

論文2002-39SP-2-6

최적 비정규 리샘플링 알고리즘

(Optimal Non-Uniform Resampling Algorithm)

申建滉*, 李學茂*, 姜文基*

(Gun Shik Shin, Hak Moo Lee, and Moon Gi Kang)

요 약

영상 리샘플링의 전형적인 방법은 원래의 디지털 영상을 연속 모델에 맞춘 뒤 원하는 샘플링율로 다시 샘플링하는 접근방식에 기초한다. B -스플라인 함수는 다른 함수에 비해 오실레이션이 적어 연속 모델에 주로 사용되어 온 함수이다. 이 논문의 주 목표는 비정규 최적 리샘플링 알고리즘의 유도이다. 이 알고리즘을 유도하기 위해서 세단계의 근사화가 필요하다: 1) 역행렬 연산을 통한 B -스플라인 계수 구하기, 2) 직교 투사 이론에 의해 유도된 최적 리샘플링 알고리즘을 이용하여 변환된 B -스플라인 계수 구하기, 3) 간접 B -스플라인 변환을 통해 결과를 다시 신호 영역으로 바꾸기. 이러한 방법을 통해 정규 리샘플링에서 그 우수성이 입증된 B -spline을 비정규 리샘플링에서도 이용할 수 있으며 실험 결과를 통해 성능의 우수성을 확인할 수 있다.

Abstract

The standard approach of image resampling is to fit the original image with continuous model and resample the function at a desired rate. We used the B -spline function as the continuous model because it oscillates less than the others. The main purpose of this paper is the derivation of a nonuniform optimal resampling algorithm. To derive it, needing approximation can be computed in three steps: 1) determining the B -spline coefficients by matrix inverse process, 2) obtaining the transformed-spline coefficients by the optimal resampling algorithm derived from the orthogonal projection theorem, 3) converting of the result back into the signal domain by indirect B -spline transformation. With these methods, we can use B -spline in the non-uniform resampling, which is proved to be a good kernel in uniform resampling, and can also verify the applicability from our experiments.

Key Word : spline, interpolation, non-uniform

I. 서 론

리샘플링은 영상을 늘이고 줄이거나 또는 영상 왜곡을 보정하기 위해 영상 처리 분야에 널리 이용되어 왔다. 연속된 모델 중 가장 많이 이용되어 온 것 중 하나

는 Shannon의 표본화 이론의 sinc 함수이다^[1]. 그러나, sinc에 기반한 함수의 여러 가지 문제점으로 인해 sinc에 기반한 함수보다 수학적으로 다루기 쉬운 다항식에 기반한 함수가 사용되고 있다^[2]. 최근에는, B -스플라인 함수가 연속된 모델에 많이 이용되기 시작했다. 다항스플라인 처리에서, 알고리즘의 성능은 정해진 n 차의 연속 모델이 원 다항식을 얼마나 정확하게 재생해 내는가에 주로 의존한다^[3-4]. 높은 차수의 스플라인 모델이 영상 리샘플링에 더 잘 작용하지만 그것은 정보 손실을 최소화하도록 고안되지 않았기 때문에 최적인 결

* 正會員, 延世大學校 電氣電子工學科
(Dept. of Electrical & Electronic Eng. Yonsei Univ.)
接受日字: 2001年7月25日, 수정완료일: 2002年1月11日

과를 내지 않는다. 최근에, Unser 등^[5] 은 같은 종류의 스플라인 함수를 사용하지만 리샘플링하기 전에 연속적인 전필터를 통과시키는 리사이징 방법을 제안하였다. 이 알고리즘은 최소 제곱의 의미에서 최적 근사를 제공한다^[5]. 그러나 이 방법은 비정규 샘플 간격을 가지는 기하학적 변환이나 렌즈 왜곡 같은 공간 왜곡을 보정하는 리샘플링에는 적용될 수 없다. 대부분의 함수는 비선형 함수이므로 선형 기하 변환에 근거를 둔 이전의 방법으로는 이 문제를 해결할 수 없기 때문이다.

