대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 483-494. Sep 2002

수학 학습을 위한 상황문제의 활용

장 혜 원*

Ⅰ. 머리말

Freudenthal은 1977년 당시, 앞으로의 수학 교육을 예측하면서, 분리된 교과목으로서의 수학은 존재하지 않을 정도로 수학의 통합적인 양상이 지배적일 것임을 다음과 같이 주장하였다:

> 2000년에 수학교육은 어떤 모습일까? 답은 간단하다. 2000년에 수학 교육은 더 이상 없을 것이다. 사라질 것이다. 더 이상 수학이란 과목, 수학 프로그램, 가르칠 수학 교과서는 없을 것이다... 그것은 읽기, 쓰기, 수공, 미술, 음악, 호흡처럼 통합된 교육에서 존속되고 향유될 것이다(Treffers(1993), p94에서 재인용).

이미 2000년을 과거로 하고 있는 우리들은 Freudenthal의 예측에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 그의 예측이 정확히 들어맞았는가, 아니면 전혀 근거 없는 추측이었는가? 표면적으로 수학이란 과목에 대한 가중치가 날로 증가하고 있는 현 시대의 상황을 보면 수학이란 과목, 수학 교과서의 존속은 마치 그의 예견을 반증하는 듯 하지만, 그가 주장하고 싶어했던 것은 수학의 단순한 적용 가능성을 너머 풍부한 문맥 속에서 출발하는 수학교육, 실생활과의 관련을 강조하는 오늘날의 수학교육 추세에 담겨 있다고 볼 수 있다.

그러한 흐름은 이미 20세기에 들어 다양한 이론으로 나타나기 시작하였다. Dewey의 실용주의에 입각한 문제해결 교육, Dienes의 놀이를 통한 수학교육론, Freudenthal의 수학화를 통한 수학 학습 이론, Brousseau의 교수학적 상황론에서 제시된 실생활 문제, 놀이 상황, 현실 또는 문맥, 환경(milieu) 또는 상황 등은 서로 표현은 다르지만 같은 맥락에 있다. 즉 수학 학습은 수학적 지식을 포함하고 있는 학습자의 주변 상황 또는 문제로부터 출발해야 하며 따라서 수학적 세계 내에서의 지식 습득 후 타 영역으로의 적용을 의미하는 좁은 의미로의 수학적 응용성과는 구별되는 것이다.

이 때 중요한 것은 학습의 출발점이 되는 목표 지식과 연루된 문제 상황이며, 적합한 문제 상황을 준비하고 그것에 기초한 수업을 계획하는 것은 교사의 몫이다. 학교 수학에서 대표적인 문제 상황으로 다루어지는 문장제의 피상적이고 가식적인 면은 종종 지적되어 왔다. 억지로 꾸며낸 상황이 아니라 학생들이 자연스럽게 느끼고 지도하고자 하는 수학적 지식이 구성되기에 적합한 상황은 어떠한 것인지, 그리고 교

---

* 인천교육대학교 강사

1) '상황문제'는 Brousseau의 책 Théorie des situations didactiques에서 'situation-problème'을 번역한 것이다. 흔히 '문제 상황'이라는 용어에 익숙하며 위 책의 영문판에서도 'problem-situation'이라고 번역하였지만, 일반적인 문제 상황과는 구별되는 특성(2장 2절)을 고려할 때 상황문제라고 칭하는 것이 적절하다고 사료되어 구별하여 사용한다.

사는 그러한 상황에 대한 아이디어를 어떻게 얻을 것인가에 대한 문제 의식에서 본 연구는 출발한다. 그리고 한 가지 방안으로서 상황문제[1])를 제안하고자 한다.

본 고에서는 먼저 상황문제의 의미와 특성을 규명한다. 그리고 적절한 상황문제 및 그를 이용한 수업 사례를 예시하기 위해 Brousseau가 수행한 예를 분석한다. 마지막으로 적절한 상황문제를 만들기 위해 참조할 수 있는 몇 가지 자료를 제시함으로써 현장 교사의 실천에 도움이 되고자 한다. 이 때, 2장의 사례 분석과 관련하여 '비'라는 동일한 주제에 대하여 다양한 자료의 활용 가능성을 보일 것이다.

II. 상황문제

수학 수업을 계획할 때 가르치고자 하는 수학적 지식에 대한 좋은 상황문제를 발굴하고, 그것을 수업에서 어떻게 활용할 것인가를 생각하기 위해서 우선 상황문제의 의미와 그 특성을 고찰하는 일이 앞서야 할 것이다.

1. 상황문제의 의미

상황문제는 일종의 문제이다.

Arsac은 학교수학에서 다루는 문제의 유형을 교수학적 역할의 관점에서 네 가지 범주로 구분하였다: 수업에서 배운 개념을 조작적이도록 하는 것이 목표인 적용 문제 또는 연습 문제, 새로운 개념에 접근하도록 하는 발견 문제, 학습 평가를 목표로 하는 시험 또는 과제, 구체적인 상황을 수학화하는 것이 궁극 목적인 모델화 문제(Fabre(1999)에서 재인용, p86).

Fabre(1999)는 전통적인 수학 문제는 수학의 연역적인 측면을 강조하여 지식의 구성이나 수학자의 활동에 대한 이미지를 허용하지 않으므로 수학의 귀납적인 의미를 이해하려면, 수학적 지식 자체를 다룰 뿐만 아니라 그것을 연구 과정 속에서 다루어야 하고, 이 때 수학인식론은 정리가 아니라 문제에, 이미 발견된 것이 아니라 발명에 중점을 두어야 한다고 하였다. 이를 위해 앞의 범주 구분에 열린 문제[2])와 상황문제의 두 가지 유형을 첨가할 것을 주장한다.

