대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 401-413. Sep 2002

피타고라스 정리와 증명의 발견 과정 재구성

한 대 희*

Ⅰ. 서론

다음은 최인훈의 <화두>에서 그가 자신의 고등학교 시절의 수학 선생님을 회상하는 부분이다.

> 기하학 선생님은 한 쪽은 다리 대신 줄로 잡아맨 안경을 쓴 쉰 살 안팎의 분이었는데 그의 시간에 우리는 늘 기하학의 중요 정리들이 막 발견되는 현장에 있다는 느낌을 받았다. 그는, 이집트며, 알렉산드리아며, 시라쿠사며 아테네며 이런데서 <점>이며 <선>이며, <너비>며 <부피>며 <원>이며 이런 것들하고만 살아 있는 사람보다 더 진지한 이야기를 나눌 수 있었던, 하얀 수염이 무성하고 발가락이 내민 가죽신을 신은 사람들이 있는 광장이며 돌집 처마 밑으로 우리들을 데리고 갔는데 이미 우리 선생하고 친교가 있는지 그들은 우리들의 아마 신기했을 생김새도 눈여겨보는 일없이 그 이상한 <증명>절차를 구경시켜 주었다(최인훈, 2002, p.75).

여기에 소개된 수업이 구체적으로 어떠한 것이었는지, 혹은 그 수학 선생님이 도대체 어떠한 방식으로 수업을 하였는지 알 수 없다. 그러나 한 학생의 기억 속에 기하학 수업이 이렇게 남게 될 수 있다면 수학 선생님으로서 더 없는 보람을 느낄 것임에는 틀림없을 것이다.

수학 수업에서 중요한 개념이나 정리를 학생 스스로가 발견 혹은 재발명하여야 하며, 이는 수학의 역사에서 그 개념 혹은 정리 등이 누구에 의해, 어떠한 과정을 거쳐, 어떻게 발견되었는가를 재현하는 것으로 가능할 것이라는 주장이 이미 오래 전부터 재기되어 왔다. 또한 이는 많은 사람들이 공감하는 주장일 것이다. 그러나 한 수학 수업에서 어떤 정리를 발견하게 하는 수업을 실천하는 일은 쉬운 일이 아니다. 우선, 지금의 한 학급에는 너무 많은 학생들이 있으며, 많은 시간을 투자해서 발견하게 할만큼의 여유 있는 수업을 하기에는 배워야 할 것이 너무 많다. 이러한 수업 외적인 문제 이외에도, 어쩌면 이 문제가 더욱 근본적일 수도 있을 것인데, 실제로 수학의 어떤 개념이나 정리가 수학의 역사에서 어떻게 발견되었는지에 관한 명확한 지식이 없다는 것이나, 설령 역사적인 발견 과정에 대한 기록이 남아 있다고 하더라도 그것을 중, 고등학교 학생을 대상으로 한 수업에 바로 적용하기 어렵다는 문제가 있다.

피타고라스 정리에 관해서도 비슷한 이야기를 할 수 있다. 피타고라스 정리는 학교 수학에서 뿐만이 아니라 수학의 역사에서도 이름이 붙은 최초의 정리라고 할 수 있다. 아이들은 생소한 이국 사람의 이름이 붙은 이 정리의 의미, 즉 직각 삼각형의 세 변 사이에는 특별한

* 청주교육대학교

관계가 있다는 것을 알게되고, 이를 이용하여 미지의 길이를 구할 수 있는 강력한 방법을 익히게 된다. 또한 아이들은 상당히 어려운 '증명'을 할 것을 요구받게 된다.

많은 수학교사들이 이러한 피타고라스의 정리와 이것의 증명을 학생들 스스로가 발견하게 할 수 있게 하는 수업을 하고 싶어 할 것이다. 그러나 지금의 교과서만으로는 부족한 점이 있다. 현재의 교과서는 모눈종이 위에 길이 비가 정수인 직각 삼각형 몇 개를 그려 놓고, 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하게 하여 피타고라스 정리가 성립하는 예를 보여주는 것으로 피타고라스 정리를 도입한다. 그리고 난 뒤 생소한 몇 개의 새로운 도형을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하게 한다. 이에 관해 박문환(2002)는 "최초에 시도되는 면적 계산과 피타고라스의 정리를 증명하는 방법 사이의 연결성에 문제"가 있음을 지적하고, "활동을 통한 개념적 파악이 선행될 필요가 있으며, 이를 위해 ... '잘라 붙이기' 활동 등을 고려해 볼 필요가 있다."고 말하고 있다.

따라서 피타고라스 정리가 어떤 과정을 통해 어떻게 발견되고 증명되었는지를 이해하고, 이를 학교 수업에 어떠한 방식으로 의미 있게 재구성 할 것인가 하는 문제를 생각해 볼 수 있을 것이다. 여기서는 학생들이 피타고라스 정리를 발견하는 경험이 가능할 수 있도록 하기 위해 먼저, 피타고라스 정리의 발견과정과 관련된 역사적 사실들을 살펴보고, 이를 학교 수업에서 재현할 수 있는 방안을 고찰해 보고자 한다.