이 논문에서는 선형 변환에 근거를 둔 이전의 최적 리샘플링을, 비선형으로 변환된 영상을 원래의 샘플링 공간으로 직교 투사시킴으로써 비선형 변환에 근거를 둔 최적 리샘플링으로 확장한다. 이를 통해 기존의 리샘플링 방법으로는 접근할 수 없었던 응용 분야로까지 확장 가능성을 볼 수 있다.

II. 스플라인 다항식

2.1. 다항 스플라인 함수 공간

최적 리샘플링을 식으로 나타낼 때, 신호는 스플라인 다항식으로 표현될 수 있다. 이 함수는 추가로 평활화 조건(smoothing condition)을 갖는 n차의 구간 다항식이다. 다항식과 (n-1)차까지의 미분식은 연속적이어야 한다. 스플라인 함수 공간 S_1^n 은 다음과 같이 정의된다^[6].

$$S_1^n = \{s^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\beta^n(x-k) : c \in l_2\} \quad (1)$$

여기서 $\beta^n(x)$ 은 대칭적인 n차의 B-스플라인 함수이다. 모델을 데이터 값들에 맞추기 위해서, 먼저 $\{s^n(x)\}_{k \in Z}$ 을 보간하는 함수의 B-스플라인 계수를 구해야 한다. 주어진 데이터열 $s^n(x)$ 은 계수와 이산 스플라인의 이산 컨볼루션과 비슷한 연산으로 나타내어질 수 있다.

$$s(k') = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)\beta_n(k'-k) \quad (2)$$

$k' = 0, 1, 2, \dots, N-1$

여기서 N은 주어진 데이터열의 수이다. 이 식은 다음과 같이 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$s_1 = B_1 c_1 \quad (3)$$

여기서

$$B_1 = \begin{bmatrix} \beta^n(0) & \beta^n(1) & \dots & \beta^n(N-1) \\ \beta^n(1) & \beta^n(0) & \dots & \beta^n(N-2) \\ \beta^n(2) & \beta^n(1) & \dots & \beta^n(N-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^n(N-1) & \beta^n(N-2) & \dots & \beta^n(0) \end{bmatrix}$$

$$s_1 = [s(0) \quad s(1) \quad s(2) \quad \dots \quad s(N-1)]^T$$

$$c_1 = [c(0) \quad c(1) \quad c(2) \quad \dots \quad c(N-1)]^T \quad (4)$$

이다. B_1 에서 B-스플라인 함수의 대칭성을 이용하였다. 행렬 B_1 은 토플리츠(Toeplitz)행렬이며 정방 행렬이다. 이 경우, 계수들은 다음과 같이 간단히 구해진다.

$$c_1 = B_1^{-1} s_1 \quad (5)$$

행렬 B_1 의 구조적인 특성으로 인해 B_1^{-1} 를 구하는데 Levinson 알고리즘과 같은 빠른 알고리즘이 사용될 수 있다. 이 경우, 일반적인 행렬의 역행렬을 구하는 것보다 훨씬 빠르게 역행렬을 계산할 수 있다. 스플라인 함수의 좀더 일반화된 근사화를 위해서, 변환함수 $\gamma(x)$ 에 의존하는 비정규 샘플값을 갖는 다음의 일반화된 스플라인 함수를 정의하였다.

$$S_r(x) = \{s_r^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k)\beta^n(r(x)-k) : c_r(k) \in l_2\} \quad (6)$$

2.2. 힐버트 공간에서의 근사 문제

벡터 해석으로부터, $\|e(x)\| = \|s(x) - \hat{s}(x)\|$ 을 최소화하기 위해서 신호 $s(x)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s(x) = \sum_{i=1}^m c_i p_i(x) + e(x) = \hat{s}(x) + e(x) \quad (7)$$

여기서 $p_i(x)$ 은 특정 함수 공간에서의 기저 함수 중 하나이고 c_i 은 그에 해당하는 계수이다. 근사 오류 $\|e(x)\|$ 을 나타내는 노름이 내적으로부터 유도되면 최소화 조건을 직교 조건에 의해 나타낼 수 있게 된다. 최소 노름 오류는 직교 투사 이론에 의해 각각의 p_j 에 수직이어야 한다.

