대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 463-481. Sep 2002

형식불역의 원리에 관한 小考

이 승 우*

Ⅰ. 서론

수학은 학생, 교사 모두에게 항상 모순 없이 완벽하게 갖추어진 모습으로 다가오고 우리는 그 위엄에 눌려 그것이 인간 사고의 창조물이라는 것을 쉽게 망각한다. 수학의 이러한 면모는 학생들의 질문에 때로 교사가 형식주의적인 입장을 취하도록 강요하며 학생들은 그러한 교사의 태도와 생각에 쉽게 감염되는 것 같다. 예를 들어 학생의 '왜'라는 질문에 교사는 '정의니까'라고 쉽게 대답해버리는 경향이 있는데 이러한 대답은 결과적으로 수학에 대해 상상하고 흥미를 가질 수 있는 기회를 학생들로부터 박탈하게 된다. 교육의 실제에 있어서 수학언어의 형식성과 이를 바탕으로 한 연역적 전개라는 교과서의 특성은 학생들이 수학언어만을 학습하거나 수학의 내용을 수학언어의 구조와 동일시하게 만들 가능성이 있다. 특히, Rickart (1996, p.293)는 교사가 대수를 기계적으로 교수하게 될 때, 학생들이 형식주의[1)]만을 학습하게 되는 결과를 가져올 수 있음을 지적하고 있다. 형식주의적인 교육 속에서 학생들은 제시되는 정의와 계산 규칙만을 기계적으로 학습하거나 그 안에서 표면적으로 드러나게 되는 수학언어의 규칙만을 중요시하여 이를 수동적으로 받아들이고 사용하는 것에 익숙해짐으로써 수학에 대해 혐오하게 되거나 수학적 사고를 경험하지 못 한 채 수학의 권위에 맹종하면서 수학에 대한 형식주의적 관점을 강요받게 되는 것이다. 형식적인 대수 연산을 대수 체계라는 개념과 관련짓지 못 하고 숙달한 학생은 바람직한 대수 개념을 대수내용에 비해 상대적으로 피상적으로 관련된 형식언어의 구조로 대체하여 학습한 것이다. 이러한 측면에서 Rickart(1996, p. 294)는 교사가 대수 교육에 있어 학생들이 대수 체계에 대한 기초적 이해를 하도록 돕는 것이 바람직하다는 점을 끊임없이 의식해야 한다고 말한다. 특히, 배우는 학생들은 수학에 대한 교사의 가치관을 그대로 받아들이기 쉽다는 점에서 교육이 형식주의적으로 흐르지 않도록 하기 위해서는 교사가 수학교과서의 조직 원리를 충분히 이해하고 그 제한점과 한계를 인식하는 것이 무엇보다 필요하다.

산술에서 대수로의 전환에 있어 역사적으로 중요한 역할을 하였던 형식불역의 원리는 학교수학에서도 대수 구조를 확장하기 위해 실제로 중요하게 사용되고 있으므로 본고에서는 이를

---

* 서울대대학원

1) 수학자는 내용 즉, 형식적 언어로 기술된 수학 구조의 본질을 매우 중요하게 생각하여 이를 강조할 때가 있으며 다른 때에는 수학 체계와 주어진 연산이 순수한 형식주의 속으로 환원시키는 것에 관심이 있을 수도 있다. 그러나 중요한 것은 수학자들은 필요하면, 형식주의 뒤에 있는 내용에 즉각 주의를 이동시킬 수 있다는 것이다. 몇몇 형식주의자들이 수학과 형식주의를 동일시 하지만 이것은 기초 과정에 있는 학생들의 관점과는 공통점이 없는 하나의 철학적 입장일 뿐이다(Rickart, 1996, p.293).

학생들의 대수적 구조에 대한 인식을 가능하게 하는 교육 원리로 가정하고 그 교육적 가치를 탐구해 보고자 한다. 산술을 기호화한 것으로 간주되는 19세기 초 대수학이 여전히 고등학교와 대학 1학년 때 배우는 대수학의 관점이 되고 있다는(Eves, 1995, p.458) 측면에서 볼 때, 이 시기에 발생한 형식불역의 원리는 학교수학에서 산술을 완성하는 최고 정점이 되면서 또한 추상대수로의 출발점을 학생들에게 제시하게 될 것으로 생각된다. 또한, 형식불역의 원리는 학생들이 산술적 사고에서 대수적 사고로 전환하는데 있어 잠재적으로 커다란 영향을 미칠 것으로 생각되므로 학교수학 교과서에서 형식불역의 원리가 교재구성의 원리로써 어떠한 방식으로 내재되어 사용되고 있는지 살펴보는 것은 의미 있는 일일 것이다. 따라서 본고에서는 형식불역의 원리에 대한 역사적 배경과 형식불역의 원리에 따라 대수 구조가 확장되는 방식 등을 알아보고, 형식불역의 원리가 대수의 구조적 측면을 강조하는 대수적 사고의 한 일면으로서 유용한 발견술이 될 뿐만 아니라 확장되는 연산의 정의에 있어 본질적인 창조과 정임을 고찰한다. 마지막으로 형식불역의 원리에 따른 지수법칙의 확장에 있어 발생되는 문제점과 그에 대한 논의를 정리함으로써 형식불역의 원리를 통해 형식주의적 교육의 극복 가능성을 탐색해 본다.

II. 형식불역의 원리의 발생에 대한 역사적 배경

1800년까지 대수는 방정식의 풀이를 의미하였고 1900년까지는 대수가 다양한 수학 구조에 대한 연구 즉, 기술된 특정한 정의를 만족하면서 잘 정의된(well-defined) 연산이 있는 집합에 대한 연구로 이루어졌다(Katz, 1993, p.585). 대수에 대한 이러한 인식의 변화는 의미의 일반성과 관련하여 수와 그 연산에 대한 의미획득의 근거가 자연수나 분수와 같이 일상적인 인간의 활동에서 발생하는 직관으로부터 형식적이고 추상적인 것으로 변화되는 과정을 설명하며 시기적으로 19세기의 대수학이 산술과 추상대수 사이에 위치하는 것으로 생각된다. 19세기에는 무엇보다 음수와 복소수에 대한 이해를 위한 핵심 아이디어로 수체계를 확장하는 개념이 발생하였는데 이것은 수를 다루는 관점의 근본적인 변화를 의미하였으며(Hefendehl-Hebeker, 1991, p.30), 이러한 변화를 가능하게 한 것이 형식불역의 원리이다.

역사적으로 음수의 기원은 방정식[2]이며, 방정식의 풀이법이 개발되고 점차 알고리즘화 되면서 사람들은 방정식의 유효성의 영역을 확장시키고자 하였다(Freudenthal, 1983, p.432). 18세기(그리고 그 이전)에도 음수와 허수는 자유롭게 사용되었으며 모든 종류의 대수적 결과를 얻는데 필요한 것으로 간주되었지만 수학자들은 여러 물리적 유사물[3]로 밖에는 그 의미를 설명할 수 없었다(Katz, 1993, p.611). 음수와 허수에 대한 의미 획득의 어려움으로 인해 사람들은 그 존재성을 의심하였고, 이들 개념에 대한 적절한 토대의 부족은 음수와 허수의 사용을 포기하는 대수교과서의 출현(Katz, 1993, p.611)으로 이어졌다. 이와 같은 상황을 극복하

2) 역사적으로 $x^2-x-2=0$이나 $x-1=2/x$와 같은 2차 방정식과 2차 방정식으로 축소될 수 있는 방정식이 음수의 필요성을 만들어 냈다(Freudenthal, 1983, p.432). 이러한 측면에서 $x+1=0$과 같은 인위적인 일차방정식을 통해 음수의 존재를 인정하는 것은 역사적으로 나중에 이루어진 일임을 짐작할 수 있다.

3) Freudenthal(1983, pp.436-437)에 따르면 오래된 문헌에서는 음수에 대한 모델로 자본-부채, 이익-손실, 온도나 계단의 오르내림 등이 사용되었으며, 이 모델들은 현재에도 부분적으로 이용되고 있다.

산술		산술대수		기호대수
7-(5-2)=7+2-5	$\overset{①}{\Rightarrow}$	$c<b$, $b-c<a$일 때, a-(b-c)=a+c-b	$\overset{②}{\Rightarrow}$	a-(b-c)=a+c-b

기 위해 George Peacock(1791-1858)은 대수를 "산술대수"와 "기호대수"로 부르는 두 가지 형태의 대수로 구분하였는데 산술대수는 일반적인 대수(universal algebra) 즉, 수 자체보다는 문자를 사용함으로써 음의 실수에 대한 산술의 원리를 개발하는 수단이었다. 따라서 산술대수에서는 $c<b$ 이고 $b-c<a$라는 조건하에서만 a-(b-c)=a+c-b라고 쓸 수 있고 뺄셈이 실제로 수행될 수 있는 반면, 기호대수에서는 기호연산이 산술의 유사한 연산으로부터 유도되어도 이러한 연산의 적용 범위를 제한할 필요가 없다. 즉, 기호대수에서는 위의 등식이 어떤 제한 조건 없이 일반적으로 유효하고 식에 포함된 기호(문자)는 어떤 특별한 해석도 필요하지 않으며 산술로부터 유도된 방식으로 이러한 기호를 연산한다(Katz, 1993, pp.611-612). 이 과정을 위와 같이 도식화하여 보자.