열린 문제는 적용 문제와 발견 문제의 사이에 위치한다. 우선 열린 문제는 학생이 앞서 배운 개념을 어떻게 이용하는지 아는 것과 관련된다. 그러나 교사가 지도한 것을 단순히 모방하는 문제나 배운 규칙을 예에 적용하는 문제는 아니다. 열린 문제의 목표는 탐구 방법인 것이다. 이러한 의미에서 열린 문제는 적용 문제가 아닌 것이다. 한편 열린 문제는 안내 정도에 있어 발견 문제와 구분된다. 개념 학습에 중점을 두는 발견 문제에서 경험하는 어려움은 학생의 활동을 유도하는 교사의 중재적 질문에 의해 완화되지만, 탐구 방법에 중점을 두는 열린 문제는 학생에게 완전히 양도된 채 해결된다. Fabre의 정의에 따르면, "학생 스스로 알고 있는 지식을 적용하여 문제를 풀며 탐구 방법을 목표로 하는 문제"인 것이다. 열린 문제는 이미 알고 있는 지식을 이용하여 문제를 해결하는 사고 전략에 초점이 맞추어지므로, 소위 문제해결력 증진 또는 그 평가를 위해 학교

2) 수학에서 문제는 아무도 답을 찾지 못한 문제를 뜻하며 수학자가 수학 활동을 전개해 나가는 동인이다. 예컨대 4색 문제(four color problem)는 지도 제작자에게는 경험을 통해 자연스럽게 수용된 원리이지만 수학자에게는 의문시되어 1976년 컴퓨터로 증명될 때까지 열린 문제였고, 그 이후에도 1200시간이 걸리는 해법대신 간단한 증명을 찾으려는 새로운 열린 문제로 대두되었다. 한편 수학교육에서 열린 문제는 해결 방법이나 답이 일률적이지 않고 다양한 탐구형 문제를 의미하는 것이 보통이다.

수학에서 다루어야 할 문제인 것이다.

상황문제 역시 주어진 모델에 대한 탐구 활동이라는 점에서 열린 문제와 유사하지만, 양자를 구분하는 것은 학습자가 지닌 수학적 지식의 여부에 있다. 열린 문제의 경우, 학생은 문제를 해결하기 위해 필요한 수학적 지식을 가지고 문제에 접근하는 반면, 상황문제의 경우에는 그 문제를 해결하는 과정을 겪으면서 새로운 수학적 지식을 구성하게 되는 것이다. 상황문제가 겨냥하는 수학적 지식이 문제해결의 도구가 되며, 상황문제는 곧 수학적 지식을 학습하는 수단인 것이다.

따라서 상황문제는 발견 문제와 모델화 문제의 사이에 위치시킬 수 있다. 문제해결 과정에서 새로운 지식을 구성한다는 점에서 적용 문제나 시험과는 완전히 구분되는 범주임을 쉽게 파악할 수 있다. 해결 과정에서 탐구 방법뿐만 아니라 수학적 개념이나 절차의 학습이 있게 되므로 열린 문제와 비교할 때 발견 문제와의 유사성이 훨씬 강하지만, 역시 안내 정도에 있어 발견 문제와 구별된다. 한편 문제 상황에서 출발한다는 점에서 모델화 문제와 공통 부분이 있지만, 상황의 구체성에 대한 제약이 없으며 모델링 자체는 목적이 아닌 탐구 과정 중의 일부라는 의미에서 모델화 문제는 아닌 것이다.

요컨대 열린 문제와 상황문제는 앞선 네 범주에 첨가되어 새로운 영역으로 위치하면서 학교수학에서 다루는 문제의 스펙트럼을 보다 완전하게 한다. 열린 문제는 수학교육의 가장 중요한 목적 중 하나인 문제해결력의 신장을 위해 탐구 활동의 대상이 되는 문제인 반면, 상황문제는 문제해결 과정을 통해 새로운 수학적 지식을 구성하는 문제라는 점에서 양자 역시 교수학적 역할상 구별된다.

한편 Brousseau(1998)는 교수학적 상황론을 전개하는 가운데 상황문제를 다음과 같이 규정한다:

'상황' 이란 용어는 학생이 처한 주위의 집합, 학생을 학생의 환경(milieu)에 통합하는 관계, 행동이나 발달을 특징짓는 데이터의 집합을 가리킨다. 어떤 상황은 학생의 적응, 반응을 요구하는 상황문제이다. 특히 이 반응의 필연성이 정확한 지시의 대상이 되고 학생이 어떤 계획, 즉 선언된 목표를 갖는다면 '엄밀한 의미의 또는 형식적인 상황문제' 이고, 환경(milieu)이 하나의 지시문으로 환원되고 어떤 물질적 제약(상황의 심리적, 사회적 조건이 아닌 물리적 측면에 기인하는)도 그 해석을 수정하지 않는다면 '문제'이기도 하다... 일반적으로 교수학적 상황에서 적어도 하나의 상황문제와 교수학적 계약을 규명할 수 있다(p279).

여기서 '상황'은 학생을 둘러싸고 있는 주변의 모든 것을 의미하는 일반적인 의미를 갖는 반면, 교사가 교수학적 의도에서 사용하여 학생에게 반응을 요구하는 교수학적 계약 하에 놓이는 상황을 곧, '상황문제'라고 할 수 있다. 따라서 상황문제는 Brousseau 이론의 주개념인 교수학적 상황의 첫 단계인 행동 상황을 야기시키는 동인이 된다. 다시 말해 교사가 학생에게 양도한 상황문제에 대해 학생이 행동함으로써 학습이 시작된다.

