대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.3, 361-373. Sep 2002

수열의 교수 · 학습을 위한 교수단원 소재 연구 - 다각수와 각뿔수

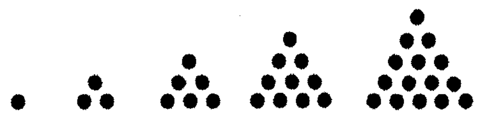
박 교 식*

Ⅰ. 서론

이 논문의 목적은, 비트만(Wittmann, 1984, 1995)의 관점에서, 다각수(polygonal numbers)와 각뿔수(pyramidal numbers)가 수열의 교수 · 학습을 위한 교수단원 소재로 적절하게 사용될 수 있음을 보이는 것이다. 이를 위해 이 논문에서는 다각수와 각뿔수에 관련된 일련의 과제 및 그 풀이를 제시하고 있다. 교수단원은 어떤 교수 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 설계 · 조직해 놓은 교수 · 학습 내용 전체를 의미한다(박교식, 2002).

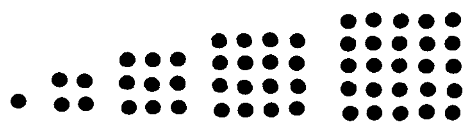
다각수는 이미 피타고라스 시대부터 관심의 대상이 되어 왔다(Boyer & Merzbach, 2000). 각뿔수는 다각수에서 자연스럽게 유추될 수 있기에 많은 수학자들의 관심을 받아왔다(Smith, 1953). 오늘날 다각수와 각뿔수는 수학 퍼즐책이나 레크리에이션 수학책에서 일종의 퍼즐 또는 수학적 유희로서 취급되고 있다(Dudeney, 1970; Ball & Coxeter, 1987; Eiss, 1988). 그러나 동시에 수학적인 취급을 받고 있기도 하다(Gullberg, 1997).

다각수는 삼각수, 사각수, 오각수, … 등을 의미한다. 이를테면, 다음과 같이 점의 수를 늘려가면서 정삼각형 모양의 배열을 계속해서 만들어 갈 수 있다. 이때 각 삼각형 모양의 배열을 만드는 점의 수로 이루어진 수열 1, 3, 6, 10, 15, … 에서 각각의 수가 삼각수(triangular numbers)이다.



위의 그림에서 정삼각형의 각 변을 만드는 점의 수는 차례로 1, 2, 3, 4, 5, … 로 늘어나고 있음을 알 수 있다.

이와 유사하게 사각수(square numbers)를 정의할 수 있다. 즉, 다음 그림에서 1, 4, 9, 16, 25, … 등이 사각수이다.



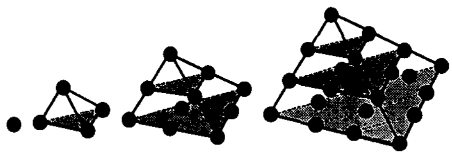
삼각수와 사각수를 정의한 것과 같은 방법으로 계속해서 오각수(pentagonal numbers), 육각수(hexagonal numbers), … 등을 정의할 수 있다. 이를테면 오각수와 육각수는 각각 다음과 같다.

오각수: 1, 5, 12, 22, 35, …
육각수: 1, 6, 15, 28, 45, …

정삼각형, 정사각형, 정오각형, … 등의 모양에서 각각 삼각수, 사각수, 오각수, … 등의 다

* 인천교육대학교

각수를 정의한 것과 유사하게, 정삼각뿔, 정사각뿔, 정오각뿔, … 등의 모양에서 각각 삼각뿔수(tetrahedral numbers), 사각뿔수(square pyramidal numbers), 오각뿔수(pentagonal pyramidal numbers), … 등의 각뿔수를 정의할 수 있다. 이를테면 다음 그림에서 삼각뿔수 1, 4, 10, 20, … 등을 구할 수 있다. 여기서 n 번째 삼각뿔수는 n 번째 삼각수까지의 합임을 쉽게 알 수 있다.



위의 그림에서 삼각뿔의 각 면을 만드는 점의 수는 차례로 1, 3, 6, 10, … 로 늘어나고 있다. 즉, 삼각뿔의 한 면의 모양의 배열을 만드는 점의 수로 이루어진 수열은 바로 삼각수의 수열이다.

삼각뿔수를 정의한 것과 같은 방법으로 계속해서 사각뿔수, 오각뿔수, … 등을 정의할 수 있다. 이를테면, 다음과 같이 n 번째 사각뿔수는 n 번째 사각수까지의 합이고, n 번째 오각뿔수는 n 번째 오각수까지의 합으로 정의된다.

