펴보았다.

II. 변수와 매개변수

학교수학에서 문자는 일반적으로 수를 그 대상으로 나타내지만, 대상을 제시하는 양상에 따라 문자는 여러 가지 의미를 나타내게 된다. 즉, 문자가 사용되는 전후 관계와 이를 적용하는 상황에 따라 문자의 의미가 달리 나타나게 되는데, 학생들이 변수 학습에서 경험하는 많은 어려움은 이러한 상황에 따르는 문자의 역할 변화와 의미의 변화를 이해하지 못하는 데서 비롯된다고 할 수 있다.

이러한 문자 해석과 관련해서 Usiskin(1988, pp.11-16)은 문자 사용과 그 의미에 따라 대수를 크게 4가지 카테고리로 구분하는데, 실제 대수 교과서를 보면 문자의 역할에 따라 이와 같은 개념 구분이 가능하다는 사실을 확인할 수 있다. 그에 따르면, 대수는 일반화된 산술로

2) 이 글에서 말하는 '변수의 가변적인 역할 변화'는 변수가 문제를 해결하는 과정에서 그 역할이 변화하는 것을 의미하며, 이것은 변수의 두 가지 근원 가운데 변수를 변하는 대상 가운데에서 파악하려는 동적인 해석과는 다른 것이다.

서의 대수, 문제 해결 절차를 연구하기 위한 대수, 관계를 연구하기 위한 대수, 그리고 구조를 연구하기 위한 대수로 구분된다. 그리고 각각에서 문자의 역할은 패턴을 일반화하는 도구로서, 방정식에서 사용되는 미지수로, 함수에서 변수로, 그리고 임의의 대상을 나타내는 기호로 사용된다. 다음 <표1>은 이러한 대수의 유형과 각각에서 사용되는 경우의 예를 교과서에서 찾아본 것이다.

<표1>에서 대수의 유형에 따라 사용된 문자는 그 예제에서 보듯이 서로 다른 상황에서 사용되고 있으며, 서로 다른 역할과 의미를 가진다. 그러나 현재 학교 수학에서 다루어지는 변수는 이러한 모든 것을 구분하지 않고 사용함으로써 이후 다양한 기호 사용과 함께 요구되는 수학적 사고를 가로막는 결과를 초래하고 있다. 따라서 무엇보다 이러한 대수의 유형에 따르는 구분이 선행될 때, 대수 학습에서는 변수의 다양한 의미들 곧, 미지수, 부정소, 매개변수 등이 학습 내용으로 등장할 수 있으며, 학생들은 문자 학습에서 이들간의 미묘한 차이를 구분할 수 있게 될 것이다.

한편 학교 수학에서 변수 기호 학습의 어려움은 <표1>에서 제시한 것처럼 문자 사용의 유형이 구분되지 않기 때문으로도 볼 수 있지만, 근본적으로 볼 때 변수가 변수 자신과 변수로 표현되는 여러 가지 대상에 동시에 사용되기 때문에 비롯된다. 이와 함께 초기에 문자가 어떤 특정한 값을 나타내는 미지수로 사용되는 상황과 결부되어 그에 대한 심상이 구성될 경우, 이러한 상황은 매개변수, 여러 가지 법칙이나 공식을 나타내는 변수, 변하는 대상을 나타내는 변수와 연결되지 않은 채, 형식적인 자리지기로 남게 된다. 이처럼 학교수학에서 변수가 단순한 자리지기로서 어떤 대상에 의해 채워지는 공간으로 간주된다면, 이 경우 핵심적인 수학적 사고 활동인 일반화된 법칙을 구성하고 표현하는 맥락 및 변하는 현상을 기술하는 맥락 등은 부차적인 것이 되고, 변수는 형식적인 조작의 대상으로 취급되는 문제점이 발생한다. 따라서 학교 수학에서 다루는 문자는 그 역할에 따라 정적인 사고가 아닌 보다 가변적인 사고를 요구하는데, 이것은 문자의 의미를 <표1>에서 제시한 것처럼 살펴봄으로써 어

대수의 유형	예제
일반화된 산술로서의 대수	위의 물음 (2) {(+2)+(-3)}+(+4), (+2)+{(-3)+(+4)}에서와 같이 세 수의 덧셈에서는 어느 두 수를 먼저 더한 합에 다른 수를 더하여도 그 합은 같다. 곧, 세 수 a, b, c에 대하여 (a+b)+c=a=(b+c)가 성립한다. 이것을 덧셈의 결합법칙이라고 한다. (중학교 수학1, 두산, p.75)
문제 해결 절차를 연구하기 위한 대수	농구 경기에서 우리 편은 모두 72점을 얻었다. 그런데 그 중에 43점은 후반전에서 얻은 점수이다. 전반전에서는 몇 점을 얻었는가? 전반전 점수: x, 후반전 점수: 43, 총점: 72 ⇒ x+43=72 ⇒ x=29(점) (중학교 수학1, 두산, p.127)
관계를 연구하기 위한 대수	정사각형의 타일 24개를 맞추어 직사각형을 만들려고 한다. 가로, 세로에 놓인 타일의 개수를 x, y라고 할 때, x, y 사이의 관계식을 구하고, 그 그래프를 그려라. (중학교 수학1, 두산, p.161)
구조를 연구하기 위한 대수	다음 계산을 하여라. -x-{-(4-x)-2(3-x)}-5x-3 (중학교 수학1, 두산, p.110)

<표1> 대수의 유형과 문자 사용의 예

느 정도 그 해결책을 찾아 볼 수 있을 것이다.

다음으로 <표1>에서 제시한 대수의 유형 및 문자 사용과는 다른 구분 곧, 대수식에서 문자가 어떤 형태로 사용되는지를 살펴보자. 오늘날 변수는 일반적으로 변역의 원소를 대입할 기호로 간주되며, 수, 점, 명제, 함수, 행렬, 벡터, 연산, 관계 등 다양한 대상을 나타내는 것으로 생각되지만 추상수학에서는 다음과 같은 대수식을 통해서 단지 어떤 성질을 만족하는 조작 기호로 간주된다(우정호, 1998, p.249). 다음 대수식에서 다양한 변수 사용의 의미를 생각해보자.

(a) $2x+3=1$ (b) $a+b=b+a$ (c) $y=mx+k$

(a)는 방정식, (b)는 항등식, 법칙 또는 성질, (c)는 함수식 또는 도형의 방정식으로 불린다. 이러한 명칭은 변수가 그 의미를 달리하며 사용되는 것을 반영하는 것으로, (a)에서 문자는 미지수를 나타내며 (b)에서 문자는 부정소(indeterminate)로 작용하고 있다. (c)에서 문자는 일반적으로 x, y는 변수로 해석되며, m, k는 상수로 해석된다. 그러나 엄밀한 의미에서 보면 m, k 역시 변수로 볼 수 있으며, 이처럼 정해지지 않은 상수의 의미를 갖는 변수를 매개변수(媒介變數, parameter)로 해석할 수 있다.