II. 피타고라스 정리의 발견과 관련된 역사

피타고라스 정리는 그것에 부여된 이름과는 달리, 누가 언제 어떻게 이것을 발견하고 증명하였는가에 대한 명확한 지식이 알려져 있지 않다. 여러 고대 문명(바빌로니아, 인도, 중국 등)에서 그 시기에 피타고라스의 정리를 알고 있었다는 것을 보여주는 기록이 전해지고 있으나, 그것을 누가, 어떻게 발견하게 되었는가에 대한 명확한 기록이 남아 있지 않다. 피타고라스 정리에 이와 같은 이름이 붙게된 것은 피타고라스가 이 정리의 증명을 발견하고 신에게 감사의 제물을 바쳤다는 설화에 연유하고 있으나 실제로 피타고라스가 어떻게 증명하였는가에 대해서는 정확한 기록은 남아 있지 않으며, 피타고라스가 이를 최초로 발견하였다는 주장도 역사적인 사실이라고 보기 어렵다. 그렇다면 이 피타고라스의 정리와 그것의 증명의 발견 과정을 재현할 수는 없는 것인가? 다행히도 피타고라스의 정리와 그것의 발견 과정을 암시하는 역사적인 사실들이 남아 있으며 여기서는 이들을 역사적인 순서를 따라 살펴 볼 것이다.

1. 바빌로니아

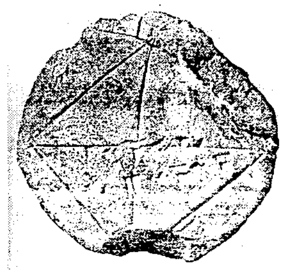
4대 문명의 발상지 중의 하나인 바빌로니아에서는 점토판 위에 쐐기 문자를 새겨 기록을 남겼다. 지금까지 약 50여만 개의 점토판이 발견되었으며 그 중에 300여 개가 수학과 관련이 있는 것이라고 한다. 처음에는 이들 점토판이 곡식이나 가축의 수를 표시하는 정도의 상업적인 기록으로 알려져 있었으나 19세기 이후로 쐐기 문자에 대한 연구가 진전되면서 이들 점토판 위에 새겨진 수학을 보다 잘 알 수 있게 되었다. 그 중에서 기원전 1700 경에 만들어진 것으로 추정되는, 플림프톤 322라는 이름이 붙은 점토판 위에 새겨진 숫자들은 오늘날 원시 피타고라스의 세 수라고 불리는 것으로 판

명되었다. 이는 이 시기에 이미 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 세 정수를 구하는 방법이 알려져 있음을 보여주고 있다. 아래의 표는 플림프톤 322에 새겨져 있는 숫자를 현대의 표현 방식으로 나타낸 것이다. (아래의 표에서 첫 행은 나머지 행에서 유추된 것이다.) (Katz, 1993, p.27)

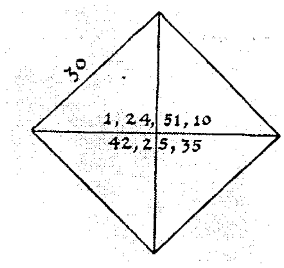
아래 표의 2, 9, 13, 15열을 제외하면, 첫 번째 행은 a를, 두 번째 행은 $(\frac{c}{a})^2$를, 세 번째 행은 b 그리고 세 번째 행은 c를 나타내고 있다.($a^2+b^2=c^2$ 식에서의) 2, 9 13, 15열은 원시 피타고라스의 세 수가 아니지만 여기에 어떤 오류가 어떻게 생겨나게 되었는가에 대한 충분한 설명도 알려져 있다(Eves, 1953, p.35). 여기에 기록된 수들의 크기에 비추어 볼 때, 바빌로니아 시대에는 피타고라스의 세 수를 찾는 일반적인 방법이 있었을 것으로 추정된다. 다시 말해 초보적인 산술만으로는 $a^2+b^2=c^2$를 만족하는 세 정수 중에 13500, 12709, 18541가 있다는 것을 발견한다는 것은 불가능할 것이다(Katz, 1993, p.28).

여기서 한 가지 주목할 수 있는 점은 왜 $a^2+b^2=c^2$식을 만족하는 세 수를 찾고자 하였는가 하는 점이다. 비록 명확한 기록으로 남아 있지 않지만 이 식의 세 수를 이용하면 직각삼각형을 만들 수 있다는 점에 비추어 볼 때, 이 시기에 이미 피타고라스의 정리가 알려져 있었고, 특별히 피타고라스의 정리를 만족하는 자연수를 찾는 것이 중요한 문제였을 것이라는 추측이 가능할 것이다.

바빌로니아인들이 피타고라스의 정리를 알고 있었다는 것을 보여주는 또 다른 증거로는 정사각형의 대각선의 길이를 보여주는 다음과 같은 점토판이 있다. (<그림 1>은 점토판 사진이며, <그림 2>는 그것을 해석한 것이다.)



<그림 1> Aable, 1998, p.39



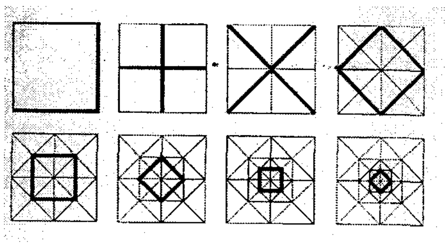
<그림 2> Aaboe, 1998, p.41

위의 그림에서와 같이, 정사각형의 대각선의 길이를 계산하였다는 사실은 직각 이등변 삼각형이라는 특수한 경우에서의 피타고라스의 정리가 이 시기에 알려져 있었다는 것을 의미한다. 여기서 보다 특이한 사실은 정사각형과 그 안의 대각선을 이용해서 만들어지는 도형이 이 시기에 널리 알려져 있었다는 점이다. '여신의

a	120	3456	4800	13500	72	360	2700	960	600	6480	60	2400	240	2700	90
$(\frac{c}{a})^2$	1.983402 8	1.949158 6	1.918802 1	1.886247 9	1.815007 7	1.785192 9	1.719983 7	1.684587 7	1.642669 4	1.586122 6	1.5625	1.489416 8	1.450017 4	1.430238 8	1.387160 5
b	119	3367	4601	12709	65	319	2291	799	481	4961	45	1679	161	1171	56
c	169	4825	6649	18541	97	481	3541	1249	769	8161	75	2929	289	3229	106
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

베짜기'라고 불리는 아래와 같은 도형<그림 3>은 바빌로니아에서뿐만 아니라 여러 고대 문명의 건축과 예술에서 쉽게 발견되는 패턴이다. (<그림 3>은 점토판 위에 그려진 정사각형 분해 그림이며, <그림 4>는 이것을 순서에 따라 재구성한 것이다.)