따라서 Brousseau가 의도하는 상황문제의 의미는 수학 학습에서의 그 역할에 덧붙여 역할 시기와 관련지어 설명될 수 있다. 즉, 수학 학습에서 상황문제는 학습을 야기하는 동인이자 학습이 진행되는 장이 되며, 따라서 학습 후가 아니라 학습과 동시에 작용한다. 수학 학습과 그 적용에 대한 일반적인 관념은 배운 개념이나 절차를 여러 가지 문제를 푸는 데 적용하는 것이다. 그러나 상황문제의 진가는 그 반대 순서, 즉 수학적 개념이나 절차를 학습하기 위한

수단으로 문제를 이용하는 것이다. '풍부한 문맥에서의 수학'을 강조한 현실주의 수학교육에서 말하는 문맥문제(context problem) 역시 유사한 개념으로 볼 수 있다. 상황문제는 문맥문제와 마찬가지로 현실에서의 구체적인 상황에 국한되는 것이 아니라 수평적 수학화를 위한 현실 영역의 주제와 수직적 수학화를 위한 수학적 영역의 모델 문맥[3]을 모두 포함하는 폭넓은 의미로 받아들여야 할 것이다.

이상에서 고찰한 상황문제의 의미로부터, 학습자가 당면한 문제를 해결하고자 행동하면서 그 문제를 풀기 위해 필요한 도구로서의 수학적 지식을 구성해나간다는 것을 생각할 때, 수학 학습에서 상황문제의 가치는 인식론적으로는 수학적 지식의 도구적 특성을 강조하는 면에서, 심리학적으로는 구성주의 입장에서, 교육학적으로는 활동주의 교육 사조에 입각하여 인정될 것임을 알 수 있다.

2. 상황문제의 특성

문제를 해결하는 과정을 통해 수학적 지식의 구성이 이루어진다는 것과 관련하여 상황문제의 특성을 도출할 수 있다. Fabre(1999)는 상황문제의 특성을 다음과 같이 다섯 가지로 정리한다:

첫째, 학생은 문제해결에 참여할 수 있어야 한다. Vygotsky의 용어를 빌어 표현하면, 문제는 학생의 인접 발달 영역 내에 있어야 한다. 즉, 학생이 아는 것과 너무 가까워도 안 되고 너무 멀어도 안 된다.

상황문제가 학습의 출발점으로 역할하기 위해, 교사는 학생이 지닌 지식 수준을 고려해야 함을 뜻한다. 학생이 지닌 옛 지식과 관련되지 못한 문제는 학생들로 하여금 문제에 접근할 수 없게 하고, 따라서 어떠한 시도나 행동도 일어나지 않는다. 한편, 학생이 목표 지식을 이미 알고 있는 상태라면, 상황문제는 그 역할을 하지 못하고 열린 문제 또는 적용 문제로의 위상 변화가 일어날 것이다.

둘째, 학생의 지식은 문제를 즉각적으로 푸는 데 원칙적으로 불충분하다. 이는 문제해결 활동에서 다루는 진정한 문제의 일반적인 특성으로서, 해법이 학생의 기억 속에 준비되어 있는 정형화된 문제를 배제시킨다.

이 특성은 첫 번째 특성에 부가되어야 할 조건에 해당한다. 즉 문제해결을 시작할만 한 지식을 동원할 수 있지만, 필요한 지식이 모두 갖추어져 있는 것은 아니다. 만약 기존의 지식으로 해결할 수 있다면 새로운 수학적 지식의 구성을 기대할 수 없다.

셋째, 상황문제는 학생이 찾은 해법을 그것이 정답이든, 오답이든 평가할 수 있어야 한다. 즉 학생이 지닌 지식이 문제를 해결하는 데 충분하지 않았음을 의식시키는 것은 교사가 아니라 상황 그 자체인 것이다.

불충분한 기지의 지식으로 인한 학생의 행동 결과는 오류를 낳게 마련이고, 그것은 상황 자체의 불합리한 외양에 의해 학생에게 의식된다는 것이다. 적극적 의미의 비교수학적 상황을 실현하고자 하는 의도에서 비롯되는 특성이다. 그러나 학생이 상황의 불합리성을 의식하지 못

3) R. Douady(1986)가 자연수 범위에서 직사각형의 넓이를 계산할 수 있고 넓이에 대한 기하학적인 관념이 있는 학생들에게 소수와 분수의 곱셈 지도를 의도로 제시한 문제 '둘레 P(34 또는 36)인 직사각형의 넓이를 계산하라'를 활용한 수업 절차는 수학 내에서의 상황문제를 활용한 사례에 해당한다. 교수 목표에 따라 교수학적 변인에 해당하는 P의 선택이 달라지며, 넓이의 최대값이라는 부가적인 조건으로 인해 학생들은 분수 길이와 관련한 새로운 의문이 생기고 기하학적 표현을 이용하여 분수 길이의 곱셈을 알아내게 된다.

하거나, 상황 자체가 오류를 드러내기 어려운 경우에는 교사의 개입이 불가피할 것이다.

넷째, 학생에게 지도하고자 의도하는 목표 지식이 주어진 상황문제 해결에 가장 적합한 도구임이 확인되어야 한다. 사실 학생은 교사가 목표로 하는 지식에 대응하지 않는 다른 도구를 이용할 수 있는 것이다. 그렇기 때문에 상황에 대한 사전 분석이 철저히 행해져야 할 필요성이 있다.

상황문제의 해결에 필요한 도구가 곧 알아야 할 지식이며 그 결과, 수학적 개념이 도구에서 대상으로 위상의 변화를 겪게 된다. 그러나 실제 수업 과정은 반드시 교사가 예측한대로 진행되는 것은 아니다. 사전 분석을 통해 학생들의 다양한 반응을 예측할 수 있어야 하고, 수업 진행상 발생할 수 있는 다양한 경우에 대비하여 선택 가능한 교수학적 변인을 미리 고려해야 한다.