이 글은 학교수학에서 사용되는 이러한 변수 가운데 특히 매개변수의 역할과 의미에 관해 논의한 것이다. 일반적으로 매개변수에 대한 사전적인 정의는 다음과 같이 두 가지 형태로 구분되는데, 이 글에서 우리는 이러한 두 가지 형태의 정의를 모두 포함해서 매개변수를 논의할 것이다.[3)]

'두산세계대백과 EnCyber'의 정의[4)]

파라미터 또는 보조변수라고도 한다. 즉, $x=f(t)$, $y=g(t)$가 모두 t의 같은 변역에서의 함수이며, t의 어떤 값에 대하여 정해지는 x의 값에, 같은 t의 값에 대하여 정해지는 y의 값을 대응시키면, x에서 y로의 대응이 정해져서 y는 x의 함수로 생각할 수 있다. 이와 같은 경우, 실제로는 $x=f(t)$, $y=g(t)$에서 t를 소거한 식을 만들면 되며, t를 매개로 하여 x와 y의 함수관계가 정해진다. 이 t를 매개변수라고 한다. 기하학적으로 t의 값에 따라 점 (x, y)가 정해지므로, 일반적으로 점 (x, y)는 한 곡선을 그리게 된다.

'한국 브리태니커 온라인 사전'의 정의[5)]

수학의 변수 가운데 하나. 가능한 범위 안에서 그 값이 달라지는 변수에 따라 문제는 여러 경우를 나타내게 된다. 매개변수로 표현된 방정식을 매개변수방정식이라 한다. 기울기와 절편으로 표현된 직선방정식의 일반형인 $y=mx+b$는 m과 b가 매개변수인 매개변수방정식의 한 예이다. 기울기 $m=2$와 y절편 $b=3$이 매개변수에 주어질 때 생기는 식 $y=2x+3$은 더 이상 매개변수방정식이 아니고 특수한 직선의 방정식이다.

고등학교 수학을 학습한 학생들에게 있어서 보통 매개변수는 위의 정의 가운데 첫 번째 경우 곧, 곡선 및 곡면을 표현하기 위한 수단으로 받아들여진다. 그러나 매개변수는 위의 두 번째 정의에서 보듯이 매개변수방정식의 형태

---

3) 정의에서 보듯이 영어 표현은 두 가지 형태의 정의에서 사용되는 문자를 parameter로 나타내고 있지만, parameter가 매개변수라고 번역될 때는 '媒介'라는 표현에서 알 수 있듯이 두 번째 정의보다 첫 번째 정의(매개변수방정식)로 받아들이기 쉽다. 따라서 두 번째의 경우에는 parameter의 또 다른 번역인 조변수(助變數)가 어떤 의미에서는 적합해 보이며, 이 용어의 사용 또한 고려해보아야 되지 않을까 싶다.

4) http://100.naver.com/search.naver?adflag=1&cid=AD1016013580538&where=100&command=show&mode=m&id=60408&sec=1, '두산세계대백과 EnCyber'에서 인용.

5) http://preview.britannica.co.kr/bol/topic.asp?article_id=b07m1776a, "매개변수" 한국 브리태니커 온라인 사전에서 인용.

로 제한되지 않으며, 매개변수의 의미와 역할을 제대로 파악하는 것은 변수 학습에서 중요하게 다루어져야 한다. 이와 같은 맥락에서 우정호(1998)는 매개변수를 상수로 파악하는 현재 지도 상황의 문제점을 지적하고 있다.

> 방정식 ax2+bx+c=0나 함수식 y=ax+b 등에서 a, b, c를 상수라고 부르는 용어상의 문제 역시 방정식의 미지수나 함수식, 일반적인 법칙이나 공식을 나타내는 부정소(indeterminate)가 변수가 아니라는 오개념을 형성하게 한다는 점 또한 배제할 수 없을 것이다. 위의 식에서 a, b, c는 아직 정해지지 않은 상수를 일반적으로 나타내고 있는 부정소인 변수이며, 이를 상수라고 지도하는 것은 잘못된 것이다(우정호, 1998, p.253).

그리고 매개변수에 대한 이러한 해석은 고등학교 대수 학습에서 학생들이 경험하는 다양한 어려움을 반영한다. 따라서 우리는 이 글을 통해 문자를 상수와 변수만으로 구분하는 대신 새롭게 매개변수의 역할과 의미를 이들과 비교하면서 제기할 것이다.

먼저 우리는 하나의 대상을 해석하는데 있어서 서로 다른 의미와 역할을 고려해서 각각의 경우에 따라 서로 다르게 사용해야 할 때 경험하는 어려움에 대하여 생각해보자. 그 대표적인 예는 <표1>에서 보았듯이 대수의 유형에 따라 다양하게 사용하는 문자(변수) 사용의 경우이다. 이러한 문자 사용의 경우처럼 어떤 대상이 명시적으로든 암묵적으로든 학습-지도 과정에 도입된다고 할 때, 우선적으로 요구되는 것은 그 대상에 대한 교수학적인 분석, 역사적인 분석과 구체적인 예들을 나열하는 것이다.

Freudenthal(1983)이 제시한 매개변수에 대한 교수학적인 분석은 이러한 맥락에서 그 의미를 찾아볼 수 있다. 그는 매개변수를 세 가지 의미로 해석하고 있는데, 이것은 앞에서 제시한 사전적 정의를 모두 포함하고 있다. 첫 번째 경우는, 매개변수 a에 의해서 함수 fa(x)=x+a를 얻는 것처럼, 필요할 때 말하자면 깨워서 고려할 수 있는 잠자는 이차적인 독립변수로 보는 것이다. 여기서 이 함수는 매개변수 a에 좌우되므로 그 자체가 종속변수와 같은 역할을 한다. 따라서 fa(x)=x+a와 같이 나타낼 때 함수 f(a)=fa 또는 a→(x→x+a)가 정의된다. 두 번째는, 기원상 종속변수이면서 외형상 독립변수로서 도형의 구조를 결정하는 경우이다. 이를테면, 원의 함수로서의 원의 반지름이나 포물선 y2=4px의 모양을 결정하는 매개변수 p 등이 그러한 것이다. 세 번째 경우는, 곡선이나 곡면 등의 매개변수 표현을 생각해 볼 수 있다. 이를테면, xy-평면에서 단위원 x2+y2=1은 정점으로부터의 호의 길이 s에 의해 x=coss, y=sins로 매개변수 표현이 된다(우정호, 1998, p.356, 재인용).

한편 다음 매개변수의 역사적인 분석을 통해서 우리는 매개변수가 대수의 발달에서 그리고 기하와 자연과학에서 얼마나 중요한 역할을 했는지를 간접적으로 알 수 있으며, 이와 함께 현대수학의 모든 영역에서 사용되고 있는 변수 개념에는 사실상 매개변수가 핵심에 놓여 있음을 알 수 있다.