<그림 3> Schneider, 1994, p.73

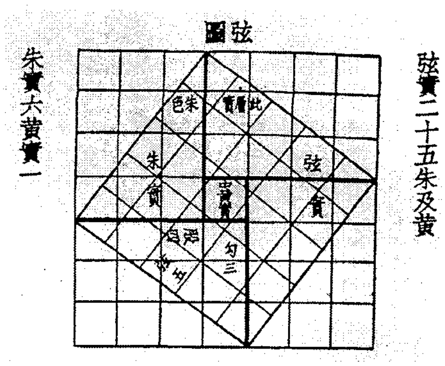


<그림 4> Schneider, 1994, p.73

현대에서도 정사각형과 그것의 대각선을 이용한 디자인은 쉽게 발견되며, 이와 같은 도형 속에는 이미 피타고라스의 정리의 특수한 경우가 숨겨져 있다. 이것은 뒤에서 다룰 소크라테스의 배적 문제와 관련하여 피타고라스 정리의 발견 과정에 대한 아이디어를 제공해 준다.

2. 중국(후한시대)

중국의 후한시대에 조군경에 의해 저술된 주비산경에는 길이 비가 3 : 4 : 5인 직각 삼각형의 그림과 그것을 이용한 피타고라스 정리의 증명이 제시되어 있다. 여기서 피타고라스의 정리는 주비산경에 등장하는 인명을 따서 '진자의 정리'라고 부르고 있는 데 이를 다음과 같이 표현하고 있다. "<구>는 <고>를 각각 제곱하여, 이것을 합쳐서 <현>의 제곱으로 한다. 그 제곱근이 곧 <현>이다." (여기서 <구>, <고>, <현>은 각각 높이, 밑변, 빗변을 의미한다.) 그리고 그림5와 같은 현도를 이용하여 증명하고 있다.



<그림 5> 김용운 · 김용국, 1996, p.135

현도<그림 5>를 이용한 진자의 정리의 증명을 간단하게 살펴보자. 현도는 4개의 주실(직각삼각형)과 1개의 황실(가운데 정사각형)로 구성되어 있다. 이제 <그림 5>의 현도 중앙의 정사각형(비스듬한 정사각형)은 4개의 주실과 1개의 황실의 합인데, 4개의 주실은 2개의 크기 12짜리 직사각형의 넓이와 같다. 따라서 현도 중앙의 정사각형의 크기는 25가 되는 데, 현도 중앙의 정사각형은 그림 속의 직각 삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 이기도 한다. 이것으로부터 직각삼각형의 밑변의 제곱과 높이의 제곱의 합은 빗변의 제곱이 됨을 알 수 있다. 그리고 이것으로부터 밑변과 높이의 비가 3 : 4인 직각삼각형의 빗변의 길이는 5가

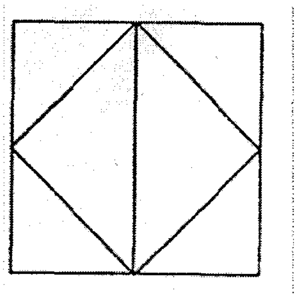
됨을 알 수 있다.

이 증명은 비록 특수한 경우에 관한 것이지만, 이 아이디어는 일반적인 삼각형에 곧 바로 적용될 수 있다. 위의 현도의 한 직각 삼각형의 길이를 a, b, c라고 할 때, 가운데에 있는 비스듬한 정사각형의 넓이는 c^2이고 이를 4개의 주실과 하나의 황실의 합으로 보면, $4\times\frac{1}{2}\times a\times b+(b-a)^2$이다. 따라서 $c^2 = a^2+b^2$이 성립한다. 이와 유사하게 가장 큰 정사각형에 주목하여 피타고라스의 정리를 증명할 수도 있다. 이 두 가지 방법은 피타고라스의 정리를 증명하는 간단한 방식으로 현재의 교과서에 수록되어 있다.

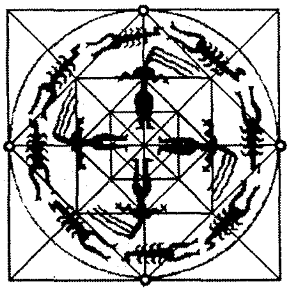
이와 같이 고대 중국에서는 일반화가 가능한 특수한 경우의 피타고라스 정리가 전해 내려오고 있다. 여기서 주목할 것은 그 특수한 경우라는 것이 밑변과 높이의 비가 3:4와 같이 정수 비라는 점이다. 이것은 이후에 배적문제와 관련하여 다시 언급하겠다.

3. 고대 인도

기원전 6세기 정도에 만들어 졌을 것으로 추정되는 종교 문헌인 Sulvasutras에는 다음과 같이 이야기가 적혀 있다. "정사각형에서 뻗어 나가는 선은 그 면적을 두 배로 만든다."(Katz, 1993, p.30) 이 말은 <그림 6>으로 이해할 수 있는 데, 이것은 직각이등변삼각형에서의 피타고라스 정리를 말해 주는 것이다.