다섯째, 문제해결을 위해 문제를 여러 가지 표현(산술적 표현, 대수적 표현, 기하적 표현 등)으로 형식화할 수 있다. 이것은 해결로의 성공 가능성을 높여준다. 여러 표현간에 번역이 가능할지라도 반드시 완벽한 대응을 이루는 것은 아니며, 답을 제시해 준다기보다는 도움을 줄 뿐이다.

문제가 쉽게 풀리지 않을 때, 문제의 내용을 식 또는 표로 나타내거나 그림을 그려보기도 한다. 이것은 Douady(1986)의 이론 중 '표현의 변화(Jeux de cadres)'라는 원리에 해당하는 활동으로, 하나의 수학적 개념이 산술적, 대수적, 기하적 형태 등 여러 형식으로 표현될 수 있으며, 학생은 문제해결 활동시 두 개 이상의 형태로 표현해야 한다는 것이다. 이것이 의도하는 바는 문제에 접근하는 방식의 다양성 및 학생의 인지적 다양성을 고려하여 학생의 문제 이해와 해결을 돕고자 하는 것이다.

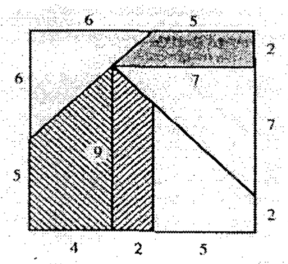
이상에서 고찰한 상황문제의 특성은 문제 자체에 내재한 것이라기 보다 목표로 하는 지식, 대상 학생, 문제를 활용하는 수업 과정에 의해 구현되는 조작적 성질의 것이라 볼 수 있다. 따라서 상황문제를 고안할 때에는 수업 과정에 대한 계획 및 사전 분석이 동시에 이루어지는 것이 바람직함을 함의한다.

Ⅲ. 수학 학습을 위한 상황문제 및 수업 사례

Brousseau는 행동, 형식화, 타당화, 제도화의 상황을 거쳐 학습하는 교수학적 상황 이론을 체계화하며, 이론의 주된 관심은 그러한 학습이 일어나게 할 수 있는 상황의 마련이라고 밝힌 바 있다. 즉, 그의 최대 관심은 가르치고자 하는 수학적 개념이 학습되기에 적합한 상황문제를 만드는 것이라고 해석할 수 있다.

이 장에서는 Brousseau가 제시한 상황문제의 예와 그것을 활용한 수업 과정에 대한 분석을 통해 상황문제의 특성이 실제 수업에서 어떻게 구현되었는지 검토하고자 한다.

상황문제의 전형적인 예로 간주되는 Brousseau(1998, pp.237-239)의 퍼즐 문제는 다음과 같다:



<그림 1> Brousseau의 퍼즐문제

<그림 1>의 퍼즐을 다음 규칙에 따라 확대

하여라: 그림의 4cm 선분은 확대하였을 때 7cm가 된다. 5내지 6명의 모둠 당 한 개의 퍼즐이 할당되는데, 각 학생이 적어도 한 조각, 또는 둘이서 2조각을 담당한다. 끝나면 그림과 똑같은 도형을 재구성할 수 있어야 한다.

이 문제는 우리 나라의 초등학교 5, 6학년에 해당하는 프랑스의 CM2, 6e 의 비례 개념 학습을 위해 활용되었다. 실시된 수업 과정은 다음과 같다:

(1) 모둠은 간단한 계획 수립 후 흩어지고, 교사는 규칙에 따라 확대한 퍼즐을 탁자에 붙여 놓는다.

(2) 거의 모든 아동들은 모든 길이에 3cm를 더해야 한다고 생각한다. 몇몇은 이 모델을 의심스러워 하지만, 동료에게 설명하는 경우는 드물고, 확신시키는 경우는 전혀 없다.

(3) 그로써 드러난 결과는 조각들이 서로 맞지 않는다는 것이다.

(4) 토론, 진단이 있고 친구의 부주의함을 탓하기도 한다. 즉 문제가 되는 것은 3cm를 더한다는 모델이 아니라 부주의한 실행인 것이다. 어떤 아동은 모든 조각을 다시 하면서 확인하고, 그것이 쉬운 문제가 아님을 인정한다.

(5) 이 때, 교사는 특별한 요구 없이 아동들을 독려하고 사실을 확인해 주려고 개입할 뿐이다.

...

(일부 아동은 계속 시도하면서 대충 비슷하게 짜맞추는 퍼즐을 만들기도 하고 확대된 정사각형을 잘라내면서 곤경에서 빠져나오려 한다. 옳게 풀었다고 확신하는 모둠으로 불려간 교사는 그러한 전략이 부적절한 도형과 그 상(도형의 길이에서 a+b=c이지만 $f(a)+f(b) \neq f(c)$임을 드러내는 그림)을 제안함으로써 선형성이라는 조건을 충족해야 한다는 것을 관찰하도록 이끌기도 한다. 여기에 다양한 사회적, 인지적, 정의적인 요소가 결합되어 3cm를 더하면 된다는 생각을 재검토하는 것을 어렵게 한다.)

...

(6) 아동이 다른 법칙을 사용해야 함을 인정하고 그것을 찾기 시작할 때 상황은 신속하게 진행된다. 특히 아동 또는 교사가 길이를 다음 표로 배열하면 더욱 그렇다.