위의 도식에서 보면 ①에서 수가 기호로 대치되면서 자연수나 분수와 같이 양이나 크기에 기반하는 직관적인 수의 관념보다 알고리즘적인 계산수로서의 특징이 두드러지게 되고 그 다음 ②에서는 연산의 제한조건이 사라지면서 그에 따른 연산의 일반화가 이루어지는 것이 나타난다. 이러한 과정에서 음수나 허수의 존재성과 그 의미에 대한 질문은 의식의 한편으로 물러나고 연산 법칙이 자유롭게 기호대수에 적용되면서 양수를 넘어서는 새로운 대상이 자연스럽게 도입되는 것이다. 이러한 측면에서 무엇이 음수인가 하는 질문에 대한 Peacock의 대답은 단지 -a 형태의 기호라는 것이며 이와 유사하게 $\sqrt{-1}$도 산술에서 제곱근이 따르는 동일한 규칙을 따르는 단지 하나의 기호로서 $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$을 만족하게 되는 것이다(Katz, 1993, p.612). Peacock은 형식불역의 원리를 '제한적인 값을 갖는 기호가 취하는 형식이 일반적인 경우가 기호의 값이 제한되지 않고 그 형식도 일반적인 경우와 동등한 것과 마찬가지로, 대수적 형식이 동등한 것은 무엇이든지 서로 동등할 것이다'라고 설명한다(Katz, 1993, pp. 612-613 재인용). 즉, 형식불역의 원리는 산술에서 등식으로 표현할 수 있는 임의의 법칙은 포함된 기호를 해석함에 있어 모든 제한을 제거함으로써 기호대수의 법칙을 결정할 수 있다는 것을 의미한다(Katz, 1993, p.613). 이것은 수를 다루는 관점의 근본적인 변화를 의미하는데, 이를 바탕으로 수에 대한 개념이 양이라는 개념에 대한 고려 없이 순전히 형식적인 방법으로 도입될 수 있으며, 양에 대한 개념은 단지 이러한 형태에 대한 직관적인 토대로만 나타났다(Hefendehl-Hebeker, 1991, p.30).

역사적으로 형식불역의 원리에 선행하는 방정식의 풀이는 18세기까지 그 자체가 곧 대수를 의미하는 것이었다. Freudenthal(1983, p.433)에 따르면 음수의 존재성은 대수적 풀이법의 일반성을 확보하려는 것에서 나타나는데, 음수의 존재성이 형식불역의 원리를 통해 받아들여지고 있으므로 이 두 가지를 비교하여 보자.

문제[4]	①′식세우기	②′방정식의 풀이	③′검토
	⇒	⇒	⇒
어떤 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이를 뺀 다음 2를 더 빼었더니 그 결과가 0이 되었다. 이 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.	$x>0$ $x^2-x-2=0$--㉠	$x^2-x-2=0$-- ㉡ $(x-2)(x+1)=0$ $\therefore x=2,\ -1$	그런데, $x>0$이므로 $x=2$

위에서 미지수를 x라 놓는 과정 ①′은 양수를 문자로 일반화하는 과정 ①에 대응되는데 이 두 과정은 모두 실제 상황을 대수언어로 번역하는 과정으로 현실 문맥으로부터 탈피하는 것이다. ②와 ②′에서는 모두 제한 조건이 사라지면서 필요조건으로 일반화된다. 위에서 ③′은 구해진 해가 주어진 방정식 ㉠의 충분조건이 되는지 따지는 종합의 과정이므로 형식불역의 원리와는 대응되지 않는다.[5] 음수 -1의 존재성은 식 ㉠에서 $x>0$이라는 조건을 제거하여 만든 식 ㉡에서 얻어지고 이로부터 방정식 풀이법의 일반성이 확보된다. 이러한 측면에서 Freudenthal(1983, p.434)은 대수적 원리[6]가 풀이법의 일반성을 포함하며 이 보다 더 넓은 관점에서 형성되었지만 실질적으로 서로 동일한 아이디어라고 말한다. ②와 ②′이 모두 연산 법칙의 일반화 과정이지만 좀 더 자세히 살펴보면 ②′은 -1을 해로 받아들이기 위한 과정이므로 연산보다 음수의 존재성에 좀 더 강하게 관련되어 있다면 ②에서는 수와 관련된 기호의 의미로부터 탈피하여 이들 기호에 대한 연산법칙으로 대수의 초점이 이동되기 시작하였음을

4) Freudenthal(1983, p.432)이 제시한 식에 맞추어 연구자가 인위적으로 만든 문제이며 풀이도 그러하다.

5) Peacock이 ②의 과정을 형식불역이 원리로 보았다면 수와 연산을 확장하는 실제 과정에서는 방정식의 풀이에서 ③′과 같은 종합과정이 포함된다. 즉, 방정식의 풀이와 형식불역의 원리가 모두 일반성을 확장하는 필요조건을 구하는 과정이고 이러한 확장의 자유는 가정한 통상적인 법칙이 유효하도록 하는 필요에 의해 제한되는 것이므로 형식불역의 원리에 따르는 확장과정도 다시 충분조건으로 제한되어야 한다. 따라서 형식불역의 원리에 대한 Peacock의 관점을 좀 더 넓히면 형식불역의 원리에 따르는 확장과정에도 ③′에 대응하는 종합의 과정으로 정의와 증명과정이 존재한다. 이에 대해서는 형식불역의 원리에 대한 발견술적 측면을 고찰하는 다음 절에서 논의한다.

6) Peacock의 형식불역의 원리와 Freudenthal의 대수적 원리는 수와 연산의 확장의 원리라는 측면에서는 동일한 것으로 보이지만 시대적인 차이만큼 두 사람이 갖고 있는 관념의 차이도 있을 것으로 예측된다. 예를 들어, 지수법칙에서 a가 양의 유리수이고 n이 양의 정수라면 a^n은 정의에 의하여 a를 n번 곱한 것이며 이 정의로부터 임의의 두 양의 정수 m,n에 대하여 $a^m a^n=a^{m+n}$은 쉽게 얻어지는데, Peacock은 형식리에 의하여 기호대수에서 밑이 a나 지수 m,n에 관계없이 $a^m a^n=a^{m+n}$이라고 확언했다(Eves, 1995, p.460). 그러나 위의 지수법칙이 항상 성립하는 것은 아니므로, 현대의 수학자인 Freudenthal이 19세기 수학자인 Peacock과 같이 형식불역의 원리를 소박하게 적용하지는 않았을 것이며 성립하지 않는 경우를 제외하였을 것이다.

7) Peacock(1830)은 기호대수를 "임의의 법칙으로 정의한 임의의 부호와 기호의 조합을 다루는 과학"이라고 정의하였다(Katz, 1993, p.614). 이러한 정의는 Maclane과 Birkhoff(1967)가 대수적 체계를 덧셈과 곱셈과 같은 조작이 어떤 기본적인 규칙을 만족하기만 하면 그 기능이 작동되는 임의의 원소의 집합으로 기술한 것(우정호, 1998, 재인용)과 유사하다. 그러나 Peacock은 1830년과 1845년 그의 저술 모두에서 '임의의 규칙'을 사용하지는 않았으며 그가 사용한 모든 규칙은 산술법칙에서 형식불역의 원리를 사용하여 유도한 것이었다. 그럼에도 대수의 결과가 "규약만으로 존재한다고 말할 수 있다"는 Peacock의 진술은 대수 전체에 대한 새로운 의미가 시작됨을 나타내며 이 의미는 다른 영국 수학자들에 의해 탐구되었고(Katz, 1993, p.614)이것이 유럽대륙으로 퍼져 현대추상대수학의 수문을 열었다(Eves, 1995, pp.460-461).

알 수 있다.[7] 즉 알고리즘적인 방정식의 풀이 과정이 연산을 자유롭게 사용하면서도 이를 의식하지 못 하고 수 자체에만 관심을 갖던 단계라면 형식불역의 원리는 연산 법칙에 관심을 갖는 단계이며 이러한 인식의 확장이 19세기에 이루어진 것으로 볼 수 있을 것이다.[8] 따라서 형식불역의 원리에 따른 연산 법칙에 대한 일반성의 확장은 양과 크기와 관련된 구체적인 수와 그 연산이 직관적 이해되었던 것으로부터 확장된 연산 법칙을 통해 새로운 대상을 형식적으로 받아들이는 것을 가능하게 하는 것이므로 형식불역의 원리는 수와 연산에 대해 이미 형성된 직관적인 개념이 완성되는 종착점이면서 동시에 추상적인 대수의 구조에 대한 인식을 가능하게 하는 출발점이라고 할 수 있을 것이다.

III. 형식불역의 원리의 발견술적 특징

형식불역의 원리에 따른 대수구조의 확장은 때로 모순을 수반하며 무제한적으로 실현되지는 않는다. 예를 들어, 복소수가 사원수(quaternion)로 확장될 때, 곱셈에 대한 교환법칙은 성립하지 않는다(Hefendehl-Hebeker, 1991). 따라서 형식불역의 원리가 대수적 구조의 형식적 확장을 이끄는 지침이기는 하지만 그 자체가 완벽한 하나의 논리 체계이거나 알고리즘이 아니므로 하나의 발견술이라 할 수 있다. 또한, 형식불역의 원리가 구조의 전이를 가능하게 하는 사고과정인 유추를 바탕으로 이루어지고 유추 자체도 발견술적인 측면이 강하므로(졸고, 2001), 형식불역의 원리를 수학을 창조하는 원리(우정호, 1998, p.196)로서 하나의 발견술로 보는 것이 가능할 것이다. Hefendehl-Hebeker (1991)의 글을 중심으로 형식불역의 원리에 따른 음수 도입 과정에서 이 원리의 발견술적 측면을 살펴보자.