$$\left\langle s(x) - \sum_{i=1}^m c_i p_i(x), p_j(x) \right\rangle = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

이 식으로부터 다음의 m 개의 변수를 가진 m 개의 식을 유도할 수 있다.

$$Rc = p \quad (9)$$

여기서

$$R = \begin{bmatrix} \langle p_1(x), p_1(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_1(x) \rangle \\ \langle p_1(x), p_2(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_2(x) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle p_1(x), p_m(x) \rangle & \cdots & \langle p_m(x), p_m(x) \rangle \end{bmatrix}$$

$$p = [\langle s(x), p_1(x) \rangle \quad \langle s(x), p_2(x) \rangle \quad \cdots \quad \langle s(x), p_m(x) \rangle]^T$$

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_m]^T \quad (10)$$

이다. 이와 같은 모양의 식은 정규(normal) 식이라고 알려져 있다. Eq.(10)의 행렬 R 은 그레미안 행렬이라고 한다. 이 행렬과 관련된 유용한 이론은 다음과 같다.

Theorem 2.1 그레미안 행렬 R 은 항상 반양정의(positive-semidefinite)이다. 또한 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ 이 선형적으로 독립적일 때 양정의(positive-definite)이다^[7].

3장에서 위의 이론을 이용하여 그레미안 행렬 R 의 역행렬이 존재함을 증명하게 된다.

III. 최적 비정규 리샘플링

3.1. 변환된 스플라인 근사화에서의 최적 계수 구하기
우리는 변환함수 $\gamma(x)$ 에 의해 기하변환된 비정규 샘플링점에 관심을 두고 있으므로, 다음과 같은 가변 구간 길이 $\gamma^{-1}(x)$ 를 갖는 n 차의 스플라인 공간을 정의할 수 있다.

$$S_r^n = \{s_r^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) : c_r(k) \in l_2\} \quad (11)$$

$s_1^n(x) \in S_1^n$ 함수가 주어지면, L_2 공간에서 최소의 오류 근사 $s_r^n(x) \in S_r^n$ 을 찾으면 된다. 패러미터 $c_r(k)$ $c_r(k)$ 을 갖는 오류 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$e(c_r(k)) = \|s_1(x) - s_r(x)\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1(k) \beta^n(x-k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) \right) dx \quad (12)$$

최적 계수를 얻기 위해서, 최소 제곱법이 사용되어진다^[6]. $e(c_r(k))$ 의 구배(gradient)를 0으로 둬으로써 n 번째 계수를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial e(c_r(k))}{\partial c_r(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) \right) (\beta^n(r(x)-n)) - 2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1(k) \beta^n(x-k) \right) \beta^n(r(x)-n) dx$$

이 구배 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_r(k) \beta^n(r(x)-k) \right) \beta^n(r(x)-m) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1(k) \beta^n(x-k) \right) \beta^n(r(x)-m) dx$$

선형 표현식에서 이산합과 적분의 순서를 바꾸고 $c_i(k)$ 와 $c_r(k)$ 의 샘플 개수를 N_i 와 N_r 로 제한하면 위의 식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{N_r-1} c_r(k) \int_{-\infty}^{\infty} \beta^n(r(x)-k) \beta^n(r(x)-m) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N_r-1} c_r(k) \beta^n(x-k) \right) \beta^n(r(x)-m) dx \quad (13)$$

최적 변환된 계수는 다음의 행렬식으로부터 얻을 수 있다.

$$K_r = A, c_r \quad (14)$$

여기서

$$A_r = \begin{bmatrix} a(0,0) & \cdots & a(0, N_r-1) \\ a(1,0) & \cdots & a(1, N_r-1) \\ a(2,0) & \cdots & a(2, N_r-1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(N_r-1,0) & \cdots & a(N_r-1, N_r-1) \end{bmatrix}$$

$$c_r = [c_r(0) \quad c_r(1) \quad \cdots \quad c_r(N_r-1)]^T$$

$$K_r = [K_r(0) \quad K_r(1) \quad \cdots \quad K_r(N_r-1)]^T \quad (15)$$

이고,

$$\begin{aligned}
 a(n, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta^3(r(x) - k) \beta^3(r(x) - n) dx \\
 Kr(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_r^3(x) \beta^3(r(x) - n) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \beta^3(x - k) \right) \beta^3(r(x) - n) dx
 \end{aligned}$$