<그림 6>



<그림 7> Schneider, 1994, p.77

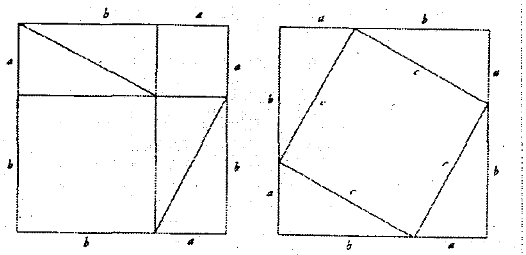
앞서 바빌로니아 시대의 유적에서 언급한 바와 같이 정사각형의 대각선을 이어서 정사각형을 만드는 것은 자연에서 그리고 고대 문명의 예술과 건축에서 자연스럽게 등장하는 것이다(<그림 7>, B.C.5000년경의 수메르 토기 문양). 그리고 이들 정사각형들의 면적의 비는 1:2:4:...가 됨을 자연스럽게 알 수 있다. 오늘날 우리 일상에도 예를 들면, 보도 블록, 화장실의 타일 천장이나 벽의 디자인, 혹은 방석, 옷 등에서 이와 도형을 이용한 디자인이 쉽게 발견된다. 이 속에 바로, 피타고라스 정리와 그것의 증명에 대한 가장 초보적인 아이디어가 숨어 있다고 할 수 있을 것이다.

4. 피타고라스 학파

'피타고라스 정리'라는 이름에서 알 수 있듯이 피타고라스 학파는 이 정리와 밀접한 관련이 있다. 일반적으로, 피타고라스 학파 이전의 바빌로니아 시대에 이미 피타고라스 정리를 알고 있었으나, 그 정리에 대한 일반적인 증명을 최초로 한 사람이 피타고라스로 알려져 있다. 그러나 실제로 피타고라스가 어떠한 방법으로 증명하였는가에 대한 정확한 기록은 전해지고

있지 않으며, 피타고라스가 이 정리와 이의 증명을 발견하고 신에게 감사하기 위해 제물을 바쳤다는 일화가 전해질뿐이다.(이 설화에 대해서도 피타고라스 학파가 채식주의를 신봉하였다는 점에서 의심의 여지가 있다. Boyer, 1968, p.54) 피타고라스 정리와 관련하여 피타고라스 학파의 중요한 발견은 피타고라스 정리 자체보다는 무리수 즉 통약 불가능성에 대한 발견이다. 이것은 '만물은 수이다.'라는 그들의 독트린에 정면으로 위배될 뿐만 아니라 그리스 기하학 전체에 대한 심각한 도전이었다.

피타고라스의 증명 방법이 정확히 어떠한 것이었지는 정확하게 알 수 없으나, Eves는 피타고라스가 만든 것으로 추정되는 많은 증명들 중에서 아래의 그림을 이용한 분할 방법을 소개하고 있다(Eves, 1953, p.66).

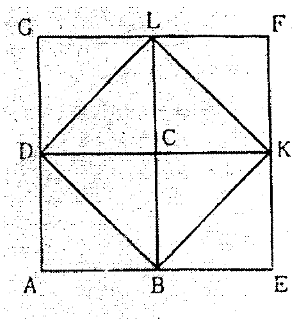


<그림 8>

위의 그림의 왼쪽에 있는 정사각형은 모두 6조각(4개의 직각 삼각형과 2개의 정사각형)이며, 오른쪽에 있는 정사각형은 모두5조각이다(4개의 직각 삼각형과 1개의 정사각형). 이제 두 정사각형의 크기가 같다는 점에 착안하면 밑변과 높이를 한 변으로 하는 두 정사각형의 합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 같음을 알 수 있다.

5. 플라톤의 대화편 속의 배적 문제

플라톤의 <메논>편에는 소크라테스가 메논에게 '회상설'을 예증해 보이는 장면이 등장한다.(우정호 외, 1992, pp.262 - 269) 소크라테스는 지나가는 노예 소년에게 어떤 질문을 하고 그 소년은 처음에 정확한 답을 하지 못하고 당황하지만 소크라테스의 계속된 질문을 통해 스스로 해답을 찾게 된다. 무지한 노예 소년도 어려운 지식을 스스로 회상하여 깨달을 수 있다는 것을 보여주고자 하는 맥락으로 볼 때, 아마도 소크라테스가 제시한 문제는 그 당시에 상당히 어려운 문제였을 것이다. 그 문제는 주어진 정사각형에서 그 정사각형 보다 넓이가 두 배가되는 정사각형을 그리는 것이다.(이하에서는 이 문제를 정사각형의 배적 문제라고 부를 것이다.) 이 문제의 해답은 무리수, 피타고라스의 정리 등과 밀접한 관련을 맺는 다음과 같은 도형을 그리는 것이다.(이 그림은 앞서 여러 번 등장한 '여신의 배틀'과도 관련된다.)