음수 도입에 있어 출발점은 자연수와 그 계산의 기초 법칙인 덧셈과 곱셈에 대한 결합, 교환 법칙과 분배법칙이다.[9] 이들 법칙이 부호가 붙은 수라는 더 넓은 체계에서 성립할 것이라는 가정에서 출발하여 음수의 연산을 정의하는데 필요한 조건을 산출한다.

n을 자연수라 하고 방정식 $x+n=0$의 해를 새로운 기호 $-n$으로 도입한다. 즉 항상

$$(-n)+n=0 \qquad (*)$$

이며 이 방정식이 $-n$을 유일하게 결정한다는 것이 필요하다.[10] 여기서 음의 정수의 집합이 얻어지고 0과 양의 정수는 함께 정수의 집합을 형성하는데 이 정수집합에서 자연수의 계산 법칙이 모순을 초래하지 않도록 덧셈과 곱셈을 확장하여 정의할 필요가 있다. 예를 들어 합 $(-3)+(-4)$가 어떻게 정의되는지 알기 위해서 다음 등식에서 출발한다.

---

8) 19세기 초 George Peacock과 Augustus De Morgan을 포함한 영국의 수학자들은 대수의 기본적인 아이디어를 공리화하고 정수의 특성을 다른 형태의 양에 얼마만큼이나 일반화할 수 있는지 결정하려는 시도를 하였다(Katz, 1993, p.586). 이러한 측면에서 19세기 영국의 대수는 기호 연산과 이것의 수학 진리에 대한 관계에 대한 새로운 관심으로 특징지어진다(Katz, 1993, p.611)

9) 이들 법칙은 경험이나 구성적인 방법(Peano의 공리)를 사용해서 얻어질 수 있으며 0으로 계산하는 규칙도 받아들인다.

10) $\forall -n, -n'$ s.t. $(-n)+n=0$, $(-n')+n=0$;
$-n=(-n)+0=(-n)+\{(-n')+n\}=(-n)+\{n+(-n')\}=\{(-n)+n\}+(-n')=0+(-n')=(-n')$

$$(-3)+3=0 \quad (1)$$
$$(-4)+4=0 \quad (2)$$

그리고 교환법칙과 결합법칙이 성립하고 0의 속성이 유지되는 것으로 생각하여 두 식을 더하면 다음 등식을 얻는다.

$$\{(-3)+(-4)\}+(3+4)=0$$

그런데 3+4=7이고 관계(*)와 유일성으로부터

$$(-3)+(-4)=-7$$

을 얻는다. 곱(-3)(-4)의 정의에 대한 필요조건을 얻기 위해서 분배법칙과 규칙 $0\times x=x\times 0=0$의 불역성을 공리화하며[11] 등식 (1)과 (2)를 각각 4와 -3으로 곱한다.

$$(-3)\times 4+3\times 4=0$$
$$(-3)\times(-4)+(-3)\times 4=0$$

(*)와 유일성 조건의 관점에서

$$(-3)\times(-4)=3\times 4=12$$

가 나오며 또한

$$(-3)\times 4=-12$$

이다. 자연수를 m과 n으로 나타내면 다음과 같은 부호의 규칙을 얻는데 자연수에 대한 계산의 기본적인 규칙이 확장된 체계에서 성립한다는 것이 필요하였으므로 우리는 새로운 수로 계산하는 규칙을 정의하기 위한, 다음과 같은 필요 조건을 얻은 것이다.

$$(-m)+(-n)=-(m+n)$$
$$(-m)\times(-n)=m\times n$$
$$(-m)\times n=-(m\times n)$$

위의 유도 방법은 증명이 아니며, 확실히 증명하였다고 결론짓는 것은 부정확한 것이다. 그러나 하나의 연산이 더 넓은 영역으로 확장되도록 "확장된 연산" 자체에 대한 정의를 할 때, 기존의 특성을 유지하려는 열망은 안내자 역할을 할 수 있는 강력한 발견술로 간주될 수 있다(Borasi, 1992, p.59). 즉, 위의 결과로 나온 구조가 잘 정의되고 필요한 법칙을 만족한다는 것 등을 더 보여야만 하므로 형식불역의 원리는 증명하는 기능보다는 일종의 발견술을 포함하는 것이다(Hefendehl-Hebeker, 1991, p.31). 형식불역의 원리의 이러한 발견술적인 측면과 그에 따른 논증은 분명 개연적이며 엄밀한 수학적 논증과는 분명 차이가 있다. 이러한 측면에서 과거의 엄격한 독일의 대학교수들이 형식불역의 원리로는 증명된 것이 아무 것도 없다면서 이를 거부하였던 것으로 보인다. 이에 대해 Freudenthal(1973, pp.233-234)은 $(-3)\cdot(-4)=12$ 라고 보인 방법[12]이 수학적으로 가장 중요한 것으로 이는 개연적 논증이 아니며 수 개념을 자연수에서 정수로 통상적인 법칙이 유효한 채로 확장시키는 것이 가능하다면 그 결과는 본질적으로 유일하다는 것 즉, 여기에는 이러한 확장이 최대 한 개 존재한다는 것을 보인 것이라고 말한다. 또한 그는 이러한 구조의 발견이 중요한 것이고 그 존재성과 관련된 엄밀한 수학적 논의는 시간적으로나 그 중요성에 있어 그 다음인 것으로 이는 실제연구와 훌륭한 대학 강의에서 취하는 자유이며 이것은 방정식을 푸는 과정이 미지수를 찾기 위해 필요조건으로 방정식을 풀고 최종 단계에서만 참인지 검토하는

---

11) 다음식을 조작하기 위해서는 $0\times(-3)=(-3)\times 0=0$이라는 가정이 필요하다.
12) 각주 10)의 방법과 실제로 동일하다.

것과 동일한 것임을 지적하고 있다.

앞서 형식불역의 원리에 따른 확장의 전제는 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 더 넓은 체계에서 적용될 수 있다는 것이었는데 이는 새로운 대수적 구조에 대한 공리로 일단 간주하고 이를 바탕으로 확장을 시도하는 것이며 또한 이들 공리로부터 만들어진 것은 가정된 규칙의 성질을 만족시키는 어떠한 해석에도 적용될 수 있다. 이러한 관점에서 대수는 산술과 묶여지고 대수학은 순전히 전형적인 가설 연역적 학문이 된다[13](Eves, 1995, p.459). 이와 같이 형식불역의 원리의 발견적 측면에는 "~ 라면~이다(If~ then~)" 라는 가설-연역적 사고 방식이 내재되어 있음을 알 수 있으며, 이러한 가설 연역적인 전개로 나온 결과를 바탕으로 확장되는 연산을 정의하면 그 구조는 형식불역의 원리에 따라 가정된 기존 구조의 공리를 다시 만족시키게 되므로 새로운 대수적 구조가 만들어지는 것이다. 따라서 대수적 사고의 중요한 특징으로 볼 수 있는 "~라면~이다"라는 추론의 구조가 형식불역의 원리의 발견술적 측면에서 핵심적으로 작동하며 이는 특히 기존의 정의의 어떤 성질을 보존하면서 기존의 정의를 확장시켜 보다 일반적인 정의를 만들어내려고 할 때, 효과적으로 사용됨을 알 수 있다.

Ⅳ. 형식불역의 원리에 따른 확장의 방법

Freudenthal(1973, p.231, p.281)은 자신이 형식적(공리적) 외삽(the formal or axiomatic extrapolation)이라고 부르는 것과 귀납적 외삽법(the inductive-extrapolatory method)을 수와 연산에 대한 확장방식으로 제시하고 있다. 또한 SMSG의 교과서는 산술에서 실수로 구조를 확장함에 있어 현대의 집합론적 관점을 취하면서 형식불역의 원리에 따르고 있는데, 이는 수학의 구조를 교과과정에 포함시키고자 하였던 당시의 시대 상황을 반영하는 것으로 보인다. 현대 대수학의 형식적이고 엄밀한 방식을 통한 대수 구조의 제시가 어린 학생들에게는 지나치게 어려워서 교육적 의미가 그리 크지 않을 것이라는 점에서 학교 교과서에서는 형식불역의 원리를 이용하여 수와 연산을 확장할 때, 그 수준에 따라 유연하게 적용하는 것으로 보이는데 우리나라 6차[14] 교육과정의 교과서에는 이 세 가지 방법이 혼재되어 있는 것으로 보인다.

1. 집합론에 기초한 확장

Introduction to algebra part I (SMSG, 1962)에서는 이 책 전체에 걸쳐 현대의 집합론적 관점에서 수의 집합을 산술의 수(0과 양의 유리수)에서 실수로 먼저 확장한 다음 형식불역의 원리를 이용해 새로운 실수 구조의 발견뿐만 아니라 실수의 연산을 정의하고 그 특성을 증명하는 내용까지 다루고 있는데 1장부터 6장에 걸쳐 실수를 정의하고 산술의 수에 대한 특성을 알아보고 있다.