이다. 표기의 간단함을 위하여 스플라인의 차수를 3으로 하였다. 이론2.1로부터, 변환공간 S_r^n 의 기저 함수가 선형적으로 독립적이므로 행렬 A_r 은 역행렬이 존재한다. 따라서, 다음과 같이 최적 스플라인 근사의 계수를 구할 수 있다.

$$C_r = A_r^{-1} K_r \quad (16)$$

이러한 개념은 2차원으로 쉽게 확장될 수 있다. 주어진 공간 $S_r^n(2D)$ 에서의 신호 $s_r(x, y)$ 의 최적 근사를 구하려면, 위에서 언급한 것과 같은 비슷한 선형식을 통해 계수 $c_{r,n}(x_k, y_k)$ 를 결정할 수 있다.

3.2. 구현

주어진 샘플값 $s_1(k)$ 를 스플라인 함수의 계수 $c_1(k)$ 로 바꾸고 제안된 알고리즘에 의해 다시 $c_1(k)$ 을 변환된 샘플값 $s_r(k)$ 으로 바꾸는 과정이 필요하다. 이 과정은 카디널(cardinal)스플라인 표현에 의해 구현될 수 있다. 제안된 전체 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 주어진 샘플값 $s_1(k)$ 으로부터 직접 B-스플라인 변환 Eq.(5)에 의해 B-스플라인 계수 $c_1(k)$ 를 구한다.
- 2) Eq.(16)에 따라서 최적 비정규 리샘플링을 수행한다.
- 3) 최적 스플라인 근사의 계수를 Eq.(3)과 비슷한 간접 B-스플라인 변환으로 최적 샘플값으로 변환한다.

IV. 비정규 리샘플링의 응용

4.1. 로그함수의 의한 영상 변환

이 알고리즘은 다음의 로그 함수에 의해 결정된 비정규 리샘플링 샘플값에 적용될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 r_x(x, y) &= 100 \log(7x + 200) \\
 r_y(x, y) &= 100 \log(7y + 200)
 \end{aligned} \quad (17)$$

그리고 역변환은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 r_x^{-1}(x, y) &= 0.005 \left(\exp\left(\frac{x}{100}\right) - 200 \right) \\
 r_y^{-1}(x, y) &= 0.005 \left(\exp\left(\frac{y}{100}\right) - 200 \right)
 \end{aligned} \quad (18)$$

Fig.1 과 Fig.2는 알고리즘을 적용했을 때의 결과를 나타낸다.

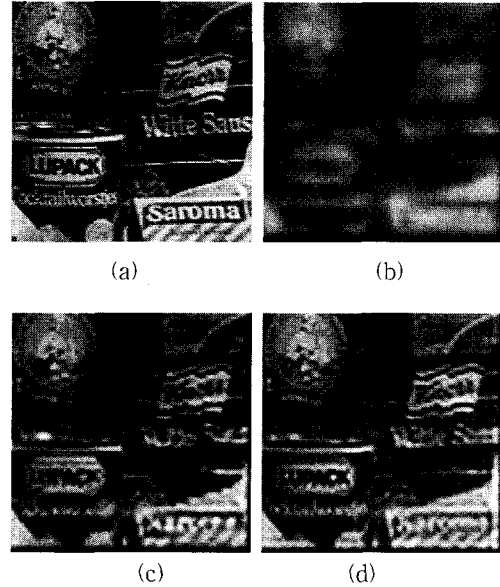


그림 1. 10번의 연속적인 변환과 역변환을 적용한 쇼핑 영상 (a) 원 영상 (b) 선형보간법을 이용한 영상 (c) 3차 스플라인 리샘플링을 이용한 영상 (d) 비정규 3차(cubic) 스플라인 리샘플링을 이용한 영상

Fig. 1. shopping image after ten successive transformations and inverse transformations: (a) Original shopping image (b) Bilinear interpolation (c) Cubic spline resampling algorithm (d) Non-uniform optimal resampling algorithm.