사각뿔수	오각뿔수
1	1
5 (=1+4)	6 (=1+5)
14 (=1+4+9)	18 (=1+5+12)
30 (=1+4+9+16)	40 (=1+5+12+22)
55 (=1+4+9+16+25)	75 (=1+5+12+22+35)
…	…

다각수 등의 도형수는 수학교육적으로 의미있는 소재가 될 수 있다(Freudenthal, 1991). 그러나 다각수나 각뿔수를 수학교육적으로 실제로 활용하고자 하는 시도는 찾기 어렵다. 단지, 팔각수까지의 다각수와 관련해서 그 일반항 구하기를 목적으로 하는 것(Reimer & Reimer, 1992) 정도를 볼 수 있을 뿐이다. 이에 이 논문에서는 다각수와 각뿔수에 관련한 일련의 과제를 제시하여, 다각수와 각뿔수가 고등학교 <수학 I>의 '여러 가지 수열'의 교수 · 학습에 적절한 소재가 될 수 있음을 보이고자 한다.

II. 다각수의 수열

1. 삼각수의 수열과 사각수의 수열

삼각수로 이루어진 다음 수열의 일반항을 찾는 것을 첫 번째 과제로 제시할 수 있다. 삼각수는 역사적인 배경을 가지고 있으므로, 학생들에게 의미 있는 소재가 될 수 있다.

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots$$

이 수열의 계차수열이 2, 3, 4, 5, … 이므로 삼각수의 수열의 일반항을 $P^{(2)}(3,\ n)$이라고 하면 다음이 성립함을 알 수 있다. (기호 $P^{(2)}(3,\ n)$에서 2는 삼각수가 평면도형인 삼각형 즉, 2차원 도형에 근거한 것임을, 3은 삼각수를, n은 n 번째를 의미한다. 이 기호는 이 논문에서 일시적으로 사용하는 것이다.)

n 번째 삼각수 $P^{(2)}(3,\ n)$과 $n-1$ 번째 삼각수 $P^{(2)}(3,\ n-1)$ 사이에 다음의 관계가 있다. 이것을 이용하여 $P^{(2)}(3,\ n)$을 구할 수 있다.

$$P^{(2)}(3,\ n) = P^{(2)}(3,\ n-1) + n\ (n \ge 2)$$

이 식에 n=2, 3, 4, …를 차례로 대입하면 다음과 같은 일련의 식을 얻을 수 있다.

$$P^{(2)}(3,\ 2) = P^{(2)}(3,\ 1)+2$$
$$P^{(2)}(3,\ 3) = P^{(2)}(3,\ 2)+3$$
$$P^{(2)}(3,\ 4) = P^{(2)}(3,\ 3)+4$$
$$\cdots$$
$$P^{(2)}(3,\ n) = P^{(2)}(3,\ n-1)+n$$

이 식을 변끼리 더하면 다음과 같이 $P^{(2)}(3,\ n)$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &P^{(2)}(3,\ 2)+P^{(2)}(3,\ 3)+\cdots+P^{(2)}(3,\ n) \\ &= P^{(2)}(3,\ 1)+P^{(2)}(3,\ 2)+\cdots+P^{(2)}(3,\ n-1) \\ &\quad + (2+3+\cdots+n) \\ &P^{(2)}(3,\ n) = P^{(2)}(3,\ 1)+(2+3+\cdots+n) \\ &= 1+2+3+\cdots+n \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

삼각수의 수열의 일반항을 이렇게 구하는 대신 다음과 같이 이미 학습한 공식을 이용하여 구할 수도 있다. 즉, 삼각수의 수열의 계차수열 2, 3, 4, 5, …는 첫째항 2, 공차 1인 등차수열이므로 그 일반항은 $2+(n-1)\cdot 1 = n+1$이다. 따라서 삼각수의 수열의 일반항 $P^{(2)}(3,\ n)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P^{(2)}(3,\ n) &= P^{(2)}(3,\ 1)+\sum_{i=1}^{n-1}(i+1) \\ &= 1+\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

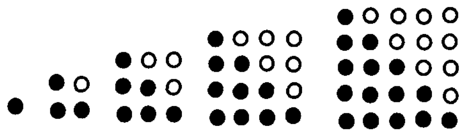
사각수로 이루어진 다음의 수열에서 그 일반항 $P^{(2)}(4,\ n)$을 쉽게 구할 수 있다.

1, 4, 9, 16, 25, …

각각의 사각수는 제곱수이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$P^{(2)}(4,\ n) = n^2$$

삼각수 $P^{(2)}(3,\ n)$과 사각수 $P^{(2)}(4,\ n)$ 사이에 어떤 관계가 있는지, 그 관계를 찾는 것을 두 번째 과제로 제시할 수 있다. 다음 그림에서 삼각수와 사각수 사이에 어떤 관계가 있다는 것을 시각적으로 확인할 수 있다.