<그림 9>

<메논>에서 이 문제는 더 이상 진전되지 않지만, 당시의 지식인 사회에서 2배의 정사각형을 만드는 문제가 널리 알려져 있었음을 알 수 있을 것이며, 또한 수학자의 기질 상 3배, 4배, 5배 등의 정사각형을 만드는 문제 또한 충분히 연구되었을 것으로 추측해 볼 수 있다. 이러한 정사각형의 배적 문제를 풀이하면, 4, 9. 16배 등의 제곱수인 경우는 아주 쉽게 해답을 찾을

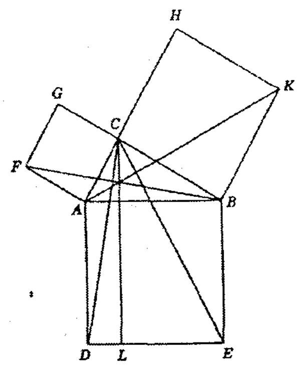
수 있으며, 5배, 8배, 10배, 13배 등과 같이 두 제곱수의 합으로 표현되는 경우에도 그 답을 비교적 쉽게 찾을 수 있다. 여기서 주목할 수 있는 것은 두 제곱수의 합으로 표현되는 수들에서 피타고라스 정리의 특수한 경우들이 증명된다는 사실이다. 5배의 정사각형이 어떻게 5배가 되는 지를 살펴보면 피타고라스의 분할 증명법에서 등장하는 그림이 나온다<그림 18>

바빌로니아 시대의 기록에서 직각 이등변 사각형인 경우의 피타고라스의 정리를 알고 있었다는 겻과 이후에 고대 그리스 시대에 이르러서는 일반적인 경우의 피타고라스의 정리가 알려져 있음을 이미 언급하였다. 그런데 이러한 일반화가 어떻게 이루어지게 되었는가에 대한 구체적인 기록은 남아 있지 않다. 또한 피타고라스의 정리의 증명법의 발견과정 또한 구체적으로 남아 있지 못하다. 이러한 상황에서 위에 언급한 정사각형의 배적 문제는 비슷한 시기에 등장한 문제인 동시에 피타고라스의 정리를 발견하고 증명하는 아이디어를 포함하고 있는 있어, 이를 이용한 피타고라스 정리의 발견과 증명을 재현하는 시도가 가능할 것으로 보인다. 이것에 대해서는 다음 절에서 구체적으로 다루도록 하겠다.

6. 유클리드 원론의 피타고라스 정리의 증명

이제, 그리스 기하학을 집대성 한 책이라고 할 수 있는 유클리드 원론에 소개되어 있는 피타고라스의 정리를 살펴보자. 유클리드는 분명 피타고라스가 사용한 증명 방법을 알 고 있었을 것이고, 그와 유사한 도형의 분할에 의한 여러 가지 증명 또한 알고 있었을 것이다. 그런데 유클리드는 아래의 그림을 이용하여 앞서 언급한 피타고라스의 증명보다 훨씬 복잡한 증명을 제시하고 있다.

유클리드가 왜 이런 복잡한 증명을 고안하게 되었는가에 대한 여러 가지 추측이 가능하겠지



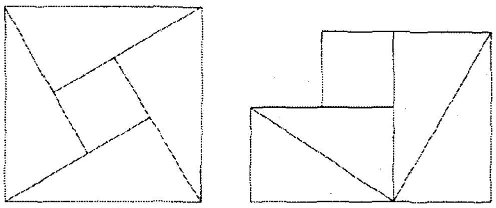
<그림 10>

만, 이것에 관한 가장 설득력 있는 대답으로는 무리수의 등장 곧 통약불가능성의 문제를 들 수 있다(Boyer, 1968, p.54). 앞서 제시한 도형의 분할을 이용한 증명은 선분의 길이를 a, b, c 등으로 하는 정사각형의 넓이를 계산하여야 한다. 그런데 무리수 곧 통약 불가능한 선분의 존재를 인정할 수 없었던 유클리드는 이러한 증명법을 받아 드릴 수 없었다. 그래서 유클리드는 통약불가능한 수를 사용하지 않고도 증명할 수 있는 방법을 찾을 수밖에 없었으며 그 결과로 제시된 증명법이 위의 그림을 이용한 증명이라는 것이다.

7. 중세 인도

12세기경의 인도의 수학자 바스카라는 아래의 그림을 이용한 분해 증명법으로 피타고라스의 정리를 증명하였다. 아래 그림의 왼쪽 그림에서 보는 바와 같이, 직각 삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을, 주어진 직각 삼각

형 4개와 밑변과 높이의 차이를 한 변으로 하는 정사각형으로 나눌 수 있고, 이는 오른쪽 그림처럼 밑변과 높이를 각각 한 변으로 하는 두 개의 정사각형의 합으로 재배열된다.



<그림 11>

바스카라는 이 그림을 그려놓고 "보라!"라는 말 이외에 더 이상의 설명을 주지 않았다고 전해진다(Eves, 1953, p.205). 물론, 재배열된 오른쪽 그림을 계산해 보면 쉽게 증명이 확인될 수 있다. 바스카라는 또한 다른 증명법을 제시하고 있는 데, 그는 직각삼각형의 직각에서 빗변에 수선의 발을 내린 후 세 개의 직각 삼각형 사이의 닮음비를 이용하여 피타고라스의 정리를 증명하였다고 한다.

III. 배적 문제를 이용한 피타고라스 정리의 재구성

지금까지 피타고라스 정리와 그것의 증명법의 발견과 관련된 역사를 살펴보았다. 먼저, 피타고라스 정리의 아이디어는 정사각형의 대각선을 이용한 무늬(여신의 베틀)에 숨겨져 있는데, 이 그림을 이용하면 직각 이등변 삼각형인 경우의 피타고라스의 정리를 발견하고 증명할 수 있게 된다. 다음으로 중국에서는 길이 비가 3 : 4 : 5인 경우의 피타고라스의 정리를 보여주고 있으며, 이를 현대적으로 해석하면 두 가지의 분할 증명법을 얻을 수 있다. 이후에 피타고라스, 유클리드, 바스카라 등에 의해 다양한 방식의 일반적인 증명이 제시된다. 그러나 앞서 언급한 바와 같이 현재 남아 있는 기록만으로는 피타고라스 정리가 일반화되는 과정이나 다양한 증명법의 발견 과정을 구체적으로 파악할 수는 없었다. 다만, 당시에 알려져 있던 정사각형의 배적 문제에서 피타고라스의 정리의 발견과정을 추측할 수 있는 단서를 찾을 수 있었다.