4	7
5	
6	
2	
9	
7	

(7) 아동은 우선 8의 상을 발견한다. "4→7이므로, 8→14." 이것은 별 도움이 안되지만 이상하게도 처음 모델이 거부되자 반드시 필요한 것인 양, 이 아이디어에 대해 이의가 제기되지 않는다. "1의 상이 필요하다, 맞아 그것이 다른 모든 것을 찾도록 할거야, 그렇게 하려면 4를 네 조각으로 나누어야 해, 7도 4로 나누어야 해."

(8) 아동들이 이미 알고있는 크기가 같은 분수(commensuration) 모델을 사용함으로써 다음 결과를 낳는다.

1의 상을 4배하면 7이므로, 1의 상은 $\frac{7}{4}$

이를 자발적으로 사용하지는 않지만 다음 절차에 따른 계산을 한다.

$$7=\frac{70}{10}=\frac{280}{40},\quad \frac{280}{40}\div 4=\frac{70}{40}=\frac{35}{20}=\frac{175}{100}=1.75$$

이 계산은 분수 측도를 알기 때문에 가능하고, 문제를 해결하도록 한다.

이상의 수업 과정에 대해 상황문제의 특성과 관련하여 다음과 같은 분석이 가능하다.

(1)은 수업 시작 직후 문제의 답이 제시되고

있음을 보여준다. 이로부터 상황문제의 목적은 문제해결 자체, 즉 해를 구하는 것이 아님을 알 수 있다. 제시된 해를 구하는 과정에서 도구로 사용될 비례 개념, 선형성을 학습하는 것이 교사가 의도하는 목적이다.

(2)에서 아동은 자신의 옛 지식을 갖고 문제에 접근하는 것이 가능하다. 물론 그 지식은 문제해결에 부적합하다. 옛 지식만으로 문제의 해를 구할 수 있다면 새로운 개념이나 절차의 학습은 기대할 수 없으므로 상황문제의 역할에 어긋난다.

(3)은 (2)에서 사용한 옛 지식의 부적절함이 드러나는 단계이다. 아동이 자신의 지식을 적용하는 단계에서 무언가 잘못되었다는 사실을 인식하는 것은 교사에 의한 지적 때문이 아니라, 구하는 확대도가 만들어지지 않은 상황 그 자체가 보여줌으로써 가능한 것이다.

(4)에서는 아동이 옛 지식에 대해 지닌 불굴성을 보여준다. 문제에 접근하기 위해 처음에 적용한 자신의 아이디어를 쉽게 포기하지 않기 때문에, 자발적으로 그것을 의심하기보다는 단순히 수행 상의 오류라고 간주한다.

(5)는 상황문제를 활용하여 수업할 때 교사의 역할에 대해 말해준다. 상황문제 역시 열린 문제와 마찬가지로 학생에게 양도된 비교수학적 상황에서 학생 스스로 활동하는 것이 바람직하다고 간주된다.

(6)에서는 해결의 실마리를 찾고자 문제의 기하적 표현을 숫자간의 대응표로 나타낸다. 표현간의 번역 활동은 상황문제를 활용한 학습에서 촉매 역할을 한다. 즉, 해결 자체는 아니지만 해결 과정, 탐구 과정을 돕는 것이다. 특히 문제해결을 위해 알지 못하는 지식을 도구로 사용해야 한다는 모순적인 특징을 고려한다면, 해결 과정에서 궁지에 처했을 때 문제 상황을 여러 가지 가능한 표현으로 나타내 봄으로써 정체된 진행 과정으로부터 벗어날 수 있다는 것은 매우 중요한 사항이다.

(7)은 옛 지식의 부적절함에 대한 인정과 표현 번역의 도움으로 인해 새로운 지식 구성을 위한 실마리를 찾는 비약적인 단계이다.

(8)은 새로이 선택된 모델을 이용하여 주어진 상황문제가 목표로 하는 새로운 지식을 구성하는 단계이다. 1의 상을 찾음으로써 덧셈 관계가 아닌 '..배'라는 비례 관계에 의한 선형성을 학습하게 된다.

Ⅳ. 비와 관련한 상황문제 마련을 위한 다양한 자료의 예

3장의 분석 사례와 같은 맥락에서 '비'와 관련된 상황문제를 만들기 위해 참조할 수 있는 다양한 자료를 제시하고자 한다. 각각의 자료로부터 도출할 수 있는 상황문제라든가, 그것을 실제 수학 수업에서 어떻게 활용할 것인가에 대한 아이디어는 물론 고정된 것이 아니다. 본 연구에서는 제한적이기는 하지만, 각 자료로부터 도출 가능한 상황문제에 대해 목표 지식 및 수업 계획에 대한 아이디어를 제공한다.

1. 실생활

보통 '소비자 수학'이라 일컫는 수학의 실용적인 측면과 관련하여 활용할 수 있는 소재 거리는 풍부하다. 일상 생활을 하는 데 있어 수학적 지식이 필요한 상황은 전통적으로 교과서에서 수학 학습에 이어지는 응용 문제로 애용되어 왔다. 동일한 유형의 문제가 지식의 소유 여부에 따라 상황문제로 활용 가능한 것이다.

문제: 세 구두 가게가 저마다 마을 전체에서 자

기네가 가장 할인을 많이 하고 있다고 선전한다. 다음은 각각의 진열장에서 볼 수 있는 가격표이다.

ARAMA	ANDOU	MANTOWN
880F → 660F	450F → 360F	536F → 375F

이들 중 두 가게는 거짓말을 하고 있다. 어느 가게인가? (Clavier, 1988)[4]

목표 지식은 비율의 개념과 계산으로, 6-가 단계의 비와 비율 단원에서 활용할 수 있다. 실생활의 구체적인 상황에서 출발하여 친근감 있고 접근하기에 수월하다. 그러나 많은 학생들이 뺄셈을 이용하여 문제를 풀려고 시도할 것임을 예측할 수 있다. 또한 수평적 수학화를 요구하는 문제이므로, 비율의 분수 표현에 의한 형식화에 의해 수학 세계로의 안내가 있어야 한다.