위의 그림에서 차례로 다음이 성립한다.

$$P^{(2)}(4,\ 1) = P^{(2)}(3,\ 1)$$
$$P^{(2)}(4,\ 2) = P^{(2)}(3,\ 2)+P^{(2)}(3,\ 1)$$
$$P^{(2)}(4,\ 3) = P^{(2)}(3,\ 3))+P^{(2)}(3,\ 2)$$
$$P^{(2)}(4,\ 4) = P^{(2)}(3,\ 4)+P^{(2)}(3,\ 3)$$

여기서 n 번째 사각수 $P^{(2)}(4,\ n)$은 n 번째 삼각수 $P^{(2)}(3,\ n)$과 $n-1$ 번째 삼각수 $P^{(2)}(3,\ n-1)$의 합임을 알 수 있다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$P^{(2)}(4,\ n) = P^{(2)}(3,\ n)+P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$(n \geq 2)\ \cdots\ \text{(II-1)}$$

이 식은 귀납적 추측으로 얻은 것이므로, 이 식이 항상 성립한다는 것을 증명할 필요가 있다. 이를테면 여기서는 다음과 같이 이 식이 성립한다는 것을 증명할 수 있다.

$$P^{(2)}(3,\ n) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$P^{(2)}(3,\ n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

이므로

$$P^{(2)}(3,\ n)+P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$=n^2=P^{(2)}(4,\ n)\quad(n\geq 2)$$

2. 오각수의 수열과 육각수의 수열

오각수로 이루어진 다음 수열의 일반항을 찾는 것을 세 번째 과제로 제시할 수 있다.

1, 5, 12, 22, 35, …

오각수의 수열의 계차수열 4, 7, 10, 13, …은 첫째항 4, 공차 3인 등차수열이므로 그 일반항은 $(4+(n-1)\cdot 3=3n+1$이다. 따라서 오각수의 수열의 일반항 $P^{(2)}(5,\ n)$은 다음과 같다.

$$P^{(2)}(5,\ n)=P^{(2)}(5,\ 1)+\sum_{i=1}^{n-1}(3i+1)$$
$$=1+3\cdot\frac{11}{2}n(n-1)+(n-1))$$
$$=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

육각수(hexagonal numbers)로 이루어진 다음 수열의 일반항을 찾는 것을 네 번째 과제로 제시할 수 있다.

1, 6, 15, 28, 45, …

육각수의 수열의 계차수열 5, 9, 13, 17, …은 첫째항 5, 공차 4인 등차수열이므로, 그 일반항은 $5+(n-1)\cdot 4=4n+1$이다. 따라서 육각수의 수열의 일반항 $P^{(2)}(6,\ n)$은 다음과 같다.

$$P^{(2)}(6,\ n)=P^{(2)}(6,\ 1)+\sum_{i=1}^{n-1}(4i+1)$$
$$=1+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+(n-1)$$
$$=2n(n-1)$$

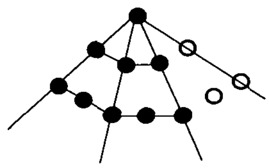
앞에서 식 (II-1)이 성립하였다. 이와 유사한 관계가 성립하는지 알아보는 것을 다섯 번째 과제로 제시할 수 있다. 먼저

$$P^{(2)}(5,\ n)=P^{(2)}(4,\ n)$$
$$+P^{(2)}(3,\ n-1)\quad(n\geq 2)\cdots\ \text{(II-2)}$$

가 성립함을 다음에서 알 수 있다.

$$P^{(2)}(4,\ n)+P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$=n^2+\frac{1}{2}n(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}n(3n-1)$$
$$=P^{(2)}(5,\ n)\quad(n\geq 2)$$

사실 다음 그림에서 식 (II-2)가 성립한다는 것은 어느 정도 예상해 볼 수 있다. 이 그림에서 왼쪽의 검은 점들은 차례로 사각수를, 오른쪽의 흰 점들은 차례로 삼각수를 나타낸다.



한편, 식 (II-1)과 (II-2)에서 결국 오각수와 삼각수 사이에 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$P^{(2)}(5,\ n)=P^{(2)}(4,\ n)+P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$=P^{(2)}(3,\ n)+P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$+P^{(2)}(3,\ n-1)$$

$= P^{(2)}(3,\ n) + 2P^{(2)}(3,\ n-1)$
$(n \geq 2)$ ⋯ (II-3)

그런데

$$P^{(2)}(3,\ n) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$P^{(2)}(3,\ n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

이므로

$$\begin{aligned} & P^{(2)}(3,\ n) + 3P^{(2)}(3,\ n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + 3\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n\{(n+1)+3(n-1)\} \\ &= n(2n-1) \\ &= P^{(2)}(6,\ n)\ (n \geq 2) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 결국 육각수와 삼각수 사이에 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$P^{(2)}(6,\ n) = P^{(2)}(3,\ n) + 3P^{(2)}(3,\ n-1) \quad (n \geq 2) \cdots \text{(II-4)}$$

3. 다각수의 수열

이제 임의의 r에 대해, r각수를 생각할 수 있다. r각수로 이루어진 수열의 일반항을 찾는 것을 여섯 번째 과제로 제시할 수 있다. 이를 위해 먼저 r각수의 수열의 계차수열의 일반항을 구해보자. 삼각수, 사각수, 오각수, 육각수의 수열의 계차수열의 일반항은 각각 다음과 같다.