1장은 집합의 개념을 도입하고 수직선을 구성한다. 수직선은 먼저 한 직선을 그리고 그 위에서 임의의 두 점을 잡은 다음 왼쪽에 있는

13) Brumfiel과 Vance(1970)는 산술적 추론과 대수적 추론 사이를 명확하게 가를 수는 없지만 산술에 비해 대수가 기본적으로 일반화와 사용하는 연산의 특성과 관련되며 대수에는 "~라면~이다"라는 추론이 더 많다는 점을 지적하고 있다.

14) 현재 7차 교과서가 부분적으로만 쓰이고 있어서 7차 교과서를 분석하지 않았다.

점을 0, 오른쪽에 있는 점을 1이라 표시한다. 이 선분을 측도의 단위(unit of measure)로 하여 찍은 1의 오른편에 있는 점들을 차례로 2, 3, ...으로 붙여 가고 이 과정에서 모든 범자연수는 후자(successor)를 가진다고 설명한다. 양의 유리수는 선분을 분할하여 도입한다. 2장에서 곱셈이 동수누가라는 것과 수의 대소 관계, 교환, 결합, 분배 법칙 등의 개념을 살펴본다. 4장에서는 산술의 수(0과 양의 유리수)가 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀있고, 0과 1은 각각 덧셈과 곱셈에 대한 항등원이며, 덧셈과 곱셈에 대한 교환, 결합, 분배 법칙 등이 산술의 수에서 성립하는 연산의 특성임을 정리한다. 6장은 산술의 수에서와 같이 실수를 수직선으로 도입하는데 측도의 단위를 이용하여 정수집합을 { ..., -3, -2, -1, 0 1, 2, ...}로 정의하고 양의 유리수를 도입한 것과 마찬가지로 음의 유리수를 정의한다. 또한 유리수가 아니지만 수직선 위의 점과 결합되는 점을 무리수라 하고 실수의 집합은 유리수와 무리수의 합집합으로 정의하며 실수와 결합된 점들은 수직선 전체를 구성한다. 이와 같이 실수의 집합을 구성한 다음, 7장부터 마지막 장인 10장까지는 실수에 대한 사칙연산을 정의하고 실수의 특성을 증명하고 있다.

7장에서는 이익-손실 모델과 수직선 모델에서 정수의 덧셈연산을 살펴보고 이를 바탕으로 실수의 덧셈 연산을 정의하고 등식의 성질을 정리하며 8장에서는 곱셈을 정의하고 9장에서는 실수의 순서 특성(properties of order)에 관하여 다룬다. 마지막 10장에서는 뺄셈과 나눗셈의 의미가 각각 덧셈과 곱셈에 대한 역연산임을 보이고 있다. 연습문제는 보통 본문의 이해를 점검하는 질문과 계산 문제, 응용문제 등이 있으며 도전문제로 증명문제가 들어가 있는 章도 있다. SMSG의 교과서에는 형식불역의 원리를 사용하여 연산을 세심하게 확장하고 있는데 학생들에게 정의의 필요성을 다음과 같이 언급하고 있다.

> 덧셈에서 한 것과 꼭 같이 실수의 곱셈을 정의하게 될 것이다. 이것이 특별한 곱을 찾는데 도움이 되지는 않을 것이지만 단지 '어떻게 하는지 아는 것(knowing how)' 만으로는 결코 할 수 없는 것인, 곱셈의 특정한 특성에 대해 증명하는 것을 가능하게 할 것이다. 물론 우리의 정의가 가능한 모든 경우를 포함한다는 것을 보장해야만 한다(SMSG, 1962 , p.282).

SMSG의 교과서에서 산술의 수에서 실수로의 확장은 예로부터 얻어진 결과와 형식불역의 원리에 기초하고 있는데 이는 다음의 기술에서 잘 드러나 있다.

> 덧셈에 대한 우리의 정의는 수직선과 이익-손실 등의 예로부터 얻어진 결과로부터 나온 것이었다. 동시에 우리는 산술의 수에 적용되었던 특성이 음수를 포함하는 모든 실수에도 성립하도록 정의하고자 하였다(SMSG, 1962, p.243).
> 이제 실수에 대한 곱셈을 정의하였으므로 우리는 산술에서 열거하였던 곱셈의 특성이 실수 전체의 집합에도 적용된다는 것을 확인하여야만 한다(SMSG, 1962, p.286).

이상과 같이 SMSG의 교과서는 집합의 개념을 토대로 수직선 공리를 이용하여 실수의 집합을 정의하고 형식불역의 원리를 이용하여 산술에서의 연산을 실수영역으로 확장하여 그 연산을 정의하고 다시 정의된 연산의 특성을 증명하는 과정을 보이고 있는데, 형식불역의 원리를 다음과 같이 발견적으로 사용하고 있다.

> 이 장에서 우리는 실수의 곱이 산술의 곱과 같이 작용하도록 하기 위해 두 실수가 어떤 방식으로 곱해져야 할지 결정하게 될 것이다. 즉, 우리는 임의의 실수 a, b, c에 대해 다음과 같

은 특성이 적용되도록 하고싶다.

ab=ba	곱셈에 대한 교환적 특성
(ab)c=a(bc)	곱셈에 대한 결합적 특성
(a)(1)=a	1에 대한 곱셈의 특성
(a)(0)=0	0에 대한 곱셈의 특성
a(b+c)=ab+ac	분배적 특성

(SMSG, 1962, p.269)

우리가 모든 실수에 대해 성립하기를 바라던 곱셈의 특성이 있었음을 기억해보자. 그러한 특성 중 하나는 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이다. 다음 논증에서 단계를 따라가면서 관찰하자.

0=(3)(0) 우리는 0과 임의의 실수의 곱이 0이라는 것에 이미 동의하였었다.

0=(3)(2+(-2)) 첫 번째 문장이 참이라면 이것도 참이다. "2+(-2)"는 단지 수 0에 대한 다른 이름일 뿐이다.

0=(3)(2) + (3)(-2) 우리는 모든 실수에 대해 분배법칙이 성립하기를 원하고 있으므로 이것이 우리가 할 수 있기를 원하는[15] 것이다. 문제는 이것이 참이 되도록 하기 위해 (3)(-2)를 어떻게 정의해야만 하는가 하는 것이다.

마지막 두 식이 참이 되도록 하기 위해서, (3)(-2)는 6에 더해서 0이 되는 수임에 틀림없다. 즉, (3)(-2)는 6의 덧셈에 대한 역원임에 틀림없다. 7장에서 증명하였듯이 하나의 수는 단 한 개의 덧셈에 대한 역원을 갖는다. 6의 덧셈에 대한 역원은 -6이다. 따라서 위의 예에서 분배법칙이 성립하기 위해서는 (3)(-2)는 -6으로 정의되어야만 한다. 이것이 이 절의 처음에 제시한 목록에서 "패턴"으로부터 얻어진 결과와 일치한다[16]는 것에 주목하자(SMSG, 1962, p.272).

위의 과정에서는 '~라면~이다'의 가설-연역적 사고가 드러나고 있다. 즉, 분배법칙이 성립한다고 가정할 때, 그 필요조건을 구하였으며 이러한 추측의 결과로부터 음수에 대한 곱셈 연산의 정의가 (3)(-2)는 -6와 같이 정의되어야 할 타당성을 합리적으로 이끌어 내고 있다. SMSG (1962)의 교과서와 비교해 볼 때, 우리 나라의 교과서에서는 실수의 영역으로 확장하면서 형식불역의 원리를 어떻게 사용하고 있는지 간략하게 살펴보자.

우리 나라의 중학교 1학년에서는 정수를 부호가 붙은 수로 도입을 하며 유리수는 분수와 분모가 모두 정수로 나타낼 수 있는 수(단 분모는 0이 아니다)로 정의한다. 중학교에서는 항등원과 역원 등의 개념을 다루지는 않으며 수직선 모델 등을 도입하여 음수의 계산법칙을 정리하고 있는데 이것은 SMSG에서 수직선이나 이익-손실 모델에서 이들 법칙을 찾는 방식과 유사하다. 중학교 2학년에서는 유리수 집합이 유한 소수 집합과 순환 소수의 합집합과 같다는 것을 학습한 다음 중학교 3학년에는 무리수를 순환하지 않는 소수로, 실수를 유리수와 무리수의 합집합으로 정의한다. 고등학교 1학년에서는 수의 체계, 실수의 체계, 복소수의 체계, 실수의 연산, 복소수의 연산 등 대수적 구조를 암시하는 제목이 등장하며 '닫혀있다'와 실수의 덧셈과 곱셈의 기본성질로 항등원, 역원, 교환, 결합, 분배법칙 등을 제시하고 실수의 특성에 대한 증명을 간단히 다루고 있다.

우리 나라 중학교 1학년과 고등학교 1학년 교과서에서 모두 첫 단원은 집합을 다루며 II.