2. 신문[5]

신문 활용 교육(NIE)의 진전으로 이제 신문은 훌륭한 교육 도구로서 인정받고 있는 실정이다. 신문 스크랩을 교육에 활용하는 가치는 Freudenthal에 의해서도 주목된 바 있다.(Treffers (1993), p95에서 재인용):

이것은 하나의 영역이 아니라 도려낸 작은 조각이다. 그럼에도 불구하고 수학화와 높은 수학적 지위를 얻기 위한 범주적 가치는 비교적 거대하다.

다음은 한 신문의 과학 유머 난에 실린 일화이다. 관심 있는 교사는 이 자료로부터 A양이 빌딩의 높이를 계산한 방법과 관련하여 닮음비에 대한 상황문제를 시도할 수 있다.

어느 대학 물리학과 1학년 실험 시간. 기압계를 나눠 주고 이것을 사용해 63빌딩의 높이를 알아내라고 했다. 고도가 높을수록 기압이 낮아지므로 이를 이용해 빌딩의 높이를 계산해오기를 기대한 것. 물론 그렇게 한 학생도 있었지만 엉뚱한 학생들도 많았다.

A양은 정오에 기압계와 63빌딩의 그림자 길이를 쟀다. 또 기압계의 높이도 측정해 그림자 길이와 실제 물체 길이의 비례로부터 63빌딩의 높이를 계산했다.
B군은 63빌딩의 옥상에서 기압계를 떨어뜨리는, 조금 난폭한 방법을 택했다. 기압계가 땅에 떨어질 때까지의 시간을 재 '높이=0.5×중력×가속도×시간×시간'이라는 식으로부터 높이를 알아냈다.
가장 정확한 답을 낸 학생은 따로 있었다. 그는 기압계를 들고 빌딩 관리사무소에 가서 "높이를 가르쳐주면 기압계를 주겠다"고 해 빌딩의 높이를 정확히 알아냈다.

(2002년 5월 23일자 J일보 55면)

문제의 목표 지식은 비례식 또는 도형의 닮음비일 수 있다. 6-가 단계에서 비례식을 다루기는 하지만, 삼각형의 닮음과 관련되므로 8-나 단계의 도형의 닮음 단원에서 활용하는 것이 적절하다. 우선 문제로부터 여러 가지 토론 및 의사소통을 격려하기에 적합하다. 이를테면 네 가지 해결 방법의 효율성에 대해 자신의 생각을 주장하거나 또는 가장 수학적인 방법이 어느 것인지, 문제를 풀기에 정보는 충분한지, A

4) 인용한 문제이므로 원문에 충실하고자 그대로 번역하였으나, 우리 나라 학생들에게 제시할 때에는 단위를 '프랑(F)'이 아닌 '원'으로 하고 그에 따라 금액도 자연스럽게 수정해야 할 것이다.
5) 고호의 그림 '해바라기'를 지면에 식물로 표현한 사건에 대한 두 신문의 기사를 활용하여 교사 교육을 실시한 사례를 Treffers(1993)에서 참조할 수 있다.

양의 방법이 타당한지 등에 대해 논할 기회를 갖는다. A 방법의 타당성을 논하며 그림자의 길이가 물체의 길이에 비례한다고 할 수 있는지에 대해 생각하기 위해, 도형 표현과 식 표현 등이 동원되며 도형 표현으로부터 두 개의 닮은 삼각형을 발견하고 모눈종이나 측정 활동을 통해 길이의 비에 대해 생각할 수 있다. 특히 기압계와 빌딩 길이의 단위의 변환과 관련한 장애나 '비례'라는 언어적 단서에 의존하여, 비례식에 관한 도구적 이해 수준에서 문제에 접근할 가능성을 예측할 수 있다.

3. 동화

동화의 일부분을 자료로 이용할 수만 있다면 친근감 있고 흥미진진한 상황문제를 제시하는데 큰 도움이 될 것이다. 걸리버 여행기의 소인 나라와 거인 나라 여행담은 비를 학습하는데 훌륭한 문맥을 제공한다.

(소인 나라 여행 중) 국민들의 키는 평균 6인치 미만인데 다른 동물이나 풀이나 나무의 크기도 꼭 그만큼의 비례로 되어 있었습니다. 예를 들어 가장 키가 큰 말이나 소가 4.5인치쯤 되고, 양은 1.5인치 가량이며, 거위는 참새 만한 크기입니다. 이런 식으로 차차 작아져서 끝내는 나의 눈으로는 보이지 않을 만큼 자디잔 물건으로 내려갑니다(조나단 스위프트, p77).

(소인 나라 황제가 산더미 인간에게 보낸 조항에서) 이상과 같은 조항을 모두 지키겠음을 엄숙하게 맹세한다면, 그대에게 매일 우리 백성 1천 7백 28명이 먹을 수 있는 음식물이 배급되며, ... 황제의 수학자들은 천문 관측 기계로 나의 키를 재어, 나와 소인들의 크기는 12대 1의 비율임을 알게 되었습니다. 그런데 몸의 생김새는 자기네들과 닮았기 때문에, 내 몸의 크기는 $12 \times 12 \times 12 = 1728$로 계산하였습니다. 그래서 그만한 수자의 사람들이 필요로 하는 음식물이 배급되어야 한다는 것이었습니다(pp.60-61).