삼각수의 수열의 계차수열의 일반항: $n+1$
사각수의 수열의 계차수열의 일반항: $2n+1$
오각수의 수열의 계차수열의 일반항: $3n+1$
육각수의 수열의 계차수열의 일반항: $4n+1$

여기서 r각수의 수열의 계차수열의 일반항은 $(r-2)n+1$일 것으로 쉽게 예측할 수 있다. 실제로, r각수의 수열의 계차수열은 첫째항 $r-1$, 공차 $r-2$인 등차수열이므로, 일반항은

$$(r-1)+(n-1)\cdot(r-2) = (r-2)\cdot n+1$$

이다. 따라서 $P^{(2)}(r,\ n)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P^{(2)}(r,\ n) &= P^{(2)}(r,\ 1) + \sum_{i=1}^{n-1}\{(r-2)i+1\} \\ &= 1 + (r-2)\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)r + 2n - n^2 \\ &= \frac{1}{2}n\{(r-2)n+(4-r)\} \end{aligned}$$

이 식을 사용하여 칠각수 (heptagonal numbers), 팔각수 (octagonal numbers), 구각수 (nonagonal numbers)의 수열의 일반항을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P^{(2)}(7,\ n) = \frac{1}{2}n(5n-3)$$

$$P^{(2)}(8,\ n) = \frac{1}{2}n(6n-4) = n(3n-2)$$

$$P^{(2)}(9,\ n) = \frac{1}{2}n(7n-5)$$

이제, r각수와 삼각수 사이의 관계를 찾는 것을 일곱 번째 과제로 제시할 수 있다. 식 (II-1), (II-3), (II-4)에서 $n \geq 2$일 때, 다음이 성립하였다.

$$P^{(2)}(4,\ n) = P^{(2)}(3,\ n) + P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$P^{(2)}(5,\ n) = P^{(2)}(3,\ n) + 2P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$P^{(2)}(6,\ n) = P^{(2)}(3,\ n) + 3P^{(2)}(3,\ n-1)$$

따라서 r각수와 삼각수 사이에 다음의 관계가 성립할 것임을 쉽게 추측할 수 있다.

$$P^{(2)}(r,\ n) = P^{(2)}(3,\ n) + (r-3)P^{(2)}(3,\ n-1)$$
$$(n \geq 2) \ \cdots \ \text{(II-5)}$$

실제로, 이 식이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$P^{(2)}(3,\ n) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$P^{(2)}(3,\ n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

이므로

$$\begin{aligned}
&P^{(2)}(3,\ n) + (r-3)P^{(2)}(3,\ n-1) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) + (r-3)\frac{1}{2}n(n-1) \\
&= \frac{1}{2}n\{(n+1)+(r-3)(n-1)\} \\
&= \frac{1}{2}n\{(r-2)n+(4-r)\} \\
&= P^{(2)}(r,\ n) \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

III. 각뿔수의 수열

1. 삼각뿔수의 수열과 사각뿔수의 수열

삼각뿔수로 이루어진 다음 수열의 일반항을 찾는 것을 여덟 번째 과제로 제시할 수 있다.

1, 4, 10, 20, 35, …

n 번째 삼각뿔수는 n 번째 삼각수까지의 합이므로, $P^{(3)}(3,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다. (기호 $P^{(3)}$에서 3은 삼각뿔수가 입체도형인 삼각뿔 즉, 3차원 도형에 근거한 것임을 의미한다.)

$$\begin{aligned}
P^{(3)}(3,\ n) &= \sum_{i=1}^{n} P^{(2)}(3,\ i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} i(i+1) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+4) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

사각뿔수로 이루어진 다음 수열의 일반항을 찾는 것을 아홉 번째 과제로 제시할 수 있다.