---

15) 원문에서 밑줄을 그어 강조하고 있다.
16) 이 과정에 들어가기에 앞서 교과서에 귀납적 외삽법(본 章의 3) 참고)을 제시하여 (3)(-2)를 추측하도록 하였다

수와 식에서 수의 집합을 정의하여 먼저 확장한 다음 확장된 집합 위에서의 연산을 다루고 있다는 점에서 SMSG와 같이 현대 추상 대수적인 관점을 받아들이고 있는 것으로 볼 수 있다. 그러나 SMSG의 교과서가 확장된 집합 위에서 성립하도록 연산을 확장하는데 형식불역의 원리를 발견적이고 명시적으로 사용하고 있는 반면, 우리의 교과서는 예를 통해 규칙을 발견하고 그 규칙을 바로 일반화하여 사용하도록 함으로써 연산의 확장보다는 계산자체에 중점을 두고 있는 것으로 보인다. 이러한 차이는 SMSG의 대수 교과서에서는 산술의 수에서 실수까지 계속 확장이 되고 있지만 우리 나라의 교과서에서는 대수를 따로 분리하고 있지 않으므로 중학교 1학년에서 고등학교 1학년에 걸쳐 이러한 과정이 차츰 이루어지고 있는 것이 큰 이유이며 무엇보다 중학교 1학년 과정에서 연산의 확장을 인식하게 한다는 것 자체가 큰 무리일 것이다. 그러나 형식불역의 원리가 우리의 교과서에서 발견적이고 명시적으로 사용되지 않음으로써 학생들은 연산의 확장을 인식하기가 어렵고, 고등학교 1학년 과정에서 실수의 연산법칙에 대한 기본 성질을 왜 받아들여야 하는지 또한 이를 이용하여 (-a)b=-ab, (-a)(-b)=ab 등을 증명하는 이유 등은 상실된다.

2. 형식적(공리적) 외삽

SMSG(1962)의 교과서에서 확장되는 수의 집합을 도입함에 있어 수직선 공리에 기초하여 수집합을 먼저 구성하고 연산의 확장을 다룬다면, 형식적(공리적) 외삽에서는 새로운 수와 연산을 방정식을 통해 동시에 받아들인다. 역사적으로 음수와 복소수가 방정식의 풀이과정 즉, 알고리즘적인 계산과정에서 출현하였으므로 수를 방정식의 해로 확장하는 것은 자연스러워 보이며 이러한 방식은 실제로 Peacock에서 Hankel에 이르면서 발전되어온 역사적 산물로 생각된다.[17] 다음과 같은 방정식은 주어진 수의 영역에서는 해가 없으므로 풀리지 않지만 새로운, 종류의 수로 새로운 기호 -3 , 7/4, $\sqrt{2}$, i[18]를 도입하면 등식이 성립 가능해지며 또한 이들 방정식은 새로운 기호에 '방정식의 해'라는 형식적인 의미를 부여한다(Freudenthal, 1973, pp.230-231).

$$x+3=0,\ 4x=7,\ x^2=2,\ x^2=-1$$ [19]

이 방식은 방정식의 해로 도입한 새로운 수가 기존 체계의 특성을 만족한다고 가정한 다음 그 연산 규칙이 어떻게 이루어질 것인지 찾아보는 것이며 이는 앞서 Hefendehl- Hebeker (1991)의 글을 통해 살펴본 바 있다. 위와 같이 새로운 수를 '방정식의 해'로 형식적(공리적)으로 도입하여 새로운 기호를 붙이고 확장하는 방식을 Freudenthal(1973, p.231)은 형식적(공리적) 외삽[20]이라 하였는데 이렇게 부른 이유는 명확하지 않다. 그러나 다음과 같은 하나의 추

17) 19세기에는 무엇보다 음수와 복소수에 대한 이해를 위한 핵심 아이디어로 수체계를 확장하는 개념이 발생하였다. 이것은 수학자 Martin Ohm과 George Peacock에서 시작하였으며 Hermann Hankel이 그의 "Theorie der complexen Zahalen systeme"(복소체계 이론)(1867)에서 완성하였다(Hefendehl-Hebeker, 1991, p.30).

18) 역사적으로 양의 실수 7/4나 $\sqrt{2}$는 실재적이므로 직관적으로 이해가 가능했으나 음수나 허수는 그러하지 못 하였으므로 형식불역의 원리에 따라 방정식의 해로 형식적인 확장을 하는 것에 있어 그 교수적 의미는 차이가 있을 것이다.

19) 문자 x를 도입하지 않고 (-3)+3=0, 7/4×4=7, $(\sqrt{2})^2=2$, $i^2=-1$와 같이 도입할 수도 있다.

20) 대수적인 측면에서 이는 내삽과 외삽이다(Freudenthal, 1973, p.231).

측이 가능할 것이다.

위와 같은 방식에서 자연수 체계를 정수로 확장함에 있어 x+3=0을 만족하는 어떤 x를 도입할 때, x는 자연수 내에 있지 않는 원소이므로 이 때의 연산 +은 이러한 정의 속에서 자연수 범위 밖으로 이미 확장되어 있음을 알 수 있다. 현대 대수의 보다 엄밀한 전개에서는 주어진 집합에 대한 연산이 먼저 정의되어 있어야 하는데[21], 이와 비교할 때 x+3=0을 도입하는 순간 연산의 확장이 이미 하나의 잠재적인 공리로 받아들여지고 새로운 수를 이에 따라 계산하는 것이며 이 때, 새로운 수는 x+3=0이나 4x=7과 같은 방정식에서 본질적으로 역원으로 도입되고 있다. 이러한 측면에서 Freudenthal이 '형식적이며 공리적인 외삽'이라고 한 것으로 보인다.

Freudenthal(1973, pp.230-231)에 따르면 이러한 방식은 수 영역의 진정한 확장이라기 보다는 알고리즘적으로 확인된 수를 확장하는 것으로 방정식 풀이의 알고리즘적인 산술 속에서, 특정한 수를 표현하는 특정한 기호는 고정된 특정한 규칙에 의해 계산된다. 알고리즘적 대수의 기호는 명백하기보다는 잠재적으로 하나의 대상을 나타내며 적어도 처음에 이 기호의 유일한 의미는 그것을 어떻게 연산하는지 아는 것이다. 즉, $\frac{7}{4}$는 이것에 4를 곱하면 7이 나온다는 규칙으로 결정되며 $\sqrt{2}$는 제곱을 하면 2가나온다는 규칙에 의해 결정되는데 이러한 수는 방정식을 통해 처음에 잠재적인 방식으로 고정되고 취급되지만 계산과정에서 이들 수를 사용할수록 그 지위를 획득한다. 그래서 결국 $\sqrt{2}$는 계산을 상징하는 하나의 기호가 아닌 다른 수가 되는 것이며 이는 계산수로서의 수의 측면으로 모든 사람이 자신의 대수적 활동에서 알고 있는 매우 효과적인 측면이다. 이러한 계산수의 측면은 수 개념과 연산을 확장하는 이러한 기초적인 활동뿐만 아니라 일반적으로 방정식을 만들고 세우고 푸는 것도 좌우하며 자연스러운 것으로 교수학적으로 건전한 개발이라는 것이 인식되어야만 한다고 Freudenthal은 강조하고 있다.

새로운 수를 방정식의 해로 도입하는 방식은 우리 교과서에서는 $\sqrt{2}$와 같은 무리수를 도입할 때와 실수에서 복소수를 확장할 때 사용되며 역사적으로도 동일한 방식으로 발전되어 왔다. 중학교 3학년에서는 제곱근의 정의에 따라 계산 규칙을 연역적으로 이끌어 내고 있다. 고등학교 교과서에서는 실수에서 복소수로의 확장을 다루고 있는데 $x^2=-1$의 해가 되는 새로운 수로 $i=\sqrt{-1}$을 도입하고 복소수를 a+bi로 정의한 다음 복소수의 상등을 정의한다. 그리고 복소수의 사칙연산을 정의(김연식 외, 1996, p.49)나 확립된 규칙으로 도입하는 경우, 연산보다는 사칙계산으로 계산을 강조하는 경우(박한식 외, 2000, p.50)등이 있었으며 $(a+bi)(c+di)=$ ac-bd+(ad-bc)i와 같이 연산을 증명[22]하도록 하는 경우(이현구 외, 2000, p.37)도 있었다. 이상에서, 우리의 교과서는 형식불역의 원리에 잠재적으로 기초하면서 방정식이나 부등식 단원 앞에서 수 체계를 확장하여, 방정식과 부등식을 풀기 위한 계산규칙에 초점을 맞추고 있는 것을 알 수 있는데 이것은 다음 표현에 잘

21) 한 집합 위에 이항연산이 정의되어 있고, 또 이들 연산이 어떤 공리계를 만족시킬 때, 이 집합과 연산을 함께 묶어 이를 대수적 체계(algebraic system)라 하고, 또 이 집합에 대수적 구조(algebraic structure)가 주어져 있다고 말한다(김응태 · 박승안, 1988, p.29).

22) 이 경우 증명이라는 표현은 적합하지 않은 것으로 보이며, 유도나 확인이라는 의미의 단어가 어울릴 것이다.

나타나 있다.

이와 같이 사칙연산을 자유롭게 하기 위해서는 정수의 집합을 유리수, 실수의 집합으로 확장해야 한다. 또한, 방정식이나 부등식을 자유롭게 풀기 위해서는 다음 절에서 공부할 복소수의 집합까지 수를 확장할 필요가 있다(박배훈 외, 2000, p.35).