본고에서는 특수한 경우의 피타고라스의 정리를 발견하고 증명하는 것에서 일반거인 경우의 증명으로 발전하는 과정을 소크라테스가 제시한 정사각형의 배적 문제를 이용하여 구체화하고자 한다. 여기서는 이를 5단계로 나누어서 고찰해 볼 것이다.

1단계 : 점판을 이용하여 다양한 모양과 크기의 정사각형 만들어 보기
2단계. 주어진 정사각형의 2배, 5배, 8배, 10배, 13배 ... 크기의 정사각형 그리기
3단계. 그리는 방법과 문제 사이의 관련성, 패턴 찾기 - 피타고라스 정리의 발견
4단계. 특수한 경우의 피타고라스 정리의 증명 - 분할 증명법의 아이디어
5단계. 일반적인 경우의 피타고라스 정리의 증명법 찾기

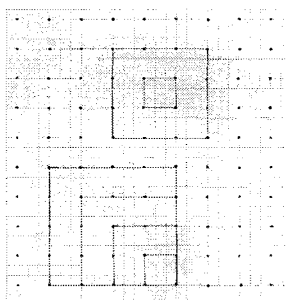
이제 각 단계별로 과제를 보다 구체적으로 살펴보자.

위의 5 단계에서 1단계는 배적 문제를 해결할 수 있는 아이디어를 제공하는 예비과정이며, 2단계는 배적 문제 자체를 해결하는 것이며, 3단계는 배적 문제를 풀이하는 과정에서 규칙 즉 피타고라스 정리를 발견하는 과정이며, 4단계는 배적 문제를 해결할 수 있는 특수한 경우에서의 피타고라스 정리를 증명하는 방법을 배적 문제를 해결하는 과정과 관련해서

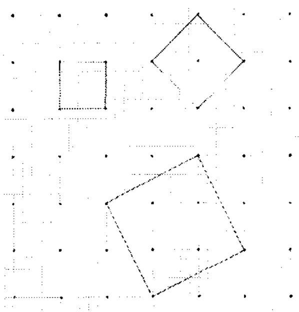
파악하는 과정이며, 마지막으로 5단계는 일반적인 특수한 경우에서 일반적인 경우로 확장하는 과정을 보여주고 있다. 위의 5단계는 각각 독립적인 목적으로 구분 된 것이나 학생의 수준이나 수업 상황에 따라 다양하게 적용할 수 있을 것이다. 이제 각 단계를 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

1단계: 점판을 이용하여 다양한 모양과 크기의 정사각형 만들어 보기

이 과정은 배적문제를 해결하는 아이디어를 생각하기 어려운 학생들을 위한 예비과정이다. 주어진 정사각형의 2배, 5배 크기의 정사각형을 그리려면 정사각형에 대한 고정관념을 넘어서야 된다. 즉 <그림 12>와 같이 보통 사람들은 정사각형을 한 변이 바닥이 되는 안정된 모양으로만 생각한다.

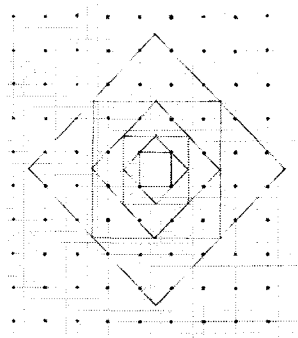


<그림 12>

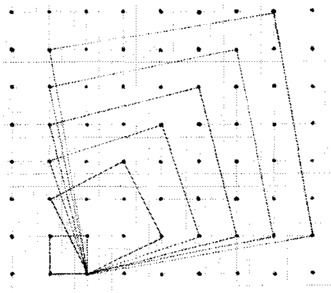


<그림 13>

배적문제를 해결하기 위해서는 <그림 13>에 있는 것과 같은 비스듬한 모양의 정사각형을 떠올릴 수 있어야 한다. 일단, 비스듬한 모양의 정사각형을 생각할 수 있게되면, <그림 14>나 <그림 15>과 같이 규칙적으로 정사각형을 배열할 것을 요구할 수 있다. 이러한 활동은 이후에 등장할 배적문제를 풀이하는 일반적인 방식을 찾는 데 예비 지식을 제공한다. (<그림 14>는 앞서 여러 번 등장한 여신의 베틀 그림임에 주목할 수 있다.)



<그림 14>



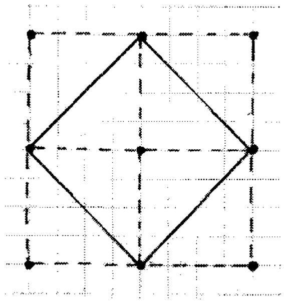
<그림 15>

2단계: 주어진 정사각형의 2배, 5배, 8배, 10배, 13배 ... 크기의 정사각형 그리기

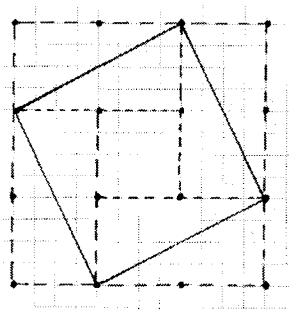
1단계 활동을 하지 않은 학생에게 있어 위의 문제는 간단한 문제가 아니지만, 1단계 활동을

숙달한 학생들은 이 문제들을 비교적 쉽게 해결할 수 있다. 학생들에게 보다 도전적인 문제를 제공하고 싶다면 1단계를 생략하고 바로 2단계에서 시작할 수 있다. 그림14와 같이 정사각형의 대각선을 이용하면 2, 4, 8, 16, ... 배의 정사각형을 그릴 수 있으며, <그림 15>에서 5배, 10배, 13배 ... 크기의 정사각형을 그릴 수 있게 된다.