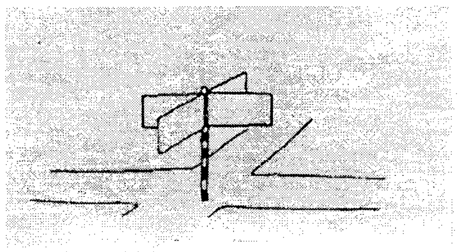
첫 번째 부분의 목표 지식은 연비 개념 및 표현, 간단한 자연수의 비로 나타내기와 같이 표현과 관련되며, 해당 학년은 6-나 단계이다.

두 번째 부분은 8-나 단계의 도형의 닮음비와 부피비에 대한 내용임을 쉽게 파악할 수 있지만 Treffers(1978)가 지적했듯이, 필요한 음식물은 신체의 표면적, 즉 넓이비에 비례해야 하므로 동화 작가의 생물학적 오류를 이용하여 도형의 닮음비와 넓이비, 부피비 사이의 관계를 의미있게 다룰 수 있는 좋은 기회가 된다.

4. 가상의 상황

Freudenthal이 수학화의 의미를 구체화하기 위해 예시한 '수중 나라 프로젝트'는 공간에 대한 탐구를 목표로 한다. 그 일부인 '길 표지와 거리' 부분은 상상의 나라에서 거리의 비에 관한 사고를 유도한다.

(교실에 걸린 수중 나라 포스터를 보며) 이 십자로에 길 표지판을 하나 놓아보세요.



- 그 표지판은 팔이 몇 개나 있어야 할까?
- 그 팔에는 어떤 그림들이 부착되어야 할까?
- (방향들을 그림으로 표시하는 표지판을 제시하며) 표지판을 그것에 해당되는 십자로에 세워 보세요.
- 이 길이 4㎞ 라면, 저 길은 거리가 얼마일까?
- 여러분은 1㎞ 길이의 길을 찾을 수 있나요?

(Freudenthal, 1976; 강문봉(2001)에서 재인용)

공간 탐구를 목표로 한 프로젝트이지만 세부적으로 끝의 두 문항은 거리의 비를 겨냥한 것이다. 우리 나라의 제 7차 수학과 교육과정에 따르면 공간 탐구는 초등학교 2-나 단계의 쌓기나무놀이 단원과 관련되어 공간에 대한 감각과 직관을 다루게 된다. 마찬가지로 이 문제를 활용하여 길이에 대한 어림을 통해 '몇 배'와 같은 일상적 용어로서 비형식적으로 비례의 의미를 갖게 할 수 있다. 나아가 이 상황을 형식적인 수준으로 수학화하여 지도 축척과 관련하여 비례식에 대한 학습으로 이끌 수도 있다.

5. 수학 고전

중국의 수학사를 대표하는 산서 '구장산술'은 실생활 문맥에서 사용되는 수학 문제와 답, 그리고 그 풀이 방법으로 구성되어 있다. 수학사에 등장하는 문제들은 아동의 문제해결 태도에 긍정적으로 역할하며, 특히 우리 나라 고유의 수학 연구에도 큰 영향을 미친 중국의 수학사를 언급하면서 관심을 고조시킬 수 있을 것이다.

문제: 지금 소, 말, 양이 남의 모종을 먹어치웠다. 모종 주인이 조 5말을 변상하라고 하는데, 양 주인은 "내 양은 말의 반만 먹었다"고 하고, 말 주인은 "내 말은 소의 반만 먹었다"고 하므로, 그런 차이에 따라서 변상하려고 한다. 각자 얼마를 내야 하는가?

답: 소 주인은 2말 $8\frac{4}{7}$되, 말 주인은 1말 $4\frac{2}{7}$되, 양 주인은 $7\frac{1}{7}$되를 낸다.

(구장산술 제3권 쇠분(衰分)[6] 중)

이 자료의 목표 지식은 양 : 말, 말 : 소의 비로부터 양 : 말 : 소의 비를 생각하는 연비와 비례배분으로, 6-나 단계에서 활용 가능하다. 비의 개념을 갖고 세 가지를 비로 표현하고자 하는 시도가 있기까지 표로 만들어 보기, 5말을 전체로 하는 막대를 세 항목의 크기에 따라 나누어보기(비율 그래프), (½, 1, 2), (1, 2, 4), (0.75, 1.5, 3) 등의 시행착오를 경험할 수 있다. 그리고 본문에 제시된 답을 이해하기 위해서는 '말, 되'라는 전통 단위에 대한 설명이 부가되어야 하며, 답을 달리 표현하는 활동도 가능하다.

Ⅴ. 맺음말

수학 교육에서 상황문제는 수학 학습을 위한 출발점으로 역할하는 풍부한 문맥을 지닌 문제로서, 문제해결 과정을 통해 그 해결 도구에 해당하는 새로운 수학적 지식을 구성하도록 하는 문제를 말한다.

이론적으로 수학 학습을 위해 상황문제를 활용하는 가치를 인정한다고 하더라도, 가르치고자하는 수학적 개념에 대해 앞서 언급한 특성을 충실히 만족하는 상황문제를 발견 내지 구성하기란, 그것을 활용하여 수업을 실시하는 것 이상으로 어려운 일이다.

더욱이 Douady(1986)는 학습하지 않은 지식을 문제해결의 도구로 사용하는 것이 모든 수학적 지식에 대해 가능한 것은 아니라고 하였다. 또한 4장의 상황문제를 만들기 위한 자료 및 그 활용 방안에서 미루어 짐작할 수 있듯이, 본 고에서 제시한 상황문제의 특성을 모두 만족시키는 문제를 찾는 것은 쉽지 않은 일이

6) 차이를 반영하여 나눈다는 의미로, 비례 배분에 관련된 문제로 이루어져 있다.