1, 5, 14, 30, 55, …

n 번째 사각뿔수는 n 번째 사각수까지의 합이므로, $P^{(3)}(4,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
P^{(3)}(4,\ n) &= \sum_{i=1}^{n} P^{(2)}(4,\ i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

한편, 사각수와 삼각수 사이에 식 (II-1)의 관계가 있었던 것에서, 사각뿔수와 삼각뿔수 사이에 다음의 관계가 성립할 것을 유추해 볼 수 있다. 이 관계를 유추하고 증명하는 것을 열 번째 과제로 제시할 수 있다.

$$P^{(3)}(4,\ n) = P^{(3)}(3,\ n) + P^{(3)}(3,\ n-1)$$
$$\cdots \ \text{(III-1)}$$

실제로 이 식이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$P^{(3)}(3,\ n)+\ P^{(3)}(3,\ n-1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=P^{(3)}(4,\ n)\quad (n\geq 2)$$

2. r각뿔수의 수열

임의의 r에 대해 r각뿔수를 생각할 수 있다. r각뿔수로 이루어진 수열의 일반항 $P^{(3)}(r,\ n)$을 찾는 것을 열 한 번째 과제로 제시할 수 있다. n 번째 r각뿔수는 n 번째 r각수까지의 합이므로, r각뿔수의 수열의 일반항 $P^{(3)}(r,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P^{(3)}(r,\ n)=\sum_{i=1}^{n}P^{(2)}(r,\ i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i\{(r-2)i+(4-r)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i\{(r-2)i+(4-r)\}$$
$$=\frac{1}{2}(r-2)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+\frac{1}{2}(4-r)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)(4\text{-r})$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{(r-2)(2n+1)+3(4-r)\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{2(r-2)n+2(5-r)\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)n+(5-r)\}$$

이 식을 사용하여 오각뿔수, 육각뿔수(hexagonal pyramidal numbers), 칠각뿔수(heptagonal pyramidal numbers)의 수열의 일반항을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P^{(3)}(5,\ n)=\frac{1}{6}n(n+1)(3n-0)=\frac{1}{2}n^2(n+1)$$
$$P^{(3)}(6,\ n)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$
$$P^{(3)}(7,\ n)=\frac{1}{6}n(n+1)(5n-2)$$

r각수와 삼각수 사이에 식 (II-5)의 관계가 있었던 것에서, r각뿔수와 삼각뿔수 사이에 다음의 관계가 성립할 것을 유추해 볼 수 있다. 이 관계를 유추하고 증명하는 것을 열 두 번째 과제로 제시할 수 있다.

$$P^{(3)}(r,\ n)=P^{(3)}(3,\ n)+(r-3)P^{(3)}(3,\ n-1)$$
$$(n\geq 2)\cdots\ \text{(III-2)}$$

실제로 이 식이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$P^{(3)}(3,\ n)+(r-3)P^{(3)}(3,\ n-1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$
$$+(r-3)\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(n+2)+(r-3)(n-1)\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)n+(5-r)\}$$
$$=P^{(3)}(r,\ n)\quad (n\geq 2)$$

IV. 고차원 각뿔수의 수열

1. 4차원 삼각뿔수의 수열과 4차원 사각뿔수의 수열

각뿔수는 3차원의 도형을 이용하여 만든 것이다. 이때 n 번째 r각뿔수는 n 번째 r각수까지의 합이다. 이것을 확장하여 4차원 각뿔수를 만들 수 있다. 즉, n 번째 4차원 r각뿔수를 n 번째 (3차원) r각뿔수까지의 합으로 정의한다. 이를테면 4차원 삼각뿔수, 4차원 사각뿔수, 4차원 오각뿔수의 수열은 각각 다음과 같다.

4차원 삼각뿔수: 1, 5, 15, 35, 70, …
4차원 사각뿔수: 1, 6, 20, 50, 105, …
4차원 오각뿔수: 1, 7, 25, 65, 140, …

4차원 삼각뿔수로 이루어진 수열의 일반항 $P^{(4)}(3,\ n)$을 찾는 것을 열 세 번째 과제로 제시할 수 있다. n 번째 4차원 삼각뿔수는 n 번째 (3차원) 삼각뿔수까지의 합으로 정의되므로, 4차원 삼각뿔수의 수열의 일반항 $P^{(4)}(3,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P^{(4)}(3,\ n)=\sum_{i=1}^{n} P^{(3)}(3,\ i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}i(i+1)(i+2)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+2i)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\left\{\frac{1}{4}n(n+1)+\frac{1}{2}(2n+1)+1\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

4차원 사각뿔수로 이루어진 수열의 일반항 $P^{(4)}(4,\ n)$을 찾는 것을 열 네 번째 과제로 제시할 수 있다. n 번째 4차원 사각뿔수는 n 번째 (3차원) 사각뿔수까지의 합으로 정의되므로, 4차원 사각뿔수의 수열의 일반항 $P^{(4)}(4,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P^{(4)}(4,\ n)=\sum_{i=1}^{n} P^{(3)}(4,\ i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}i(i+1)(2i+1)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(2i^3+3i^2+i)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$
$$+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

(3차원) 사각뿔수와 (3차원) 삼각뿔수 사이에 식 (III-1)의 관계가 있었던 것에서, 4차원 사각뿔수와 4차원 삼각뿔수 사이에 다음의 관계가 성립할 것을 유추해 볼 수 있다. 이 관계를 유추하고 증명하는 것을 열 다섯 번째 과제로 제시할 수 있다.