2단계의 보다 중요활동은 n배가 되는 것을 확인하는 것이다.



<그림 16>



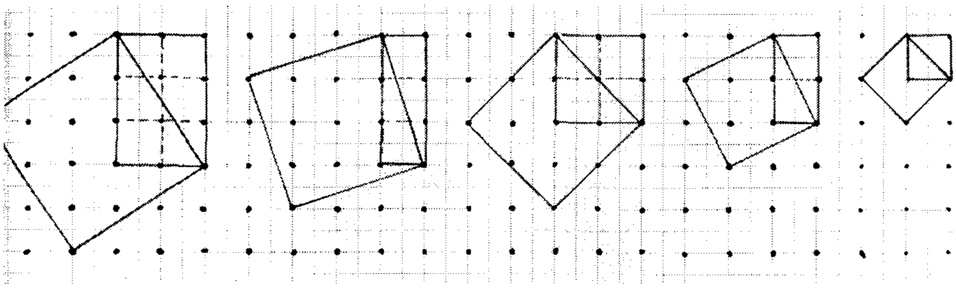
<그림 17>

n배가 되는 것 을 확인하는 여러 가지 방법이 있을 수 있겠으나, 위의 그림에서와 같은 방법으로 확인하는 방법이 일반적이다. 이 그림은 피타고라스 정리의 증명법과 밀접한 관계를 갖게된다. 즉, <그림 17>은 중국의 주비 산경에 등장하는 증명법이나 이에 근거한 두 가지 분할 증명법의 그림이다.

3단계: 그리는 방법과 문제 사이의 관련성을 탐구하여 피타고라스 정리를 발견하기

n배 크기의 정사각형을 그리는 문제에서 어떤 경우는 쉽게 답을 찾을 수 있고 어떤 경우는 그렇지 못하다. 또한 쉽게 답을 구할 수 있는 경우의 풀이법에는 <그림 14>와 <그림 15>과 같이 일정한 규칙이 있다. 즉, 아래의 <그림 18>와 같이 2, 5, 8, 10, 13배의 정사각형을 그리는 방법을 각각 길이비가 1 : 1, 1 : 2, 2 : 2, 1 : 3, 2 : 3 등이 되는 정사각형의 대각선을 이용하는 것이다. (이는 또한 직각삼각형의 빗변이기도 하다.) 이들 길이 비와 n배 사이에는 일정한 규칙이 있다. 즉, 각각의 길이 비를 제곱해서 합하면 n배가 된다. 다시 말해 <그림 18>에서와 같이 각 변의 길이의 비가 정수인 직각삼각형의 빗변을 이용한 방법으로 그 길이 비의 제곱의 합이 n의 값이 된다.

여기서 변의 길이의 제곱이란 그 변을 한 변

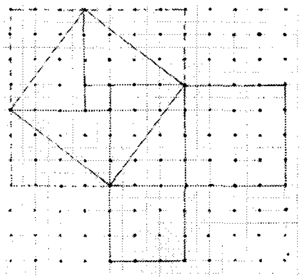


<그림 18>

으로 하는 정사각형의 넓이를 의미한다는 것에 주목하면, 길이 비가 정수비가 되는 직각 삼각형에서 각각의 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 됨을 알 수 있다. 즉, 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있다.

4단계. 특수한 경우의 피타고라스 정리의 증명 - 분할 증명법의 아이디어

이제 3단계에서 발견된 사실을 보다 명확하게 표현하면 <그림 19>에서와 같은 특수한 경우의 피타고라스 정리가 된다. 4단계에서 이미 2단계에서 사용한 바 있는 n배가 되는 것을 확인하는 방법을 통해 특수한 경우의 피타고라스의 정리를 증명할 수 있다.



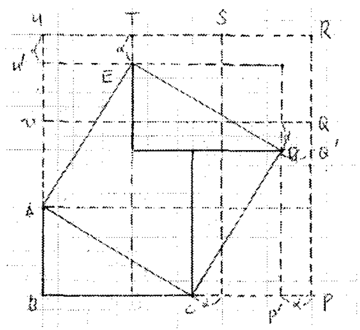
<그림 19>

여기서는 직각삼각형의 넓이를 구하는 것으로 확인하는 것에서, 실제로 잘라 붙여 보는 활동을 하는 것 그리고 그것을 임의의 문자를 도입하여 대수식으로 증명하는 방법까지 다양한 방법을 사용할 수 있다.

5단계. 일반적인 경우의 피타고라스 정리의 증명법 찾기

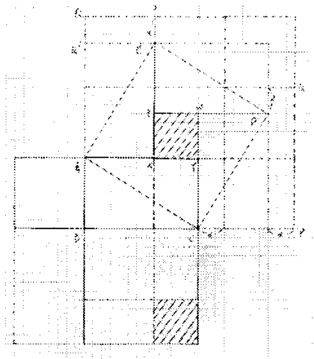
이제 마지막으로 일반적인 경우로의 확장을 시도해 보자. 길이비가 정수비로 떨어지지 않는 경우에도 이와 같은 성질이 만족될 것인가? 문제를 조금만 확장하여 길이 비가 $1:a$ $(1<a<2)$인 직각 삼각형의 경우를 생각해 보자.