4.2. 카메라 모델링에 의한 영상 변환

바늘구멍(pinhole) 모델은 가장 널리 사용되는 카메라 모델이다^[8]. 3D 점을 2차원의 영상 평면으로 투영시키는 작용은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X \\ \lambda - Z \\ \lambda Y \\ \lambda - Z \\ \lambda Z \\ \lambda - Z \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 λ 는 렌즈의 초점 거리를, (x, y, z) 와 (X, Y, Z) 은 각각 카메라와 사물의 좌표 시스템을 나타낸다. 여기서 우리는 두 좌표 시스템이 서로 맞추어져 있지 않은 일반적인 문제를 고려하였다. θ 의 패닝(Panning)과 α 의 기울기(tilting)가 가능한 받침 위에 카메라가 올려져 있다고 가정하자. 즉, 패닝은 x 와 X 축이 이루는 각도이며, 기울기는 z 와 Z 축이 이루는 각도이다. 사물 좌표의 중심으로부터 받침대의 중심까지의 거리는 (X_0, Y_0, Z_0) 로 나타내었다. 이 패러미터 값들로부터, 변환 함수는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다

$$\begin{aligned} x &= \lambda \frac{A(X - X_0) + B(Y - Y_0) + C(Z - Z_0)}{\lambda - (I(X - X_0) + J(Y - Y_0) + K(Z - Z_0))} \\ y &= \lambda \frac{E(X - X_0) + F(Y - Y_0) + G(Z - Z_0)}{\lambda - (I(X - X_0) + J(Y - Y_0) + K(Z - Z_0))} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= \cos\theta - \sin\theta \sin\alpha, \quad B = \sin\theta + \cos\theta \sin\alpha, \\ C &= -\cos\alpha, \quad E = -\sin\theta \cos\alpha, \quad F = \cos\theta \cos\alpha, \quad G = \sin\alpha, \\ I &= \cos\theta + \sin\theta \sin\alpha, \quad J = \sin\theta - \cos\theta \sin\alpha \end{aligned}$$

이며 $K = \cos\alpha$ 이다. 이러한 변환으로부터, 다음과 같이 카메라 모델링의 2차원 변환식을 이끌어 낼 수 있다

$$\begin{aligned} r_x(x, y) &= \lambda \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0)}{\lambda - (I(x - x_0) + J(y - y_0))} \\ r_y(x, y) &= \lambda \frac{E(x - x_0) + F(y - y_0)}{\lambda - (I(x - x_0) + J(y - y_0))} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 x 와 y 는 원래 영역에서의 변수이며, $r_x(x, y)$

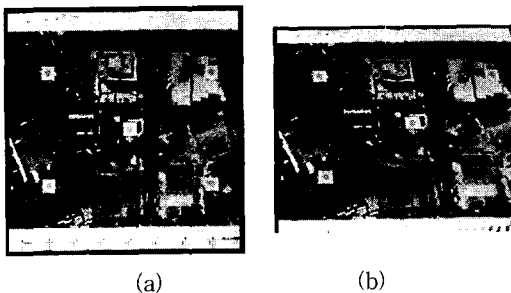


그림 2. (a) 원래의 항공 사진 (b) 카메라 모델링에 의해 변환된 영상

Fig. 2. Original aerial image (b) The image transformed by camera modeling.

와 $r_y(x, y)$ 는 2차원 변환 함수이다. 두 좌표 사이의 변환식이 비선형이므로 변환하였을 때 데이터 값들이 비정규적으로 분포하게 된다. 따라서 이러한 응용 분야에 제한한 알고리즘을 적용할 수 있다. Fig. 3은 Eq.(21)에 의해 결정된 변환된 결과 영상을 보여주고 있다.