$$P^{(4)}(4,\ n)=P^{(4)}(3,\ n)+P^{(4)}(3,\ n-1)$$
$$(n\geq2)\ \cdots\ \text{(IV-1)}$$

실제로 이 식이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$P^{(4)}(3,\ n)+P^{(4)}(3,\ n-1)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\{(n+3)+(n-1)\}$$

$$= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(2n+4)$$

$$= \frac{1}{12} n(n+1)^2(n+2)$$

$$= P^{(4)}(4,\ n) \quad (n \ge 2)$$

2. 4차원 r각뿔수의 수열

임의의 r에 대해 4차원 r각뿔수를 생각할 수 있다. 4차원 r각뿔수로 이루어진 수열의 일반항 $P^{(4)}(r,\ n)$을 찾는 것을 열 여섯 번째 과제로 제시할 수 있다. n 번째 4차원 r각뿔수는 n 번째 (3차원) r각뿔수까지의 합으로 정의되므로, 4차원 r각뿔수의 수열의 일반항 $P^{(4)}(r,\ n)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P^{(4)}(r,\ n) = \sum_{i=1}^{n} P^{(3)}(r,\ i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6} i(i+1)\{(r-2)i + (5-r)\}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \{(i^3 + i^2)(r-2) + (i^2 + i)(5-r)\}$$

$$= \frac{1}{6}(r-2)\left[\left\{\frac{1}{2} n(n+1)\right\}^2 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$+ \frac{1}{6}(5-r)\left\{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(r-2)n(n+1)\left\{\frac{1}{4} n(n+1) + \frac{1}{6}(2n+1)\right\}$$

$$+ \frac{1}{6}(5-r)n(n+1)\left\{\frac{1}{6}(2n+1) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(r-2)n(n+1) \cdot \frac{1}{12}\{3n^2 + 7n + 2\}$$

$$+ \frac{1}{6}(5-r)n(n+1) \cdot \frac{1}{6}(2n+4)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}(r-2)n(n+1)(3n+1)(n+2)$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}(5-r)n(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)\left\{\frac{1}{12}(r-2)(3n+1) + \frac{1}{3}(5-r)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \cdot \frac{1}{12}\{(r-2)(3n+1) + 4(5-r)\}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)\{3(r-2)n + 3(6-r)\}$$

$$= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)\{(r-2)n + (6-r)\}$$

이 식을 사용하여 4차원 오각뿔수, 4차원 육각뿔수, 4차원 칠각뿔수의 수열의 일반항을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P^{(4)}(5,\ n) = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

$$P^{(4)}(6,\ n) = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(4n+0)$$

$$= \frac{1}{6} n^2(n+1)(n+2)$$

$$P^{(4)}(7,\ n) = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(5n-1)$$

(3차원) r각뿔수와 (3차원) 삼각뿔수 사이에 식 (III-2)의 관계가 있었던 것에서, 4차원 r각뿔수와 4차원 삼각뿔수 사이에 다음의 관계가 성립할 것을 유추해 볼 수 있다. 이 관계를 유추하고 증명하는 것을 열 일곱 번째 과제로 제시할 수 있다.

$$P^{(4)}(r,\ n) = P^{(4)}(3,\ n) + (r-3)P^{(4)}(3,\ n-1) \quad (n \ge 2) \ \cdots \ \text{(IV-2)}$$

실제로 이 식이 성립함을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$P^{(4)}(3,\ n)+(r-3)P^{(4)}(3,\ n-1)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$+(r-3)\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\{(n+3)+(r-3)(n-1)\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\{(r-2)n+(6-r)\}$$
$$=P^{(4)}(r,\ n)\quad (n\geq 2)$$

3. 고차원 r각뿔수의 수열

지금까지의 논의에서 r각수, (3차원) r각뿔수, 4차원 r각뿔수의 수열은 각각 다음과 같다. 이것으로부터 5차원, 6차원, 7차원 r각뿔수 등의 수열의 일반항을 유추해 볼 수 있다. 또, 고등학교수학 수준에서는 어렵다고 할 수 있지만, 능력 있는 학생이라면 임의의 k에 대해 k차원 r각뿔수의 수열의 일반항을 유추하고, 그것을 증명해 볼 수 있을 것이다.

$$P^{(2)}(r,\ n)$$
$$=\frac{1}{2}n\{(r-2)n+(4-r)\}$$
$$=\frac{1}{2!}n\{(r-2)n+(4-r)\}$$
$$P^{(3)}(r,\ n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)n+(5-r)\}$$
$$=\frac{1}{3!}n(n+1)\{(r-2)n+(5-r)\}$$
$$P^{(4)}(r,\ n)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\{(r-2)n+(6-r)\}$$
$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)\{(r-2)n+(6-r)\}$$

위의 세 식에서 볼 수 있는 규칙이 그대로 성립한다면, k차원 r각뿔수의 수열의 일반항은 다음과 같을 것으로 생각해 볼 수 있다.