이 경우는 앞서 길이비가 정수비가 되는 경우와는 다른 어려움이 있다. 즉, 길이비가 정수비인 경우에는 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 쉽게 그릴 수 있었으나 이 경우는 그렇지 않다. 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 그리기 위해서는 그림20에서 처럼 선분 AE와 CD를 그려야 한다. AC와 수직인 선분을 그리려면 길이비가 $1:a$인 직각 삼각형을 생각해야 한다. 아래 그림에서 CP′ D는 길이 비기 $1:a$인 직각삼각형이다. 이와 같이 점 D와 E를 잡으면 그림21과 같이 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 그릴 수 있다.

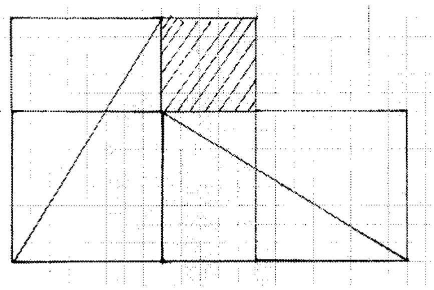


<그림 20>

이제 이 경우에도 피타고라스의 정리가 만족하는 지를 살펴보면 <그림 21>과 <그림 22>와 같은 분할증명법을 얻게 된다. 즉, <그림 21>에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 다른 변을 한 변으로 하는 정사각형 두 개는 모두 <그림 22>처럼 4개의 직각삼각형과 하나의 정사각형으로 분할된다. 이는 인도의 바스카라의 증명법과 동일하다.



<그림 21>



<그림 22>

IV. 맺음말

지금까지 피타고라스 정리 및 그것의 증명의 발견과 관련된 역사를 살펴보고, 이를 수학 수업에서 구체적으로 적용하기 위한 방안을 살펴보았다. 피타고라스 정리는 언제 누구에 의해 어떻게 발견되었는가에 대한 정확한 기록이 남아 있지 않지만, 여러 고대 문명에서 자연스럽게 등장하게 되었으며, 그것을 발견하는 과정을 추리해 볼 수 있는 많은 역사적인 사실들이 남아 있다.

여기서는 특별히 주어진 정사각형의 n배 크기의 정사각형을 만드는 문제(배적문제)를 탐구하는 과정에서 피타고라스 정리 및 그것의 증명법이 발견될 수 있도록 시도해 보았다. 이 문제는 점판을 이용한 구체적 활동에서 시작하여 이 문제를 풀이하는 방식에 대한 반성적인 고찰로부터 일정한 규칙을 발견하고, 이를 직각삼각형의 변들에 관련시킴으로서 피타고라스 정리를 자연스럽게 발견할 수 있도록 시도한 것이다. 또한 이 문제를 풀이하는 과정에서 특수한 경우의 피타고라스 정리의 증명법을 착안할 수 있게되고 이를 일반적인 경우로 확장시켜 피타고라스 정리의 분할 증명법들을 발견할 수 있도록 하고자 하였다.

본문에 제시된 5단계 별 과제들을 실제의 수업에 적용해보고 본고의 의도된 바가 실제의 상황에서 실현되는 가를 확인하는 후속작업이 이어져야 할 것이다. 위의 내용을 시도하는 수업은 다양한 방식으로 전개될 수 있다. 본문에 제시된 5개의 단계는 독립적으로 사용될 수도 있으며, 한 시간의 수업에서 선택적으로 사용될 수도 있을 것이다. 점판 혹은 모눈종이 등을 이용한 구체적 활동을 강조하는 수업이나, n배가 되는 것을 확인하는 과정과 피타고라스 정리를 확인하는 과정 등을 오려 붙이기 활동으로 구성해 볼 수 있을 것이다.

참고문헌

교육부(1997). 수학과교육과정. 교육인적자원부.

김용운 · 김용국(1996). 중국수학사. 민음사: 서울.

박문환(2002). 피타고라스 정리의 지도에 대한 남북한 비교. 학교수학, 4(2), 223-235, 대한수학교육학회.

박배훈 · 정창현(1999). 중학교 수학 3. 서울: 교학사.

우정호(1992). 수학교육학개론. 서울: 서울대출판부.

이종우 편저(1998). 기하학의 역사적 배경과 발달. 서울: 경문사.

최인훈(2002). 화두. 서울: 문이재.

Aaboe A. (1999). 초기 수학의 에피소드. 김강안 · 이광연(공역). 서울: 일공일공일.

Boyer B. (1968). *A history of mathematics*. J. Wiley & Sons.

Eves H. (1996). 수학사. 이우영 · 신항균(공역). 서울: 경문사. (영어원작은 1953년 출판)

Katz J. (1993). A History of Mathematics. Harper Collins College Publishers.

Schneider M.S. (2002). 자연, 예술, 과학의 수학적 원형. 이충호(역). 서울: 경문사. (영어원작은 1994년 출판)

A study on the rediscovery of the Pythagorean theorem

Han, Dae Hee (Chongju National University of Education)

The Pythagorean theorem is one of the most important theorem which appeared in school mathematics. Allowing our pupils to rediscover it in classroom, we must know how this theorem was discovered and proved. Further, we should recompose that historical knowledge to practical program which might be suitable to them

So, firstly this paper surveyed the history of mathematics on discovering the Pythagorean theorem. This theorem was known to many ancient civilizatons: There are evidences that Babylonian and Indian had the knowledges on the relationship among the sides of a right triangle. In Zhoubi suanjing, which was ancient Chinese text book, was the proof of the Pythagorean theorem in special case.

And then this paper proposed a teaching program that is composed following five tasks : 1) To draw up squares on geo-board that are various in size and shape, 2) To invent squares that are n-times bigger than a given square, 3) Discovering the Pythagorean theorem through the previous activity, 4) To prove the Pythagorean theorem in special case, 5) To prove the Pythagorean theorem in general case.