대수학이 특정한 방정식의 풀이를 다루던 시대에는 변수는 특정한 수를 나타내는 미지수로 사용되었으나, Viète 이후 일반형으로 표현된 방정식에서 일반해를 구하게 되면서 변수는 임의의 수를 나타내는 개념이 되었다. 문자는 곧 임의의 함수를 나타내는 데 사용되게 되었다(우정호, 1998, p.248). Viète는 수치로 주어진 양을 기호로 대신하여 나타낸 최초의 수학자였다. 그의 이러한 업적을 현대적인 의미로 표현하면, 그는 매개변수방정식, 곧 문자 계수를 가지는 방정식의 발명가라고 할 수 있다. Viète

이전까지 문자는 대수에서 구하고자 하는 미지의 양을 기호화하는데 사용되었다. 그는 그것들을 모음으로 표기하기로 하였다. 그리고 주어진 수, 즉 자료로서 알려져 있거나 주어진 것들에 대해서는 자음으로 표기하였다. 이러한 아이디어에 힘입어, 이제 모든 방정식 문제들은 정확하게 서술된 알고리즘에 따라 다루어질 수 있게 되었다. 따라서 매개변수의 도입은 일반적으로 수학에서 그리고 특별히 대수에서 강력하게 추구해온 일반화를 향한 출발점에 놓여 있다. Boyer(1985)는 Viète의 이러한 업적을 Diophantus의 것과 비교하여, Viète의 매개변수에 대한 아이디어는 Diophantus가 제시한 각기 다른 문제와 그 해결 방법을 일반적인 계산 과학으로 전환시킨 출발점이라고 하였다(Sfard, 1995, p.24, 재인용). 이제 산술은 구체적인 수의 과학인 반면, 매개변수 아이디어에 의해 제시된 방정식 이론은 대수를 유형의 과학으로 진일보시켰으며, 현대적인 구조 대수로의 기초를 형성하였다(Sfard, 1995, p.24).

우리는 Viète에 의해 이루어진 매개변수의 아이디어가 대수방정식, 함수적 사고, 기하, 자연과학 등에 미친 영향을 <표1>에서 살펴본 Usiskin의 대수의 유형과 서로 관련해서 다음 <표2>에서처럼 생각해볼 수 있을 것이다.

먼저 Viète의 아이디어는 대수적 지식 전체를 압축해서 구체화시킴으로서 대수에서 기호로 표현된 방정식은 그 자체가 탐구 대상이 되었으며, 구체적인 연산 문제와 함께 형식적인 조작 방법에 따라 해결되게 되었다. 이 경우 매개변수 아이디어는 <표1> 대수의 유형에서 첫 번째와 두 번째를 함께 관련지어 생각해볼 수 있다. 곧 문제 해결절차를 연구하기 위한 대수 영역에서 매개변수가 등장함으로써 문제는 일반화되어 표현되었으며, 이 일반화된 형태를 형식적으로 조작함으로써 방정식 등 대수의 이론은 비약적인 발달을 이루게 되었다.

Viète의 매개변수 아이디어의 역할	대수의 유형 (Usiskin, 1988)
대수방정식 (현대 추상대수)	일반화된 산술로서의 대수 문제해결절차를 연구하기 위한 대수
함수적 사고 (미적분학)	관계를 연구하기 위한 대수 구조를 연구하기 위한 대수
기하 (해석기하)	구조를 연구하기 위한 대수
자연과학 (물리 등)	관계를 연구하기 위한 대수

<표2> 매개변수 아이디어와 대수의 유형과의 관련성

두 번째로 매개변수에 대한 아이디어는 함수적 사고를 가능하게 하였다. 함수는 특정한 양에 대한 수보다 수 전체에 대한 사고를 동시에 할 수 있는 능력을 요구한다. 따라서 매개변수의 도입은 계산 과정을 구조적으로 이해하는데 있어서 필연적인 관점의 변화를 요구하게 되었다. 이것은 <표1>의 세 번째와 네 번째 영역과 관련된다. 예를 들어 $ax+b=0$에서 매개변수 a, b의 역할은 모든 일차방정식을 표현함으로써 각각의 일차방정식에 대한 풀이보다는 전체 일차방정식을 다룰 수 있는 계기를 마련하였다는데 있으며, 이는 곧 매개변수 a, b와 변수 x사이의 관계를 해석하는 능력과 함께 전체 구조를 묶어서 볼 수 있는 능력을 요구하는 것이다.

세 번째, 기하의 경우 기본 대상을 시각적으로 표현할 수 있다는 점에서 어느 정도 구조적이었다고 할 수 있었으나[6] 보다 높은 일반성을

6) 문자를 사용하여 변수를 나타내는 것은 그리스 기하에 연유한다. 그러나 그리스 기하에서 사용된 변수는 지시적인 수단이 아닌 논리적인 수단에 한정되어 사용되었으며, 이로 인하여 도형을 문자를 사용하여 나타내는 기하학적인 방식의 변수는 알고리즘 언어의 탄생에 이르지 못하였다(우정호, 1998, p.248).

확보하기 위해서는 구체적인 삼각형이나 사면체로부터 분리되어야 했으며, 이러한 기초적인 대상이 지배하는 구조와 변형을 가능하게 한 것은 매개변수의 아이디어에서 비롯된다. 이것은 <표1>의 네 번째 경우 곧 구조를 연구하기 위한 대수에서 대상보다 조작에 강조를 두는 것과 관련된다. 다시 말해 Viète의 기호 표현이 등장한 이후 17세기 Descartes 등에 의해 이루어진 해석기하의 발달은 이러한 기하 영역에 매개변수가 어떤 영향을 미쳤는가를 미루어 짐작하게 하는 부분이다.

마지막으로 매개변수는 새로운 종류의 자연과학을 출현시켰다. 매개변수로 인하여 역사에서 처음으로 수학은 일정한 양이 아닌 양의 변화를 다루는 도구를 사용할 수 있게 되었으며, 물리적 운동을 비롯한 물리학에서의 현상들을 정확한 수학적 언어로 해석할 수 있게 되었다. 이러한 변화는 <표1>에서, 관계를 연구하기 위한 대수에서 매개변수 아이디어가 도입됨으로써 이루어졌다고 볼 수 있다.

이처럼 매개변수의 아이디어는 대수뿐만 아니라 기하, 물리학 등에서 획기적인 사고의 전환을 가져왔다. 그러나 매개변수가 학교 수학에 도입될 때 이러한 아이디어는 교재나 교사에 의해 주목받지 못하고 있으며, 이것은 구체적인 문제에서 매개변수가 포함된 문제로 이행하는 실제 지도 과정에서 발생하는 개념적 변화를 의미하는 것으로, 3장은 이러한 매개변수의 역동적 변화에 대하여 다루고 있다.

III. 매개변수의 역동적 변화 분석

학교수학에서 문자는 다양하게 사용된다. 그러나 실제 학교수학에서 사용하는 문자는 미지수와 변수로 제한되어 있다. 미지수의 경우 중학교 대수의 시작과 함께 도입되며, 변수는 중학교 1학년 함수 단원에서 정의된다. 대수에서 사용되는 상수 역시 문자로 표현되지만 실제 그것은 문자라기보다는 수의 의미로 사용된다. 그러나 우리가 상수로 알고 있는 문자는 미지수, 변수와는 구별되어야 하고, 실제로 많은 경우에 그 문자는 매개변수로 보아야 한다.[7] 이러한 구별은 미묘하며, 대수식의 문맥과 그 응용에 많은 부분을 의존하기 때문에 쉽게 파악되기 어렵다. 학교수학에서 매개변수는 방정식, 함수, 문장제 등을 다룰 때 명시적으로 또는 암묵적으로 나타난다. 우리는 먼저 학교수학에서 매개변수[8]가 사용되는 다양한 맥락을 살펴봄으로써 매개변수가 미지수, 변수 등과 함께 방정식, 함수, 문장제에서 어떻게 표현되는지, 그리고 매개변수에서 역동적 변화가 어떻게 일어나는지, 그 변화를 분석하는 도구로는 무엇이 있는지를 살펴볼 것이다. 다음에서 제시한 다섯 가지 예는 학교수학에서 다루고 있는 매개변수 표현의 대표적인 경우로 볼 수 있다.