$$P^{(k)}(r,\ n)=\frac{1}{k!}n(n+1)(n+2)\cdots$$
$$(n+k-2)\{(r-2)n+(k+2-r)\}$$
$$\cdots\text{(IV-3)}$$

이제, 이 식이 성립한다는 것을 증명하기 위해, 먼저 이 식을 다음과 같이 변형해 보자.

$$P^{(k)}(r,\ n)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{(n+k-2)!}{(n-1)!}$$
$$\{(r-2)n+(k+2-r)\}$$
$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{(n+k-2)!}{\{n+k-2-(k-1)\}!(k-1)!}$$
$$\{(r-2)n+(k+2-r)\}$$
$$=\frac{1}{k}\cdot{}_{n+k-2}C_{k-1}\cdot\{(r-2)n+(k+2-r)\}$$
$$=\frac{1}{k}\cdot{}_{n+k-2}C_{k-1}\cdot$$
$$\{(n+k-1)+(r-3)(n-1)\}$$
$$=\frac{1}{k}\cdot{}_{n+k-2}C_{k-1}\cdot(n+k-1)$$
$$+\frac{1}{k}\cdot{}_{n+k-2}C_{k-1}\cdot(r-3)(n-1)$$
$$={}_{n+k-1}C_k+(r-3)\cdot{}_{n+k-2}C_k$$
$$=P^{(k)}(3,\ n)+(r-3)P^{(k)}(3,\ n-1)\quad (n\geq 2)$$

즉, 다음이 성립한다.

$$P^{(k)}(r,\ n)=P^{(k)}(3,\ n)$$
$$+(r-3)P^{(k)}(3,\ n-1)\quad (n\geq 2)$$
$$\cdots\text{(IV-4)}$$

이제 식 (IV-4)이 성립한다고 가정했을 때, 다음 식 (IV-5)가 성립함을 보이면 위의 식 (IV-3)이 일반적으로 성립한다고 할 수 있다.

$$P^{(k+1)}(r,\ n) = P^{(k+1)}(3,\ n) + (r-3)P^{(k+1)}(3,\ n-1) \quad (n \geq 2) \quad \cdots \text{(IV-5)}$$

정의와 식 (IV-4)에 의해 다음이 성립한다.

$$P^{(k+1)}(r,\ n) = \sum_{i=1}^{n} P^{(k)}(r,\ i) \quad (\text{정의})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{P^{(k)}(3,\ i) + (r-3)P^{(k)}(3,\ i-1)$$

(식 (IV-4))

$$= \sum_{i=1}^{n} P^{(k)}(3,\ i) + (r-3) \sum_{i=1}^{n} P^{(k)}(3,\ i-1)$$

$$= P^{(k+1)}(3,\ n) + (r-3)P^{(k+1)}(3,\ n-1)$$

(정의)

따라서, 위의 식 (IV-3)이 일반적으로 성립함을 알 수 있다. 이 식을 사용하여 5차원 r각뿔수, 6차원 r각뿔수, 7차원 r각뿔수의 수열의 일반항을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P^{(5)}(r,\ n) = \frac{1}{5!} n(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \{(r-2)n + (7-r)\}$$

$$P^{(6)}(r,\ n) = \frac{1}{6!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \{(r-2)n + (8-r)\}$$

$$P^{(7)}(r,\ n) = \frac{1}{7!} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \cdot \{(r-2)n + (9-r)\}$$

한편, 식 (IV-3) 대신 식

$$P^{(k)}(r,\ n) = \frac{1}{k} \cdot {}_{n+k-2}C_{k-1} \cdot \{(r-2)n + (k+2-r)\}$$

을 사용하여 k차원 삼각뿔수, 사각뿔수, 오각뿔수, 육각뿔수의 수열의 일반항을 구하면 각각 다음과 같다.

$$P^{(k)}(3,\ n) = {}_{n+k-1}C_k$$

$$P^{(k)}(4,\ n) = \frac{1}{k} \cdot {}_{n+k-2}C_{k-1} \cdot (2n+k-2)$$

$$P^{(k)}(5,\ n) = \frac{1}{k} \cdot {}_{n+k-2}C_{k-1} \cdot (3n+k-3)$$

$$P^{(k)}(6,\ n) = \frac{1}{k} \cdot {}_{n+k-2}C_{k-1} \cdot (4n+k-4)$$

V. 결론

이 논문에서는 다각수와 각뿔수를 고등학교 <수학 I>의 내용인 수열의 교수·학습을 위한 교수단원용 소재로서 활용하기 위해, 그와 관련한 일련의 과제를 제시하고 있다. 특히 다각수와 각뿔수의 수열의 일반항 구하기 및 다각수 사이의 관계, 각뿔수 사이의 관계에 초점을 맞추고 있다. 그러나 이 논문에서 다각수와 각뿔수 그 자체의 교수·학습에 주목하고자 하는 것은 아니다. 그것은 수열의 교수·학습을 의미 있게 하기 위한 소재일 뿐이지, 학생들이 다각수나 각뿔수 등의 개념을 알고, 용어를 배우고, 그리고 그 성질을 학습해야 하는 것은 아니다.