3. 귀납적 외삽법

새로운 수를 도입함에 있어 SMSG의 접근법이 수직선 공리를 이용하여 수의 집합을 구성하고 형식적(공리적) 외삽은 알고리즘적인 방정식을 이용하는 차이가 있는 반면, 귀납적 외삽법은 새로운 수의 도입보다는 수의 연산을 확장하기 위해 이미 확립된 연산의 결과 속에서 패턴을 발견하고, 발견된 패턴이 새롭게 확장된 체계 속에서 계속 이루어질 것이라고 가정하여 적용하는 것이다. 이러한 패턴은 때로 기만적일 수도 있지만 그럼에도 패턴은 旣知의 연산을 더 넓은 영역으로 확장할 수 있는 또 다른 가치있는 발견술을 제공한다(Borasi, 1992, p.60).

앞의 두 방법은 형식불역의 원리에 따라 일관된 확장이 가능하지만 귀납적 외삽법은 일관된 확장방법이 아니며 교수적 필요를 만족시키는 제한적 방법이다. 다음은 귀납적 외삽법으로 음수의 곱셈을 도입하는 경우이며 지수의

3+2=5	3-2=1
3+1=4	3-1=2
3+0=3	3-0=3
3+(-1)=?	3-(-1)=?
3+(-2)=?	3-(-2)=?

(Freudenthal, 1983, p.435)

$3\times4=12$	
$3\times3=9$	$3^4=81$
$3\times2=6$	$3^3=27(81\div3=27)$
$3\times1=3$	$3^2=9(27\div3=9)$
$3\times0=?$	$3^1=3(9\div3=3)$
$3\times(-1)=?$	$3^0=?(3\div3=3)$
$3\times(-2)=?$	$3^{(-1)}=?(1\div3=1/3)$
	$3^{(-2)}=?(1/3\div3=1/9)$

(Borasi, 1992, p.60)

경우도 이로부터 유추할 수 있다.

SMSG에서 $3\times(-2)=-6$를 유도하는 방식이 연역적인 것과는 달리 위에서는 처음 몇 개의 경우에서 승수가 1씩 감소할 때 곱한 결과가 3씩 감소한다는 것으로부터 귀납적으로 그 다음 결과를 이끌어낼 수 있다. 이 방법은 음수를 도입하는 기하적 방법에 더 밀접하게 관련되며 (Freudenthal, 1983, p.435), 계산을 하고 추론을 하여 그 결과를 검토하므로 수직선을 수동적으로 응시하는 것에 대한 활동적인 보완물이 된다(Freudenthal, 1973, p.282). 특히, 학생들은 확장의 결과로 동수누가와 반복된 곱셈이라는 곱셈과 지수에 대한 직관적 의미가 사라지는 것을 위의 과정에서 확인할 수 있으며, 합리적으로 추론된 결과를 직관으로부터 분리시켜 스스로 정당화시키는 경험을 할 수 있는 장점이 있는 것으로 보인다. 이 방법은 우리 교과서에서도 음수의 계산에서 많이 사용하고 있는데, 덧셈에서는 사용하지 않고 곱셈에서만 사용되고 있다(박배훈 외, 2000; 최용준 외, 1998; 오병승, 1999).

Ⅴ. 형식불역의 원리에 따른 지수의 확장

앞서 자연수의 연산이 정수 영역으로 확장되는 역사에서 살펴보았듯이 연산의 확장에 따른 가장 기본적인 특징은 이해의 토대가 직관에서 추상적인 것으로 변하는 것이다. 특히, 확장이 모순을 일으키거나 연산에 대한 중요한 정리나 특성을 위반하게 되면 확장은 문제를 야기하며 이러한 문제는 교사와 학생들이 수학에 대한 형식주의적 태도를 변화시킬 수 있는 좋은 교육적 소재가 된다. 우리 교과서에서 형식불역의 원리가 가장 적극적으로 사용되어 그 특성이 잘 드러나고 있는 곳은 지수의 확장 부분이다. 지수확장에 따르는 문제에 대한 논의는 수학의 발생과정과 수학 지식의 특징을 잘 보여주며 형식불역의 원리는 이 가운데 끊임없는 발견 과정으로 이끈다.

고등학교 지수 단원에서는 먼저 양의 정수 n에 대해 수 a를 n번 거듭하여 곱한 것을 a의 n제곱이라 정의한다. 이는 우리의 직관이 쉽게 받아들일 수 있는 정의이며 또한 중학교에서 이미 학습한 지수가 자연수일 때의 다음과 같은 지수법칙도 마찬가지로 쉽게 받아들일 수 있다. 이제 형식불역의 원리를 사용하여 다음 지수법칙을 확장하여 보자. 이 확장 과정은 현재 교과서의 기술과 거의 같지만 SMSG에서 제시한 연산을 정의하기 위한 원칙을 적용하여 보고, 지수가 유리수이고 밑이 음인 경우 Goel & Robillard(1997)과 Tirosh & Even(1997)의 상반된 주장을 바탕으로 구성하여 본다.

양의 정수 m, n에 대하여

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (II) $(a^m)^n = a^{mn}$

(III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (IV) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

(V) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n, a \neq 0)$

$= \frac{1}{a^{n-m}}$ $(m < n, a \neq 0)$

지수가 0이나 음의 정수인 경우로 확장하면 약간의 문제가 발생하게 되는데 우선 형식불역의 원리에 따라 위의 지수법칙이 성립한다고 가정하고 지수법칙 (I)을 살펴보자.

지수법칙 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 하고 지수를 변화시켜 본다.

m=0일 때, $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$,

양변을 a^n으로 나누면 $a^0 = 1$ -----㉠

m=-n일 때, $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$,

양변을 a^n 으로 나누면 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

밑이 0인 지수가 양수인 경우

$0^n = 0 \cdot 0 \cdot \cdots 0 = 0$------㉡

밑이 0이고 지수가 음수인 경우 위에서,

$0^{-n} = \frac{1}{0^n}$(모순)

밑과 지수가 모두 0인 경우

㉠에 따르면 $0^0 = 1$

㉡에 따르면 $0^0 = 0$

이는 모순이다[23]. 이러한 모순으로부터 0^0과 0^{-n}은 정의되지 않으며 지수법칙의 확장에서 예외라고 결론을 내릴 수 있다. 이제 지수법칙이 정수로 확장되도록 다음과 같은 새로운 정의를 추가하며 이 때, 모순으로 정의되지 않는 경우를 제외하기 위해 새로운 조건 $a \neq 0$이 첨가된다.

$a \neq 0$ 이고, n이 양의 정수일 때,

---

23) 다음과 같이 귀납적 외삽법을 이용할 수도 있다(Borasi, 1992, p.61).

$5^0 = 1, 4^0 = 1, 3^0 = 1, 2^0 = 1, 1^0 = 1$ $\therefore 0^0 = 1$
$0^5 = 0, 0^4 = 0, 0^3 = 0, 0^2 = 0, 0^1 = 0$ $\therefore 0^0 = 0$

분석에 사용한 고등학교 교과서 5종 중 조태근 외(2001, p.209)만이 0^0 이 정의되지 않는다고 언급하고 있다.

$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

지수를 정수의 범위로 확장하는 경우 지수법칙 (III)와 (IV)는 합쳐져서 (Ⅲ´)이 되므로 이제 위의 정의를 이용하여 다음과 같이 확장된 지수법칙을 증명하여야 한다.

m, n이 정수이고 $a\neq 0,\ b\neq 0$일 때

(Ⅰ´) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　(Ⅱ´) $(a^m)^n=a^{mn}$

(Ⅲ´) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$　(Ⅳ´) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

지수법칙이 정수 집합으로 확장되었다. 이제, 지수법칙을 유리수 영역으로 확장시키기 위해 지수가 유리수인 경우를 생각해 보자. 앞서 확립된 지수법칙이 유리수 지수에서도 성립하게 하려는 의도에 맞게 어떠한 방식으로든 정의하는 것은 우리의 특권이다(Bardell & Spitzbart, 1953, p.31).

$a^{\frac{m}{n}}$(m, n은 정수, $n\neq 0$)을 $a^{\frac{m}{n}}$(m은 정수, n은 양의 정수)로 바꾸자. 또한 m=1일 때, $a^{\frac{1}{n}}$이 위의 지수법칙을 만족한다면 (II')에서 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a$이다. 즉, $a^{\frac{1}{n}}$이 존재한다면 $x^n=a$의 근이다.

a>0일 때는 n이 짝수이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 두 개가 있으며 양인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음인 것을 $-\sqrt[n]{a}$와 같이 나타내자[24]. n이 홀수이면 a의 n 제곱근은 하나 있다. a=0일 때는 a의 n 제곱근은 0 뿐이므로 $\sqrt[n]{0}=0$ 으로 정의하자. a<0일 때는 n이 짝수이면 a의 n 제곱근이 실수인 것은 없으며 n이 홀수일 때 a의 n 제곱근으로 실수인 것은 오직 하나 있다. a>0일 때 이제 일반적인 경우로 $a^{\frac{m}{n}}$(m은 정수, n은 양의 정수)에서 지수법칙 (II')이 성립한다면 $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$이다. a>0인 경우 다음과 같이 정의하자.

정의 ㉮

a>0, m은 정수, n은 양의 정수일 때

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$,　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$[25]

이로부터 다음을 증명한다.