V. 결 론

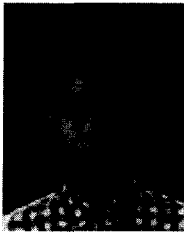
수많은 영상 처리의 응용 분야중에서, 주어진 원래의 데이터로부터 재구성된 데이터를 비정규적으로 리샘플링하는 일이 필요하다. 이러한 응용 분야는 여러 가지 기하 변환이나 공간 왜곡을 보정하는 일 등에서 자주 쓰이게 된다. 기존의 리샘플링 알고리즘들은 단지 정수 크기의 변환만을 위주로 제안되었기 때문에 위에서 언급한 응용 분야에 적용될 수 없었다. 본 논문에서는 비정규 리샘플링이 필요한 응용 분야를 위한 최적화된 알고리즘을 제안하였다. 여기서는 정규적으로 분포되어 있는 샘플값으로부터 비정규 분포된 정보를 이용한 연속 함수를 정의하였다. 다음으로, 이 연속 함수는 변환된 스플라인의 기저 함수로부터 형성된 변환 함수 공간으로 투사된다. 이 알고리즘은 정규 최적 리샘플링 알고리즘과 비슷하나, 단 본 알고리즘은 변환 함수 $r(x)$ 에 의존하는 수정된 샘플값을 이용한다는 점에서 다르다. 따라서 정규 최적 리샘플링 알고리즘은 비정규 최적 리샘플링 알고리즘의 특별한 경우로 볼 수 있다. 비정규 리샘플링 시스템은 선형 가변 변이(Linear Shift Varying) 시스템이므로 행렬-벡터 식으로 비정규 리샘플링 알고리즘을 구현하였다. 디지털 필터 표현식 대신 행렬-벡터 표현식을 사용하는 것이 더욱 효과적이다. 본 알고리즘에서 기하 변환 함수를 분석하는 부분과 계산량을 줄이는 부분에 대해 추후의 연구가 진행된다면 더욱 일반화된 알고리즘을 얻을 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise", Proc. I.R.E., vol. 37, pp. 10~21, 1949.
- [2] Michael Unser, "Splines : A Perfect Fit for Signal and Image Processing", IEEE Signal Processing magazine, November 1999, Vol. 16, No. 6.

- [3] F. Strang, and G. Fix, Constructive Aspect of Functional Analysis, Rome, Italy : Edizioni Cremonese, 1971.
- [4] C. de boor, Computation of Curves and Surfaces, Boston MA : Kluwer, 1990.
- [5] Michael Unser, Akram Aldroubi, and Murray Eden, "Enlargement or Reduction of Digital Images with Minimum Loss of Information", IEEE Trans. Image Processing, vol. 4, no. 3, pp. 247~258, March 1995.
- [6] I. J. Schoenberg, "Cardinal Interpolation and Spline Functions", J. Approximation of Theory, vol. 2, pp. 167~206, 1969.
- [7] Todd K. Moon and Wynn C. Stirling, Mathematical Methods and Algorithms, NJ : Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1999.
- [8] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods, Digital Image Processing, Addison-Wesley, 1993.

저 자 소 개



申 建 滉(正會員)

2000년 8월 : 연세대학교 기계전자 공학부 졸업(공학사). 2000년 8월~현재 : 연세대학교 전기전자 공학과 석사과정. <주관심분야 : 영상 리사이징>



李 學 茂(正會員)

1998년 2월 : 연세대학교 전자과 졸업(공학사). 2000년 8월 : 연세대학교 전기전자 공학과 대학원 졸업(공학석사). 2001년 2월~현재 : 미래에셋증권 근무.



姜 文 基(正會員)

1986년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1988년 2월 : 서울대학교 전자공학과 대학원 졸업(공학석사). 1994년 2월 : Northwestern University 졸업(공학박사). 1994년 10월 : Northwestern University Research Fellow. 1997년 2월 : University of Minnesota, Duluth 조교수. 1997년 3월~현재 : 연세대학교 전기전자 공학과 부교수. <주관심분야 : 초해상도 영상 복원 및 디지털 비디오 신호처리>