(a) 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

(조태근 외 6인, 1998, p.153)

(b) 삼차함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ 중

7) 문자의 기본적인 사용에 있어서 학생들이 경험하는 어려움에 대해서는 많은 연구가 있어왔지만, 매개변수를 다루는데 있어서 나타나는 어려움을 다룬 연구들(Bledy-Vinner(1994), Furinghetti, and Paola(1994))은 최근에 와서야 시작되었다.

8) 매개변수는 교육과정이나 학교수학 교과서에서 제시된 용어는 아니다. 그러나 실제로 학생들은 문제집이나 자습서를 통해서 매개변수라는 용어를 접하게 되고, 함수와 도형의 방정식 등에서 매개변수를 이용한 문제풀이방법을 학습하게 된다.

에서 가장 간단한 함수인 $y=x^3$의 그래프에 대하여 알아보자. 여러 가지 x의 값에 대응하는 y의 값은 다음 표와 같다.

(조태근 외 6인, 1998, p.189)

(c) 공기 중에서 기온이 t°일 때 소리의 속도를 v m/초라고 하면, v=331+0.6t인 관계식이 성립한다. 소리의 속도가 340m/초일 때, 기온은 몇 도인가? (김연식 · 김흥기, 2000, p. 135)

1. 매개변수와 미지수/변수의 구분

위의 예에서 어떤 것은 매개변수를 의미하고 어떤 것은 미지수나 변수를 의미한다. 이 구분은 어떻게 이루어지는가? 학교수학에서 대부분의 매개변수는 식이나 방정식에서 암묵적으로 사용되고 있다. 예를 들어, 교과서에서 다루는 문제 가운데, 직선 등의 도형의 방정식에서 한 점을 잡아야 하는 경우가 많은데, 이럴 경우 문자를 사용해서 표현하게 되는데 이것들은 모두 매개변수의 한 형태로 볼 수 있다. 다음 문제에서 그 풀이 과정을 살펴보면 자연스럽게 매개변수 a가 등장하면서 시작하고 있다.

포물선 $y=-x^2+4x$에서 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

풀이. $f(x)=-x^2+4x$라 하고 접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+4a)$라 하면,...

(조태근 외 6인, 2001, p.146)

또한 교과서에서 설명하고 있는 방정식 및 함수들은 많은 경우 일반형을 다루고 있는데 이 때 일반형을 표현하기 위해 사용된 문자들은 앞서 사전적 정의에서 보았듯이 모두 매개변수로 볼 수 있을 것이다. 중학교 수학에서부터 다루는 방정식과 함수에서는 이러한 매개변수를 일반형의 표현에서 사용하고 있다.

함수 $y=ax(a\neq0)$의 그래프를 알아보자.

(임재훈 외 7인, 2001, p.152)

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면,...

(조태근 외 6인, 1998, p.93)

이처럼 매개변수가 암묵적으로 학교수학에서 다루고 있지만, 매개변수에 대한 용어는 교육과정에서 공식적으로 다루어지지 않는다.[9] 그러나 학생들이 자주 사용하는 참고서 등에서는 매개변수에 대하여 명시적으로 주어지고 있으며, 이러한 매개변수의 사용은 문맥 가운데에서 쉽게 찾아 볼 수 있을 것이다. 첫 번째 예 (a)는 참고서에 등장하는 것으로, 어떤 것이 매개변수인지를 명시적으로 밝히는 경우이다. 그러나 참고서에서 다루는 매개변수는 도형의 방정식 특히 원의 방정식 등에서 매개변수방정식의 맥락으로 다루어지고 이러한 사용은 매개변수를 2장에서 제시한 사전적 정의 가운데 첫 번째 것으로 제한한다. 다음으로 그래프 축의 이름으로 x와 y의 일상적 사용과 f(x)라는 표기

9) 교육과정에서 매개변수를 명시적으로 다루고 있지 않는 이유를 생각해보면, 일단은 변수 개념이 명확하게 구분되어 제시되지 않는데서 그 원인을 생각해 볼 수 있을 것이다. 이와 함께 매개변수 개념은 변수의 다양한 의미 가운데 한 측면에 지나지 않는 반면, 그 개념을 파악하는 과정은 미지수, 변수 등이 복합적으로 작용하고 있어서 그 결과 1차원적인 해석이 아닌 2차원적인 해석(2단계 함수 또는 이중 구조라는 용어는 매개변수를 해석하는 관점으로 앞으로의 논의를 통해 제시될 것이다)을 요구하기 때문에 학습-지도 과정이 결코 쉽지 않다. 그러나 이러한 이유로 매개변수가 대수 학습-지도에서 제외된다면 이것은 또한 학교수학에서 변수 개념을 지도하는 과정에서 계속해서 어려움을 유발시킬 것이다. 따라서 이 글은 암묵적으로든 명시적으로든 매개변수에 대한 인식이 학교수학에서 필요하다는 주장을 하고 있다.

의 의미, x값이 변함에 따른 y 값의 변화를 포괄하는 방정식과 함수의 기본적 형태에서는 매개변수의 구분은 일반 상식에 근거한다. 예(b)와 같은 경우에 있어서, 이러한 지식에 기초할 경우, r, m은 매개변수이고 x와 y는 변수이다. 예(c)의 경우에는 '삼차함수'라는 표현과 여러 가지 x값에 대응하는 y의 값이라는 표기에 의해 a, b, c, d는 매개변수이고 x, y는 변수임을 알 수 있다. 마지막으로 (d)의 예에서처럼 문제를 형식화시키는 과정에서 구별된다. 예(d)에서 주어진 문자들은 매개변수로 볼 수 있고, 찾아야 할 문자들은 미지수에 해당한다.

2. 매개변수의 역할 변화(역동적 해석)

매개변수에서 문제가 되는 것은 문자의 의미가 문제를 푸는 과정에서 매개변수에서 미지수로 또는 변수로 그 역할을 달리 하기도 하며, 경우에 따라서는 변수가 매개변수로 역할하는 등 매개변수가 포함된 식에서 다양한 역할 변화가 일어난다는 것이다. 그러나 학교수학에서 이러한 사실은 무시되고 있으며, 어떤 면에서 보면 이러한 변화에 대한 인식은 교사들조차 쉽게 인식하지 못하는 부분이다. 다음에서 우리는 이러한 매개변수의 역할 변화의 몇 가지 경우를 살펴보고, 이러한 변화를 파악하는 것과 문제를 해석하는 능력 사이에는 어떤 관련이 있는지를 살펴보고자 한다.