이 논문에서 다각수와 각뿔수와 관련하여 제시하고 있는 일련의 과제에는 다음의 세 가지 수학교육적 가치가 있음을, 따라서 다각수와 각뿔수가 수열의 교수·학습을 위한 교수단원용 소재로 적절함을 제시하고자 한다.

첫째, 계차수열을 이용한 원수열의 일반항 구하기의 교수·학습을 위한 자연스런 소재로서의 가치가 있다. 이것은 다각수나 각뿔수를 학생들이 나름대로 의미 있게 받아들이고, 또 학생들이 흥미와 호기심을 가질만한 소재가 될

수 있음을 의미한다. 특히 삼각수와 사각수, 그리고 삼각뿔수와 사각뿔수의 시각적 제시가 그러한 흥미와 호기심을 유발하는데 도움이 될 수 있다.

둘째, 일반화와 유추 등의 수학적 사고의 교수·학습을 위한 소재로서의 가치가 있다. 다각수 및 각뿔수의 수열에서 일반항을 구하는 과정 및 고차원 각뿔수의 수열의 일반항을 구하는 과정은 수학적 사고로서의 일반화를 경험할 수 있게 해준다. 또한, 이 과정에서 다각수에 대해 성립한 것이 각뿔수 및 고차원 각뿔수에 대해서도 성립할 것이라는 유추를 경험할 수 있게 해준다. Freudenthal(1991)식으로 표현하면, 일반화와 유추 모두 수학화에 포함되므로, 이 과제에는 수학화 교수·학습을 위한 소재로서의 가치가 있다고 할 수 있다.

셋째, 식의 대수적 조작, 증명 및 관련된 수학 지식 연결의 교수·학습을 위한 소재로서의 가치가 있다. 다각수 및 각뿔수, 고차원 각뿔수의 수열의 일반항을 구하는 과정에는 식의 대수적 조작, 증명 및 관련된 지식의 사용이 동반된다. 따라서 이러한 소재를 사용함으로써, 기호 및 변수 사용 등을 포함하는 식의 대수적 조작과 증명, 그리고 증명의 전개에 필요한 관련 지식의 적절한 사용을 경험할 있게 해준다.

한편, 이 논문에서 제시하고 있는 일부 과제는 고등학교 수준에서는 해결하기 어려운 것으로 보인다. 특히 고차원 r각뿔수의 일반항을 구하는 것이 그렇다. 그러나 이 과제는 그 이전의 일련의 과제에 자연스럽게 수반될 수 있는 것으로, 능력 있는 고등학생을 위한 심화 과제의 역할을 할 수 있을 것으로 보인다.

참고문헌

박교식(2002). 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원 설계 연구, 학교수학 4(2), 200-218, 대한수학교육학회.

Ball, W. W. R. & Coxeter, H. S. M. (1987). *Mathematical recreations and essays.* (thirteen edition). New York: Dover Publications, Inc.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). 수학의 역사·상. 양영오·조윤동(공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년에 출판)

Dudeney, H. E. (1970). *Amusements in mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Eiss, H. E. (1988). *Dictionary of mathematical games, puzzles, and amusements*. New York: Greenwood Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics: from the birth of numbers*. New York: Norton & Company.

Pickover, C. (2002). 신의 베틀. 이상원(역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1997년에 출판)

Reimer, W. & Reimer, L. (1992). *Historical connections in mathematics: resources for using history of mathematics in the classroom*. Fresno, CA: AIMS Educational Foundation.

Smith, D. E. (1953). *History of mathematics. Vol. II. special topic of elementary mathematics*. New York: Dover Publications, Inc.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 15*(1):

25-36.
Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

A study on teaching unit material for teaching and learning of sequences - polygonal numbers and pyramidal numbers

Park, Kyo Sik (Inchon National University of Education)

In this paper, a series of tasks related on polygonal numbers and pyramidal numbers are suggested for using them as teaching unit materials for teaching and learning of sequences in junior high school mathematics. Especially, finding n-th term in those sequences, relations among polygonal numbers, and relations among pyramidal numbers are focused on. A series of tasks related on polygonal numbers and pyramidal numbers have three math-eucational values.

First, they have a value as natural materials for teaching and learning of finding nth term of original sequences using pregression of differences. Second, they have a value as materials for teaching and learning of mathematical thinking such as generalization, analogy, etc. Third, they have a value as materials for teaching and learning of algebraic operation, proof, and connecting mathematical knowledges.