다. 가령 옛 지식의 불충분함으로 인해 문제해결 결과가 미흡하다는 것을 상황 자체가 지적해주는 상황에 대한 아이디어는 매우 제한적이다. 그러한 경우, 상황문제를 활용하려는 의도에 있어 더욱 본질적인 것은 목표 지식이 문제해결 도구가 된다는 것이므로 교사의 개입을 보완적으로 이용할 수 밖에 없다. 다시 말해 특성 중 일부를 완화된 방식으로 만족시키는 상황문제를 찾는 것에 자족하고, 그것의 활용면에서 효과를 극대화하는 방안을 연구할 필요가 있다.

한편, 상황문제가 의미를 갖는 것은 실생활의 풍부한 문맥, 다른 학문, 또는 수학 그 자체가 수학 학습 결과의 적용 대상에 국한되는 것이 아니라, 수학 학습을 위한 출발점으로서 역할 할 때이다. 사실 문제 자체로서 그것이 상황문제인지 아닌지를 구분하는 것은 의미가 없다. 상황문제는 교수학적 역할 상의 구분에서 기인하는 것으로서, 문제를 상황문제로 만드는 것은 교수 과정에서 그것을 어떻게 활용하는가에 달려있다. 따라서 상황문제에 대한 고찰은 사전 분석을 포함한 구체적인 수업 계획과 함께 이루어져야 하는 것이다.

수학 학습을 위해 상황문제를 활용하고자 할 때 교사가 주의해야 할 점으로 다음과 같은 것을 생각할 수 있다.

첫째, 상황문제를 활용하여 가르치고자 하는 수학적 지식이 무엇인지를 분명히 해야 한다. 일반적으로 수업을 시작하기에 앞서 학습 목표를 명확히 제시하는 것과는 차이가 있다. 후자는 학생들에게 목표를 뚜렷하게 의식시키고자 하는 의도에서 비롯되지만, 전자의 경우에는 그 목표가 문제해결의 도구로 사용되는 과정을 통해 목표 지식을 구성하게 되므로 학생의 입장에서는 학습 목표가 암묵적으로 존재할 뿐이다. 이러한 암묵성은 역설적으로 교사로 하여금 문제 구성으로 시작하는 수업 계획 단계부터 수업 전개 과정 내내 목표 지식을 의식할 것을 요구한다.

둘째, 상황문제를 활용하는 목적 중 하나는 새로운 수학적 지식을 구성하는 데 있으므로 문제 구성에 수반되는 사전 분석시 적절한 교수학적 변인을 선택해야 하는 중요성이 부각된다. 예를 들어 3장의 Brousseau의 사례에서 의도하는 새로운 지식이 분수와 소수의 곱셈이기 때문에 4cm인 변의 길이를 4의 배수가 아닌 7cm로 바꾸라는 지시가 의미있는 것이다.

셋째, 충분한 사전 분석에도 불구하고 실제 수업 장면에서는 예기하지 못한 학생 활동이 있게 마련이다. 계획 단계에서 학습자의 표상, 활용 가능한 기지의 지식 등, 가능한 한 다양한 교수학적 변인을 고려하여 그러한 사태에 대비할 필요가 있다.

넷째, 교사의 역할 정도에 대해 고려할 필요가 있다. 진정한 상황문제의 특성에 따르면, 교사의 역할은 학생의 활동 결과에 대해 옳고 그름을 판단하는 것이 아니라 학생들을 독려하고 도움을 주는 것이다. 그러나, 실제 수업 상황에서 교사가 어느 정도의 도움을 주며 학생 활동을 안내할 것인지에 대한 선택이 있어야 한다.

본 연구는 실제로 상황문제를 만들기 위해 활용할 수 있는 사례와 자료의 보기를 제시하였다는 점에서 의의를 갖지만 실제 수업에서 어떻게 활용할 것인가에 대한 구체적인 계획을 제시하지 못한다는 점에서 제한적이다. 이러한 제한점은 교사들의 사전 분석에 기초한 반복적인 교실 적용에 의해 개선될 수 있으리라 기대한다.

참고문헌

강문봉 외 9인(2000). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.
유휘(2000). 구장산술 · 주비산경. 차종천(역). 서울: 범양사 출판부.
조나단 스위프트(1992). 걸리버 여행기. 이종구(역). 서울: 계몽사.
Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: *La Pensée Sauvage,* Editions.
Clavier, Y., Bia, J., & Marechal, C. (1988). *Objectif calcul C.M.2.* Paris: HATIER.
Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialéctique outil-objet. *Recherches endidactique des mathématiques,* 7(2), 133-170.
Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoir scolaire.* Paris: PUF.
Treffers, A. (1978). *Three dimensions.* Dordvecht, : D. Reidel Publishing Company
___________(1993). Wiskobas and Freudenthal: Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 25,* 89-108.

Application of the situation-problems for learning mathematics

Chang, Hye Won (Inchon National University of Education)

A Situation-problem, one of the problems in school mathematics, plays a role as the starting point of learning mathematics. It leads to construct knowledge which is a tool for solving the problems. Whether the problem is a situation-problem or not, it depends upon how to use that problem. Since posing situation-problems is accompanied by prior analysis and planning for teaching in the class, it is a difficult task.

This paper focuses on the characteristics of situation-problems and on how their characteristics are realized in the process of classroom instruction. For this purpose, it analyzes the context of classroom instruction to which the 'puzzle problem' model suggested by Brousseau is applied. The model is considered as a typical situation-problem, which aims at proportionality and linearity. In addition, this paper suggests various sources of information that are useful in posing the situation-problems related to the ratio concepts.