(1) 매개변수→미지수

먼저 생각해 볼 문제는 매개변수가 문제에서 미지수로 해석되어야 하는 경우이다. 학교수학에서 우리는 다음과 같은 경우를 자주 접하게 된다. 이러한 문제에서 대다수 매개변수를 처음부터 상수로 생각하고 문제를 해결하는데 이것은 앞서 지적했듯이 잘못된 것이며, 만약 이럴 경우 학생들은 동일한 문제에 다른 조건이 주어진 문제에서도 앞에서 풀었던 답을 제시하는 실수를 범하게 된다. 이것은 매개변수에 대한 해석이 결여된 상태에서 매개변수를 고정된 값으로 해석할 때 일어난다. 그 예로 다음 문제를 생각해보자.

x에 대한 이차방정식 $x^2-(m+2)x+(m+4)=0$의 두 근이 모두 양수이고, 한 근이 다른 근의 두 배일 때, m의 값을 구하여라. (조태근 외 6인, 1998, p.203)

이 문제에서 우리는 x를 미지수, m을 매개변수로 볼 수 있다. 그러나 문제를 푸는 과정에서 매개변수 m은 미지수로 간주되고, m=4라는 값을 알아내야 한다. 이것은 두 근과 계수와의 관계에서 m을 구하는 것인데, 이때 m은 잠시 동안 미지수로 간주되어야 한다. 그러나 그 후에 x와 m은 그들의 본래 역할(각각, 미지수와 매개변수)을 하게 되고, 다시 다른 조건(두 근이 모두 양수이고, 한 근이 다른 근보다 2만큼 크다)이 주어지면 또 다시 이러한 역할 교환이 이루어져야 한다. 다른 예를 하나 들어보자.

등식 $2x^2+x+5=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 a, b, c의 값을 정하여. (임재훈 외 7인, 2002, p.79)

이 문제는 일명 '미정계수법' 문제로 불린다. 이 문제는 우선, x에 적당한 수치를 대입하는 것에 의해 a, b, c를 구하는 '수치대입법'을 통해 문제를 해결할 수 있는데, 그 경우 x는 매개변수의 역할을, a, b, c는 미지수의 역할을 하는 것으로 볼 수 있다. 또한 이 문제는 양변의 계수를 비교하는 '계수비교법'에 의해서 해결할 수 있는데, 이 경우는 a, b, c가 매개변수와 미

지수의 역할을 동시에 수행하게 된다. 즉, 계수비교 전에는 매개변수로 역할하지만 계수비교의 과정에서서는 a, b, c를 구하기 위해 미지수로서 그 역할을 바꾼다고 볼 수 있다.

(2) 매개변수→미지수 & 변수→매개변수→변수

두 번째 경우는 처음보다 복잡한 형태로 역동적 변화가 일어난다. 매개변수가 미지수로 역할 변화가 일어나는 것은 ①의 경우와 유사하지만, 다음 예에서 보듯이 변수가 또한 문제풀이 과정에서 잠시동안 매개변수의 역할을 한다는 점에서 ①에서 설명한 내용과는 차이가 있다.

점 (1, 4)를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식을 구하여라.

(조태근 외 6인, 1998, p.139)

위의 예는 학교수학 교과서 어디에서나 등장하는 문제로 이와 유사한 형태는 도형의 방정식을 비롯해서 함수, 행렬, 복소수 등 여러 영역에서 문제를 풀기 전에 먼저 답의 형태를 설정해야 하는 경우에서 찾아볼 수 있다. 예에서 이 문제를 푸는 것은 방정식 $y=ax+b$ 를 쓰는 것으로 시작한다. 이 방정식은 전후 관계나 상황으로부터 많은 해석을 할 수 있다. 4개의 미지수를 가진 방정식인가? 3개의 변수를 가진 함수인가? 문제상황은 직선의 방정식을 결정하는 것이므로, 우리의 일반 상식에 따라 x, y는 변수로, 반면에 a, b는 매개변수로 정의된다. $y=-2x+b$ 라는 방정식을 얻기 위해 a에 -2를 대입하는 과정이 이어진다(이 식에서 문자의 역할은 그대로 유지되고 있다). 이제 특정한 b의 값을 구한다. 이것은 b가 매개변수 x, y에 그것의 값을 의존하는 미지수가 되었음을 가리키는 것이다. 우리는 x, y자리에 1, 4에 해당하는 값을 대입하고 미지수가 b인 방정식 $4=-2\times1+b$을 푼다. 그리고 마지막으로 이 문제풀이에서 a, b는 찾아낸 상수로 대체되고, 그리고 답으로 제시된 직선의 방정식 $y=-2x+6$ 에서 x, y는 다시 변수의 역할을 한다.

(3) 매개변수→변수 & 변수→매개변수→변수

세 번째 경우는 매개변수가 변수처럼 해석되는 경우이다. 이러한 변수와 매개변수의 상호작용은 극한과 미적분학에서 그 예를 찾아볼 수 있다.

대표적인 예로 도함수의 정의를 생각해 볼 수 있다.

함수 f(x)에서 x는 변수이다. 도함수 f'(x)를 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 로 정의하는데, 이것은 각 x에 대해 h가 0으로 갈 때, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 의 극한으로 파악하는 것이다. 이러한 정의는 문자의 역할이 변하는 다음의 두 과정으로 구성되어 있는데, 그 첫 번째는 x가 매개변수이고 h가 변수인 극한과정이다. 즉, 극한과정에서 관심이 우선은 h에 있음을 알 수 있다. 그 후의 과정에서, 우리는 서로 다른 x 값에 따라 다른 도함수 값을 구할 수 있으며, 그 결과 x를 변수로 하는 함수인 도함수 f'(x)를 얻게 된다. 이러한 역동적인 변화를 파악하는 능력은 매개변수 h와 변수 x를 경우에 따라 그 역할을 바꾸어 생각하는 것을 요구한다. 이러한 매개변수의 역동적인 해석은 함수의 극한에서 다음과 같은 문제에서도 찾아 볼 수 있다.

다음과 같이 정의된 함수 f(x)의 그래프를 그리고, 불연속인 점을 찾아라.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

(조태근 외 6인, 2001, p.117)

이 문제는 전체적으로 볼 때 x는 변수, n은 매개변수[10]로 사용되고 있다. 그러나 값 또는 범위를 지정해줄 때의 x는 각각의 상황에서 매개변수로 해석되어야 하며 정해진 x의 범위 안에서 $n \to \infty$ 로 가는 극한과정이 이루질 경우 n은 변수로 그 역할을 전환하게 된다. 그 후 f(x)를 실수 전체에서 바라보게 될 때 x는 변수로 돌아오게 된다. 이처럼 두 문자 n과 x를 매개변수 개념과 함께 역동적인 변화로 파악하는 것은 복잡한 유형의 문제를 수월하게 풀 수 있는 해결책이다. 이제, 위의 두 예를 바탕으로 학생들이 어려워하는 적분문제의 유형을 분석해보자.

함수 F(x) = $\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$ 의 도함수를 구하여라. (박두일 외 3인, 2000, p.293)

t가 변수일까 아니면 x가 변수일까?

F(x) =

$$\int_0^x (x\cos t - t\cos t)dt = \int_0^x (x\cos t)dt + \int_0^x (t\cos t)dt$$

$\int_0^x (x\cos t)dt$ 에서 x는 변수가 아니다. 매개변수 혹은 상수이다. t에 관한 적분을 생각하면 x는 상수로 간주한다. 더 정확히 말자하면, t가 변수이며 x가 결정되면 $x\cos t$ 함수족이 하나의 함수로 결정되므로 x는 매개변수이다.