$a>0,\ b>0$이고 m, n이 유리수 일 때

(Ⅰ″) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　(Ⅱ″) $(a^m)^n=a^{mn}$

---

24) a의 n제곱근(n-th root of a)이란 $x^n=a$을 만족하는 x의 값을 의미하며 일반적으로 a의 n제곱근은 n개 있다. a가 양의 실수일 때, a의 주요 n제곱근(principal nth root of a)이란 양의 실수인 a의 n제곱근이고, (-a)의 주요 n제곱근(principal nth root of a)이란 음의 실수의 (-a)의 n제곱근을 말한다. 예를 들어, 25의 주요 제곱근은 $\sqrt{25}=5$이고, -27의 주요 3제곱근은 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다. 앞으로 근호 $\sqrt[n]{a}$는 a의 주요 n제곱근(principal n-th root of a)을 표시하게 된다(Bardell & Spitzbart, 1953, pp.33-34). 이러한 측면에서 기호 $\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{-27}$ 등의 표현에는 각각 방정식 $x^2=25$, $x^3=-27$의 양의 실근과 음의 실근이라는 의미가 포함되어 있다. 우리 교과서에서는 a의 주요 n제곱근과 같은 용어를 사용하지 않으며 다음과 같이 $\sqrt[n]{a}$이 실수임을 나타내고 있다.

지수단원에서 방정식 $x^n=a$의 근을 실근만 다루기로 한다(김연식 외, p.235, 박한식 외, p.229). '실수인 n제곱' (조태근 외, p.212)

양수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$와 $-\sqrt[n]{a}$ 두 개다(이현구 외, p.198).서 5종 중 조태근 외(2001, p.209) 만이 0^0 이 정의되지 않는다고 언급하고 있다.

25) 앞서 전개된 것에서 알 수 있듯이 $a^{\frac{1}{n}}$의 정의는 지수법칙(Ⅱ´)과 $\sqrt[n]{a}$의 정의에 기초하며, 이는 m이 정수일 때, a^m을 정의한 것과는 그 방식이 다르다는 점에 주목하자.

(III″) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (IV′) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

이제 남은 경우는 a<0이고 n이 홀수인 경우이다. 간단한 예로 $\sqrt[3]{-27}$ 을 생각해보면 $(-3)^3 = -27$이므로 $\sqrt[3]{-27} = -3$이다. a<0 이고 n이 홀수인 경우 지수법칙 (II′)이 성립한다고 하면, 예를들어

$(-8)^{\frac{2}{3}} = \{(-8)^2\}^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}} = 4$,

$(-8)^{\frac{2}{3}} = \left\{(-8)^{\frac{1}{3}}\right\}^2 = (-2)^2 = 4$이고

$\left\{(-8)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (-8)^{\frac{2}{3} \cdot 3} = (-8)^2 = 64$ 이다. 따라서 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$이고 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 ㉯

a<0, m은 정수, n은 홀수 일 때

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

이제 $\sqrt[n]{0} = 0$인 경우와 정의 ㉮와 ㉯를 합쳐서 정의하여 보기 위해 조건을 $\sqrt[n]{a} \in R$ 로 바꾸자. 그런데

AA $-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = [(-8)^2]^{1/6} = 2$[26] (**)

이므로 이러한 결과를 피하기 위해서 m과 n에 제한조건을 붙일 필요가 있다. 따라서 다음과 같은 정의[27]가 가능하다.

$a \in R$, 양의 정수 n에 대해 $\sqrt[n]{a} \in R$ $\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

이다. 또한 m이 n과 공통 약수를 갖지 않는 양의 정수라면

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

또는 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$r = p/q \in Q$, $\sqrt[q]{a} \in R$ 이고 r_1이 r의 기약분수일 때

$a^r = a^{r_1}$

---

26) 유리수 지수의 정의에 따르면 $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8}$이고 이는 방정식 $x^3 = -8$의 실근을 의미하므로 -2이며, 마찬가지로 $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2}$은 방정식 $x^6 = (-8)^2$의 양의 실근 2이다. 이 때, 방정식 $x^6 = (-8)^2$은 방정식 $x^3 = -8$의 양변을 제곱해서 얻은 것이고 $x^3 = -8 \underset{\nleftarrow}{\rightarrow} x^6 = (-8)^2$이다. 따라서, $(-8)^{1/3} \neq (-8)^{2/6}$이다. 그러나 이것은 1/3=2/6이라는 유리수에 대한 지식에 위배된다. 최영기(2000, pp.147-148)에 따르면 복소수의 측면에서는

$(-8)^{1/3} = (8e^{i(\pi + 2n\pi)})^{\frac{1}{3}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi)}$, $n \in Z$

$(-8)^{2/6} = 8^{\frac{2}{6}} e^{i(\frac{2\pi}{6} + \frac{4n\pi}{6})} = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi)}$, $n \in Z$

$((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = (8^2 e^{i(2\pi + 2n\pi)})^{\frac{1}{6}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{3})}$, $n \in Z$ 이므로 $(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} \neq [(-8)^2]^{1/6}$이다. 이상을 정리하면

$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} \neq (-8)^{2/6} \neq [(-8)^2]^{1/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$

이다. 위의 식에서 기호 $a^{\frac{1}{n}}$의 정의의 근거가 되었던 a의 주요 n 제곱근과 지수법칙(II′)이 모두 그 의미가 사라짐을 확인할 수 있다.

27) 각각 Larson et al(1993)과 Dugopolski(1995)의 정의이다(Goel & Robillard, 1997, p.319, 재인용) Goel과 Robillard는 (**)와 같은 추론을 따르면 다음과 같이 받아들일 수 없는 결과를 가져오므로 정의를 정확하게 적용할 것을 주장하고 있다.

$-a = (-a)^1 = (-a)^{2/2} = [(-a)^2]^{1/2} = (a^2)^{1/2} = a$

그러나 위와 같은 정의가 가능하지 않다고 반대하는 견해도 있다. Even & Tirosh(1995, p.4)는 실수에 대한 수학의 모든 기초적인 연산(사칙연산, 지수, 제곱근 등)은 함수이므로 정의역의 모든 원소에 대해 정의되고 단 하나의 값을 가져야 하며(univalence requirement) 수학 정의에 대한 일반적 조건인 무모순성, 비순환성, 잘 정의되는 것 등을 만족시켜야 한다고 말하면서 다른 표현이지만 같은 값인 1/3과 2/6에 대해 $-2=(-8)^{1/3}=(-8)^{2/6}=[(-8)^2]^{1/6}=2$으로 다른 값이 나오므로 이는 잘 정의되지 않는 것이라고 주장한다. 또한 Borasi(1992, p.62)는 $(-2)^{1.4}$와 같은 식을 해석하는데 있어 1.4를 14/10이나 7/5로 해석하는가에 따라 발생하는 문제점을 다음과 같이 제시하면서 이러한 복잡함을 피하기 위해 수학자들은 확장된 지수 연산에서 밑을 양수로 제한한 것이라고 말한다.

$$(-2)^{14/10}=\sqrt[10]{(-2)^{14}}=\sqrt[10]{(-1)^{14}(2)^{14}}=\sqrt[10]{(2)^{14}}=\sqrt[5]{(2)^7}$$
$$(-2)^{7/5}=\sqrt[5]{(-2)^7}=\sqrt[5]{(-1)^7(2)^7}=(\sqrt[5]{(-1)^7})(\sqrt[5]{(2)^7})$$
$$=-\sqrt[5]{(2)^7}$$

위와 같은 Goel & Robillard(1997), Tirosh & Even(1997)의 논의에서 $(-8)^{\frac{1}{3}}$의 정의 문제와 만나게 된다. 이러한 것은 수학의 창조과정에서 수학자들이 자연스럽게 부딪히는 문제[28]로 이는 형식불역의 원리에 따라 기존의 체계를 유지하여 확장시키고자 하는 인간의 열망과 일반화에 따른 기존 특성의 상실이 만들어내는 것이다. 즉, 일반적으로 수학 연산의 정의는 새로운 영역으로 확장되지만 확장은 종종 모순을 일으키거나 연산에 대한 중요한 정리나 특성을 위반하는데, 이 경우 수학자들은 때로 특정한 수학 표현을 정의하지 않는 선택을 한다. 형식불역의 원리에 따른 확장 과정에서 수학의 본질, 연산의 본질, 정의의 본질 등과 관련되는 이러한 상황은 교사와 학생 모두에게 수학에 대한 형식주의적 태도를 지양하게 하는 교육적 소재로서, 수학이 인간 지능의 생생하고 자유로운 발명의 결과물로서 수학의 내부와 외부의 다양한 이유에 영향을 받는다는 관점을 개발하게 하는 기회를 제공하게 될 것이다.