F(x)

$$\int_0^x (x\cos t - t\cos t)dt = \int_0^x (x\cos t)dt + \int_0^x (t\cos t)dt$$
$$= x\int_0^x \cos t dt + \int_0^x (t\cos t)dt$$

x를 상수로 간주하면서 위와 같은 식을 세울 수 있으며 그 결과로 x에 관한 함수 x, $\int_0^x \cos t dt$ 와 $\int_0^x (t\cos t)dt$ 세 개를 얻을 수 있다.

물론, $\int_0^x \cos t dt$ 와 $\int_0^x (t\cos t)dt$ 에서, t는 적분의 과정 속에서는 변수로 사용된다고 할 수 있지만, 전체적으로는 x가 변수로서의 역할을 수행한다.

이제 양변을 x에 관해서 미분해서 정리하면 F'(x) = $[\sin t]_0^x + x\cos x - x\cos x = \sin x$ 가 된다.

풀이과정에서 알 수 있듯이, x가 상수로 간주되었다가 다시 변수로 그 역할을 역동적으로 변화한다는 것을 파악해야만 이 문제를 수월하게 해결할 수 있다.

(4) 매개변수→상수→매개변수→미지수

매개변수는 아직 정해져 있지 않은 상수의 의미로 해석되면서 많은 풀이과정에서 상수로 사용된다. 아직 정해져 있지 않지만 상수가 될 변수이므로 상수로 간주하면서 이차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정은 매개변수는 변수이지만 상수로 취급하는 대표적 예라고 할 수

10) n이 결정되면 함수 족 $\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 이 특정한 함수가 된다는 의미에서 n은 매개변수이다.
예를 들어, n = 1일 경우 $\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 은 $\frac{x^3}{1+x^2}$ 로 결정된다.

있다. 다음의 문제[11]를 살펴보자.

다음 등식을 만족하는 상수 a의 값을 구하시오.

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x - 10$$

(정봉화 외 2인, 2001, p.191)

이 문제를 푸는 과정과 그때의 문자의 역할은 다음과 같다.

(step1)

f의 부정적분을 F라고 하면,

$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x - 10$ 이고 양변을 미분하면, f(x) = 2x - 3 이다.

이 경우, 매개변수 a는 상수로 다루어지고 있다. 그리고 t는 전체적으로는 매개변수의 역할을 하지만, 적분의 과정에서는 변수로 다루어지고 있다.

(step2)

f(x) = 2x - 3을 (step1)의 식에 대입한다.

$$\int_a^x (2t-3)dt = [\ t^2 - 3t]_a^x = x^2 - 3x - (a^2 - 3a) = x^2 - 3x - 10$$

을 얻는다.

이 경우 a는 매개변수 역할을 하며, t는 첫 번째 식에서 t축에서 적분되는 의미로 사용되거나, 첫 번째 식에서 두 번째 식으로 갈 때는 변수의 역할을 하지만 전체적으로는 x가 변수의 역할을 하고 있다.

(step3)

(step2)에서 $a^2 - 3a = 10$ 임을 알았으므로 계산에 의해, a= 5 또는 a= -2이다.

이 경우 a는 미지수로서의 역할을 하게 된다.

(5) 매개변수 혹은 변수

문자의 역할을 선택할 수 있는 경우도 있다. 다음과 같은 경우를 살펴보자.

$2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 를 인수 분해하여라. (신현성 · 최용준, 2002, p.98)

여러 문자가 나오는 인수분해의 경우, 한 문자를 선택하여 내림차순으로 정리해 보도록 학교수학에서는 가르쳐지고 있다. 그리고 보통은 가장 낮은 차수를 가진 문자에 관해 정리하는 것이 인수분해를 수월하게 할 수 있다고 지도되고 있는데 위의 문제는 x와 y가 동일하게 최고차항이 2차이므로 어떤 문자에 관해 정리하던지 관계는 없다. 우선, 주어진 식을 x에 관해서 정리한 후 인수분해하면 다음과 같다. 이 경우, x는 변수로서 y는 매개변수로서 사용되고 있다.

$$\begin{aligned}
&2x^2 - xy - y^2 4x + y + 2 \\
&= 2x^2 - (y+4)x - (y^2 - y - 2) \\
&= 2x^2 - (y+4)x - (y-2)(y+1) \\
&= \{2x + (y-2)\}\{x - y + 1\} \\
&= (2x + y - 2)(x - y - 1)
\end{aligned}$$

이번에는 주어진 식을 y에 관해서 정리해보자.

---

11) 미지수 a의 값을 구하지만 상수 a로 표현한 것은 a를 구한 결과가 상수값이기도 하지만 이미 구했다고 보는 '분석법'의 사고양식을 요구한다.

$$
\begin{aligned}
&2x^2-xy-y^2-4x+y+2\\
&=-y^2+(-x+1)y+(2x^2-4x+2)\\
&=-y^2+(-x+1)y+2(x-1)^2\\
&=\{y+2(x-1)\}\{-y+(x-1)\}\\
&=(y+2x-2)(-y+x-1)
\end{aligned}
$$

이 경우는 위의 경우와 대칭적으로 y가 변수이며 x는 매개변수의 역할을 하는 것이다. 문자의 역할을 선택해야 하는 문제는 학생들에게 문자 의미의 역동성에 대한 이해와 활동을 동시에 요구하고 있다.

3. 매개변수의 역동적 변화에 대한 두 가지 해석

매개변수 개념을 이해하고 그리고 그 개념을 미지수, 변수 등과 구분하는데, 학생들이 경험하는 어려움을 분석하기 위해서 우선 수학 사회에서 이해하고 있는 매개변수와 미지수, 변수 사이의 명확한 구분이 요구된다. 매개변수 개념을 이해하는 것에는 다음 두 가지 요소가 들어있다. 첫째, 어떤 것은 매개변수이고 어떤 것은 미지수, 변수인지 문맥(context)으로부터 결정하는 것으로, 이것은 (1) 매개변수와 미지수/변수에서 논의하였다. 두 번째는 매개변수와 미지수, 변수의 다른 역할들을 이해하는 것으로, (2)매개변수의 역동적 변화에서 그 내용을 다루었다. 이제 우리는 (1), (2)에서 다루었던 내용들을 해석하는 두 가지 관점에 대하여 생각해보고 이러한 관점이 어떻게 매개변수의 역동적인 변화를 설명하는지 살펴볼 것이다(Bloedy-Vinner, 2001, pp.180-181).

일반적으로 학생들에게 매개변수가 포함된 문제에서 매개변수의 역할에 대하여 물어보면, 학생A는 상수(constant)로, 학생B는 변수(variable)로 답하는 것을 보게 된다. 그리고 어떤 학생의 경우 "그것은 상수 값을 갖는 변수"라는 답을 함으로써 그들이 알고 있는 상수와 변수에 관한 지식을 동시에 표현하기도 할 것이다. 이러한 반응에서 알 수 있듯이 매개변수는 상수가 되기도 하고 동시에 변수로 역할하는 다양한 측면이 존재한다. 매개변수는 상수처럼 느껴지나, 또한 동시에 변한다. 매개변수의 수학적 의미를 면밀히 검토해보면 이러한 심리적 불일치가 왜 일어나는지 알 수 있을 것이다.

매개변수의 역동적 변화에 대한 해석으로 먼저 생각해 볼 수 있는 것은 매개변수를 2단계 함수(second order function)로 파악하는 것이다. 매개변수가 포함된 방정식이나 함수는 엄밀하게 말하면 방정식족 또는 함수족을 나타내는데, 매개변수에 수를 대입함으로써 특정한 방정식 또는 함수가 되며, 매개변수를 제외한 다른 문자들은 변수나 미지수의 역할을 한다. 이러한 해석은 Freudenthal이 분석한 첫 번째 유형의 매개변수에 해당한다. 곧 매개변수를 이차적인 독립변수로 보는 것과 같은 관점으로, $f_a(x)=x+a$를 나타낼 때 $a\rightarrow(x\rightarrow x+a)$로 해석하는 것과 동일한 관점이다. 이것을 형식적으로 정의하면, 매개변수를 가진 방정식이나 함수는 2단계 함수이고 이 함수를 결정하는 변인은 매개변수이고, 각각의 매개변수 값에 대응하는 값은 바로 특정한 방정식이고 함수이다. 이때 다른 문자는 미지수와 변수의 역할을 한다. 이러한 수학적 정의는 왜 매개변수가 변화하는 속성에도 불구하고 상수처럼 느껴지는지 그 심리적 갈등을 보여준다. 다시 말해, 매개변수는 2단계 함수의 변인이며, 그 매개변수가 변함에 따라 그에 상응하는 방정식 또는 함수가 결정된다. 동시에, 특정한 매개 변수 값에 대응하는 각 방정식과 함수에서 다른 문자들은 미지수, 변수인 반면에 그 매개변수는 상수가 된다. 따라서 과정이 아닌 결과로 보면 매개변수는 상수로 역할하고 있는 것이다.

이러한 2단계 함수라는 개념은 매개변수, 변수, 상수의 구분을 논리적으로 만들지만, 한편 복잡하게 하는 요인이 되기도 한다. 이 구분을 이해하기 위해 보다 역동적인 해석을 부여해보자. 이러한 역동적인 해석이 2단계 함수보다 덜 복잡한 것으로 볼 수는 없지만, 2단계 방정식이나 함수를 다룰 때 필요한 사고 방법과 그러한 개념의 인지적 측면을 이해하는데 도움을 줄 것이다. 매개변수의 역동적 변화를 해석하는 두 번째 관점은 '한정사(quantifier)'를 도구로 사용함으로써 변화를 파악하려는 것이다. 매개변수가 포함된 방정식이나 함수에서 그에 상응하는 한정사 구조를 설명하기 위해, m을 매개변수로 갖고 x를 미지수로 갖는 예를 생각해보자. 방정식에서 사용되는 m과 x의 역할은 다음과 같이 공식화될 수 있다.

$m(x-5) = m+2x$에서 어떤 m에 대하여 이 방정식은 해를 가지지 않는가?

먼저 문제는 각각의 m-대입에 의해, 방정식이 존재하게 되며, 그 결과로 방정식은 상수 m과 미지수 x를 가진 방정식 $m(x-5) = m+2x$가 된다. m-대입으로 한정을 한 후에는, 방정식 안에서 m은 상수다. 또한 이러한 문장에서 존재 한정사는 이중 구조를 가진다, 즉 수를 한정하면서 동시에 방정식을 한정한다. 다음으로 각각의 x-대입에 의해서 방정식이 만족하기도 하고 만족하지 않기도 한다. 역동적인 공식화에서 한정사의 순서는 중요하게 다루어진다. 먼저, m을 한정하여 방정식을 얻고, 그리고 방정식을 얻은 후에 x를 한정하는 것이다.

여기서 제시한 역동적인 공식화는 이러한 개념들의 인지적 측면과 밀접히 관련되어 있다. 순서화된 한정사 구조는 매개변수를 가진 방정식이나 함수의 특징으로, 방정식과 함수는 순서적으로 가능한 대입에 따라 결정된다. 처음에는 매개변수에 대입을 해서 방정식이나 함수를 얻은 후에, 등식이 성립하는지 확인해본다. 그런 뒤에 방정식의 해나 함수 값을 구하기 위해서 미지수나 변수에 대입을 한다. 따라서 수학에 대한 논리적 배경이 부족하거나 명시적인 한정사의 관점을 이해할 수 없는 학생들에게 매개변수의 개념을 이해시킨다는 것은 쉬운 일이 아니다. 왜냐하면 이것을 이해하기 위해서는 매개변수와 미지수, 변수의 역할 사이를 구분 짓는 순서화된 대입의 역동적 구조를 의식할 수 있어야 하기 때문이다.

학교수학에서 학생들에게 요구되는 학습 목표 가운데 하나가 변수 개념의 이해라고 할 때, 매개변수는 미지수/변수와 구분되는 동시에 미지수/변수와 함께 그 역할이 변화하는 가운데 등장하는 주된 학습 내용 가운데 하나가 된다. 그러나 위에서 논의하였듯이 매개변수의 역동적 변화를 해석하는 관점은 그것이 2단계 함수를 사용하건, 한정사를 통해 이중 구조를 파악하건 단편적인 해석으로는 파악하기 불가능한 것으로 다소 복잡한 해석을 필요로 하고 있다. 만약 이러한 해석의 복잡성 때문에 매개변수가 학교수학에서 명시적으로 지도되지 않고 있다면, 그 결과 매개변수와 관련해서 학생들의 변수 개념 이해에서 발견되는 많은 어려움과 오류는 어떤 식으로든 정확한 설명을 통해 지도될 수 없는 한계를 가지게 된다.

이상의 논의에서 알 수 있듯이 매개변수를 이해하는데는 근본적으로 두 가지 어려움이 내재해 있다. 우선, 문자의 역할이 전후 맥락과 상황에 의존하고, 심지어는 문자가 쓰이는 과정에도 그 역할이 변한다는 점이다. 주어진 직선의 방정식을 찾는 기본적인 과제에서조차, 문자의 역할이 몇 차례나 바뀜을 볼 수 있었다. 도함수의 극한 정의에서는 변수에 대한 관

점이 바뀐다. x가 변수이면서 함수 f(x)가 주어진 상황에서 도함수 개념의 정의를 시작하지만, 곧 x가 매개변수이면서 h를 변수로 생각하는 새로운 과정을 도입해야 한다. 그리고 나서 다시 f'(x) 에서 x는 변수가 된다. 그러나 학생들은 이처럼 맥락에 따르는 문자의 역할을 쉽게 간과한다.