Ⅵ. 결론

역사적으로 형식불역의 원리는 기호산술에서 추상대수로 발전하는데 있어 근본적인 역할을 한 것으로 보이며 형식불역의 원리에 따라 연산이 확장되는 과정에서 우리의 이해의 근거는 직관에서 추상적인 기호로 바뀌는데 이는 대수적 구조의 이해가 본질적으로 어려울 수 밖에 없다는 것을 드러낸다. 즉, 음수나 복소수 등과 같이 실재하지 않는 창조된 수 체계에 대한 완전한 이해를 가능하게 하는 직관적인 모델은 존재하지 않으며, 음수 계산을 물리적 상황에 기초하려는 시도는 이미 19세기에 Hankel이 포기한 것이다. 이는 우리가 창조한 수에 대한 완전한 이해는 본질적으로 대수적 구조를 통할 때 가능할 수 있다는 것을 시사하므로 대수적 구조에 대한 교육의 필요성은 더욱 강조될 수 밖에 없으며 형식불역의 원리에 따른 확장 과

28) 역사적으로 어떠한 정의도 곱셈의 역으로서의 나눗셈의 정의를 위반하기 때문에 $\frac{a}{0}(a\neq0)$ 에 대해서는 수학계에서 상대적으로 일찍 정의하지 않기로 하였지만, 0/0에 대해서는 0으로 정의하자는 선택을 포함하여 논쟁과 의견차 투성이였으며 결국 0/0을 정의하지 않기로 하였다. 그러나 $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 대한 논의의 경우, 현재 상황은 앞에서 살펴본 것처럼 이 용어에 대해 어떠한 합의도 존재하지 않는다(Tirosh & Even, 1997, p.325).

정에 대한 인식론적 분석은 실제 교수-지도에 있어 유용한 함의점을 도출할 것으로 기대된다.

형식불역의 원리는 방정식의 풀이 과정과 실질적으로 동일한 과정으로 대수적 구조를 확장하는 방식이다. 새로운 대수적 구조를 발견하는 것은 형식불역의 원리에 바탕을 두므로 형식불역의 원리는 하나의 발견술이며 발견의 방식은 기존의 연산법칙이 확장되기 위한 필요조건을 찾아 연산을 다시 정의하고 이로부터 확장된 연산법칙을 증명하는 것으로 이루어진다. 형식불역의 이러한 가설-연역적 측면은 방정식과 관련된 교수-지도, 산술적 사고에서 대수적 사고로의 전환과정, 연역 추론의 획득 등과 관련하여 중요할 것으로 생각되며 이에 대한 연구가 요구된다. 형식불역의 원리를 적용하는 실제 방법으로 수직선 공리를 이용하는 SMSG의 접근법, 알고리즘적인 방정식을 이용하는 형식적(공리적) 외삽, 연산의 패턴의 발견에 기초하는 귀납적 외삽법 등을 살펴보았다.

우리 교과서에서는 수의 확장은 집합론을 기초로 유리수까지는 수를 정의함으로써 이루어지고 무리수나 복소수의 도입은 방정식을 이용하며 교수학적 측면에서 귀납적 외삽법도 사용하고 있다. 형식불역의 원리는 교과서의 형식적 기술에 맞추어져 있어 명확하게 드러나지 않는다. 중학교에서는 음수나 무리수의 연산규칙을 발견하는 것까지 다루고 있으며 고등학교에서는 정의의 도입과 간단한 증명을 하도록 하고 있다. 이는 학생들의 발달과정에 따라 보다 유연하게 적용하는 것으로 보이는데, 수의 확장을 명백하게 취급하는 반면 연산의 확장은 보다 잠재적으로 취급하고 있다. 이러한 확장에 대한 이유는 대수적 구조에 대한 고려보다 방정식이나 부등식의 풀이를 위한 계산을 강조하는 것과 관련이 있는 것으로 보인다. 또한, SMSG의 교과서에서 보듯 확장되는 연산을 정의하기가 매우 복잡하여 대수 구조에서 연산의 확장을 다루는 것이 학생들에게는 지나치다는 점에서 적극적으로 다루어지기 어려울 뿐만 아니라 분량이 너무 방대해지는 측면이 있으며, SMSG의 대수 교과서는 대수구조를 강조하기 위해 산술의 수에서 실수로의 확장만을 다루는 것이 가능하지만 이는 수학의 여러 분야를 한 교과서로 묶어 가르치는 우리의 실정과는 전혀 맞지 않는 것이다. 그러나 교육에 있어 대수적 구조의 발견에 대한 지향은 피할 수 없는 것이며, 이러한 상황은 우리 교육에 있어 앞으로 보완해야만 하는 문제임에 틀림없다.

형식불역의 원리를 통한 연산의 확장이 명시적으로 이루어지는 곳은 고등학교 지수단원으로 이 단원을 통해 형식불역의 원리를 발견술적으로 사용하고 정의를 생성하고 대체하는 연습의 기회를 가질 수 있다. 이러한 경험을 통해 학생과 교사 모두가 수학이 갖는 완성된 측면만이 아니라 창조되고 발생되는 측면도 살필 수 있으며, 정의의 본질, 연산의 본질, 수학의 본질에 대해 새로운 시각을 갖는 계기가 된다. 이로부터 학생과 교사가 무의식적으로 가질 수 있는 형식주의적 관점이 극복되고 대수적 구조에 대해 인식할 수 있는 계기가 마련될 것으로 본다. 본고에서 형식불역의 원리나 대수적 구조가 학교에서 명시적으로 교수되어야 된다고 주장하려 하는 것은 아니지만, 형식불역의 원리가 갖는 교육적 의미를 생각해 볼 때 학생들의 사고에서 잠재적으로 인식되고 사용할 수 있도록 교수되어야 할 필요성에 대해 강조하고자 한다. 특히 교사는 교과서의 형식적 기술 속에 내재되어 있는 형식불역의 원리에 대해 인식하고 대수 교수에 있어 학생들이 대수 체계에 대해 기본적인 이해를 개발하도록 돕는 것이 바람직하며, 이를 실제 수업에 반영하기

위한 노력과 이와 관련된 연구가 요구된다.

이러한 교육이 효과적으로 이루어질 때 학생들이 수학의 발생적이고 창조적인 면을 인식함으로써 수학에 대한 올바른 가치관과 태도를 형성하고 정의와 일반성의 확보, 대수적 구조의 확장과 관련된 의미 있고, 살아있는 논의와 사고가 가능하게 될 것이다.

참고문헌

김연식 · 김홍기(1998). 중학교 수학 1. 서울: (주)두산.

____________(1996). 공통수학. 서울: 두산동아.

김응태 · 박승안(1988). 현대대수학 제2판. 서울: 이우출판사.

김호우 외(1994). 중학교 수학 3. 서울: (주)지학사.

박두일 · 신동선 · 강영환(1990). 중학교 수학 2. 서울: (주)교학사.

박배훈 외(2000). 공통수학. 서울: (주)교학사.

박배훈 · 정창현 (1995). 중학교 수학 1. 서울: (주)교학사.

박한식 외(2000). 공통수학. 서울: (주)지학사.

오병승(1995). 중학교 수학 1. 서울: 바른교육사.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

_____(2000). 수학 학습-지도의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

이승우(2001). 학교 수학에서의 유추와 은유, 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

이현구 외(2000). 공통수학. 서울: (주)천재교육.

조태근 외(2000). 공통수학. 서울: 금성출판사.

최영기(2000). $(-8)^{1/3}$에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류. 수학교육, 39(2), 145-150, 한국수학교육학회.

최용준 · 이현구(1995a). 중학교 수학 1. 서울: (주)천재교육.

____________(1995b). 중학교 수학 3. 서울: (주)천재교육.

Bardell & Spitzbart(1953). *College algebra.* Addison-Wesley Publishing Company.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry.* Heinemann Portsmouth.

Brumfiel, C. F. & Vance, I. E. (1970). *Algebra and geometry for teachers.* Addison-Wesley Publishing Company.

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational studies in mathematics, 29,* 1-20.

Courant, R., Robbins, H. (1996). *What is mathematics?* Oxford University Press.

Durfee, W.H. (1959). *Fundamenthals of college algebra.* The Macmillan Company

Eves, H.(1995). 수학사. 서울: 경문사.

Goel, S. K. & Robillard, M. S. (1997).. The equation: $-2=(-8)^{2/6}=[(-8)^{2}]^{1/6}=2.$ *Educational Studies in Mathematics, 31,* 319-320.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Holland: D. Redel Publishing Company.

____________ (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learing of Mathematics, 11*(1), 26-32.

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics.* Harper-Collins College Publishers.

SMSG(1962), *Introduction to algebra part I.* Yale University Press

Rickart, C. (1996), *Structural mathematical Thinking.* In R. J. Sternberg & T. Ben-zeev. (eds.). *The nature of mathematical thinking.* Manhwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Tirosh, D. & Even, R. (1997). To define or not to define: The case of $(-8)^{1/3}$. *Educational Studies in Mathematics, 31,* 321-330.

On the principle of the permanence of equivalent forms

Lee, Seung Woo (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, I review the historical background of "the principle of the permanence of equivalent forms" and summarize properties of "the principle of the permanence of equivalent forms" as a kind of heuristic. I think that "the principle of the permanence of equivalent forms" can be used effectively for student's discovery of the algebraic structure. There are three ways of using "the principle of the permanence of equivalent forms" in extending number system - an extension on the base of set theory(SMSG), the formal or axiomatic extrapolation and the inductive-extrapolatory method. All those three methods are mixed up and being used potentially at various levels in current Korean text books.

"The principle of the permanence of equivalent forms" is used most effectively in the subject of the exponent. I try to present a situation that makes the students find more general definition and cultivate their desirable attitudes for the mathematics in the process of extending the exponent through summarizing the debate between Goel & Robillard(1997) and Tirosh & Even(1997).