이러한 매개변수의 사용 예들에서 보듯이, 학생들의 사고 방식은 정확한 대입의 순서와 역할, 정확한 수학적 정의에 상응하는 역동성에 따라 진행되기 어렵다는 점을 보여준다. 사고에 있어서 역동성을 파악하는 것은 대수적 사고의 핵심적인 내용이다. 다시 말해, 대수적 사고는 '가변성'에 대한 파악을 포함하고 있다. 산술의 경우 하나의 대상은 하나의 과정에서 그 의미를 명시적으로 드러내기 때문에, 그 사고는 하나의 흐름을 따라 변화 없이 진행될 수 있다. 그러나 대수에서 문자는 같은 대상이라고 하더라도 서로 다른 과정에서 그 의미와 역할은 다르게 해석된다. 그 예로 우리는 보통 변수를 생각하기 쉬우나, 사실 변수를 역동적으로 해석하는 것은 쉽지 않다. 그러나 위에서 제시한 매개변수의 경우 문제해결 과정에서 그 역할과 의미의 변화를 분명하게 구별할 수 있었다. 이러한 가변성을 통한 역동적 해석은 문제를 부분적으로 파악할 경우 원활하게 이루어지지 않는다. 다시 말해 가변성을 통한 역동적 해석은 문제 전체를 볼 수 있는 기회를 제공하고 동시에 문제의 구조를 파악하도록 돕는다. 따라서 대수에서 문자의 역할을 '가변성'을 전제로 해서 해석할 경우, 이러한 대수적 사고를 통해 우리는 문제의 관계를 유기적으로 결합할 수 있게 되고, 따라서 대수 문제에서 요구하는 역동성과 구조를 파악할 수 있게 된다. 이 글에서 제시하고 있는 매개변수를 포함한 다양한 문제들은 이러한 대수적 사고의 특징을 분명하게 보여주고 있다.

Ⅳ. 결론

대수에서 변수를 학습하는 단계에 이르게 되면 학생들은 어떤 문자가 어떤 역할을 할 것인지를 결정해야 하며, 그 단계에서 학생들은 문자의 역할이 전후 관계와 상황에 따라 좌우됨을 이해해야 한다. 그리고 문자를 사용하는 과정에서 역할이 바뀌는 문제에 있어서는, 역할의 임시적 속성이 강조되어야 한다. 이와 함께 학생들은 각 문자의 역할과 그것을 결정하는 요인이 무엇인지를 이해해야 한다. 그러나 학교수학에서 이러한 것들은 거의 다루어지지 않는다. 우리는 함수 f(x)를 다룰 때 언제나 x를 변수로 취급하다가, 도함수의 극한 과정에서는 x는 매개변수로, h는 변수로 다루어지는데 이러한 초점의 변화를 교사들조차 분명하게 인식하지 못하는 경우가 많다. 물론, 실제 수업 시간에 어떤 문자가 어떤 역할을 하는지 말한다고 해서 문제가 해결되는 것은 아니다. 이것은 학생들이 문자의 역할에 대한 논리적인 구분을 이해하지 못한 상태에서는, 문자의 역할을 구체화하는 수업이 의미 없기 때문이다. 그러나 학교수학에서 학생들이 다루는 문제는 많은 경우에 여러 문자가 동시에 등장하게 되고 그리고 문제해결과정에서 그 문자는 경우에 따라 변수, 미지수, 매개변수의 역할을 교대로 하면서 답에 이르게 된다. 학생들이 대수에서 문자와 관련해서 겪는 여러 가지 어려움은 이러한 문자의 역동적인 역할 변화를 이해하지 못하는 것으로 이 글은 가정하였으며, 매개변수가 이러한 특징을 가장 잘 보여줄 것이라는 전제에서 학교 수학에서 (암묵적으로) 사용되는 매개변수의 역할에 대하여 분석하였다.

학교 수학에서 매개변수는 공식적인 용어를 통해 도입되지는 않지만, 암묵적으로 방정식과 부등식을 비롯해서 도형의 방정식, 함수 등에서 다양하게 적용되고 있다. 그리고 많은 문제에서 매개변수는 미지수로, 변수로 그 역할을 달리 하면서 사용되고 있다. 이러한 매개변수의 변화를 정확하게 파악하는 것은 쉽지 않다. 우리는 이 글에서 이러한 해석을 위해서 2단계 함수와 한정사를 통한 이중 구조라는 두 가지 관점을 인용, 제시하였다. 그러나 이러한 관점 역시 어느 것 하나 학교 수학에서 지도하기는 쉽지 않을 것이나, 적어도 교사는 이러한 매개변수의 특징을 파악하고 있어야 한다. 그리고 이러한 역할 구분을 이해하기 위해서는, 순서가 있는 대입[12] 시각화하는 것과 같이 역동적 사고 방법을 학생들이 자연스럽게 접할 수 있게 하여야 한다. 그렇게 함으로써 매개변수의 역동적인 구조에 대한 심상을 학생들이 얻게 할 수 있고 매개변수의 역할에 이해를 심화시킬 수 있을 것이다.

이 글은 학교수학에서 특히 대수 지도에서 그 핵심에 놓여 있는 변수를 지도하는 과정에서 발생하는 많은 문제들의 원인을 변수 역할의 역동적 변화를 제대로 이해하지 못한 상태에서 학습이 이루어지는 것으로 보고 있다. 이 글에서 분석한 매개변수의 역할은 다양한 변수의 의미 가운데 한 측면만을 강조한 것으로, 매개변수에 대한 이해가 곧 모든 변수 개념 학습에서의 문제를 해결하는 것으로는 볼 수 없을 것이다. 이런 의미에서 매개변수에서 진행된 이와 비슷한 연구가 변수의 다른 측면에서도 계속 진행됨으로써 학교 수학에서 변수 개념을 이해하는데 도움이 되길 기대한다.

참고문헌

김남희(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김연식 · 김흥기(2000). 중학교 수학1. 서울: (주)두산.

박두일 외 3인(2000). 고등학교 수학Ⅱ. 서울: (주)교학사.

신현성 · 최용준(2002). 고등학교 수학 10-가. 서울:(주) 천재교육.

우정호(1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

임재훈 외 7인(2002). 고등학교 수학 10-가. 서울: (주)두산.

조태근 외 6인(1998). 고등학교 공통수학. 서울: 금성교과서(주).

정봉화 외 2인(2001). 고등학교 수학Ⅰ. 서울: 형설출판사.

조태근 외 6인(2001). 고등학교 수학Ⅰ. 서울: 금성교과서(주).

Bloedy-Vinner, H. (1994). The analgebraic mode of thinking-the case of parameter. in da Ponte, J. P. & Matos, J. F.(eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.2,* 82-95. Lisbon, Portugal: University of Lisbon.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-Parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, et al. (eds.). *Perspectives on school algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic

12) 순서 있는 대입이란, 2차 방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c 에 구체적인 수를 대입함으로써 특정한 방정식이 결정되는 것과 같은 것을 말하는 것이다. 이것을 시각화한다는 것은, a, b, c 자리에 디지털 방식의 창이 있고 이 창에 구체적인 수를 대입하면서 이것을 볼 수 있게 하는 것이다.

Publishers.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel publishing company.
Furinghetti, F. & Paola. D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference?. in da Ponte, J. P. & Matos, J. F.(eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.2,* 368-375. Lisbon, Portugal: University of Lisbon.
Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. *Mathematics: 11-16.* John Murray.
Sedivy, J. (1976). A note on the role of parameters in mathematics teaching. *Educational studies in mathematics, 7,* 121-126.
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14,* 15-39.

Study on the teaching of parameter in the school mathematics

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)
Park, Sun Yong (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we deal with the teaching of parameter in the school mathematics. The roles of letters become different according to the letters-used context. That is, the meaning of letters may change in the course of being used. But specifying the roles of letters without understanding the distinction between the roles is not enough for students to learn the meaning of variables, specifically that of parameters. Therefore, the parameter-learning should focus on the dynamic change of roles. That implies flexible thinking and changing of perspectives.