大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 12 卷 第 3號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.3, 389-408. Aug 2002

대학 미분방정식 교수 · 학습의 새로운 방향: RME 접근

권오남 · 신경희* · 신은주 · 김영신 · 최효진**

본 연구는 이화여자대학교에서의 미분방정식 수업을 통한 교수실험 연구의 일부로 대학수학, 특히 미분방정식에서 RME(Realistic Mathematics Education) 이론의 적용 가능성을 제시하고자 하는 개발연구이다. 연구의 목적은 RME의 이론적 틀을 대학 미분방정식에 적용하여 대학수학 교수-학습에서의 새로운 방향을 모색하고자 하는 것이다. 이를 위해 먼저 미분방정식의 발생적 과정을 살펴본 후 전통적인 미분방정식 교수의 문제점과 그 대안적 접근인 개혁미분방정식의 지향점을 분석하였다. 그리고 RME 이론과 개발연구방법을 토대로 미분방정식 학습에서 학생들의 사고과정과 사고방법의 기초를 세우고 정련하기 위한 교육과정과 교수설계에 대한 아이디어를 제공한다. 이 연구를 통해 RME원리를 반영한 교수 설계에서 학생들은 미분방정식에 대한 심층적인 이해를 할 수 있을 것으로 기대되며, 초등학교 중심으로 개발된 RME이론을 대학수학교육에 적용가능성을 탐색하였다는 것에 이 연구의 의의가 있다.

Ⅰ. 서 론

최근 수학교육에서는 수학적 지식의 본질과 수학교육의 목표에 대한 시각, 수학교육 연구 동향에서 근본적인 변화가 이루어지고 있다. 수학학습은 실제적인 상황에서 시작해야하고, 학생과 교사와의 상호작용이나 학생들간의 상호작용을 통해 학생들이 해결과정을 스스로 발명하고 구성하는 것을 강조하고 있는데 이러한 변화된 관점은 RME의 철학과 많은 공통점을 가지고 있다.

RME 철학은 경험적으로 실제적인(experientially real) 맥락문제를 통해 학생들의 비형식적인 해결전략과 해를 고려하는 안내된 재발명에 초점을 두고 있다. 초등학교와 중등학교의 수학학습에서는 이러한 RME의 이론적 관점을 가지고 교수설계(instructional design)를 한 후 그 효과를 분석한 많은 연구들이 존재한다. 정영옥(1997, 1999, 2000)은 여러 가지 함수 현상을 학생들이 접하게 하여 그에 대한 심상이 구성되어 이를 바탕으로 함수에 대한 정의를 재발명하게 할 것을 제안하였다. 또한 RME 기하의 특징은 우리가 사는 공간을 탐구해 지각 적으로 구조화하는 반면 우리 나라 교육과정에서는 입체도형의 모양을 다룰 때에 주변의 물건들이 제공되는 공간을 고려하지 않는 문제점을 제시하였다.

경험적으로 실제적이라는 것은 학생들이 지적으로 활동할 수 있기 위해 일상적인 상황뿐 아니라 수학적 지식의 토대 또한 경험적으로 실제적이어야 한다는 것을 의미한다. 따라서

* 이화여대
** 이화여대대학원

RME에 기반 한 수학학습연구는 초등수준에서 뿐만 아니라 중·고등학교수준을 포함한 대학 수준에서도 가능하다. 이러한 시각을 가지고 이 연구는 대학수준에서 RME에 기반한 교수 설계를 하여 그 효과를 분석하고자 하였다.

최근 미분방정식 교수에서는 미분적분학의 개혁결과와 테크놀로지의 발달로 미분방정식의 질적인 접근과 수치적 접근을 강조하는 개혁미분방정식을 추구하였다. 그러나 미분방정식의 개혁노력은 Rasmussen(1999)이 지적한 바와 같이 학습 초기부터 그래프적·수치적 방법을 사용한다면 학생들은 그래프적·수치적 아이디어의 재발명과 구성과정에 참여하지 못한 채 무의미한 기호조작을 하는 것에 그치게 되며 이는 전통적 접근과 크게 다를 바가 없다. 따라서 이 연구는 RME의 이론적 틀을 대학수학에서 미분방정식에 적용하여 대학수학 교수학습에 새로운 방향을 탐색하고자 한다.

이를 위해 먼저 RME 이론에 대한 이론적 분석으로 시작하고, 전통적으로 지도해왔던 대학미분방정식 수업의 문제점을 지적한 후에, 그에 대한 대안으로 제시되어온 개혁지향 미분방정식이 RME의 이론적 틀에 부합되는지를 고찰하였다. 마지막으로 그에 따라 전통적인 미분방정식 수업에서 강조해온 절차적, 기호적 조작과 암기된 분석적 공식과는 다른 접근으로 RME 이론을 따르는 미분방정식 교수설계의 한 예시를 제시하였다.

II. RME의 기본원리

RME는 '인간활동으로서의 수학'에 그 뿌리를 두고 있다. 기본 원리는 안내된 재발명, 교수학적 현상학, 발생모델이며, 이러한 세 가지 기본 원리는 점진적인 수학화를 통한 재발명을 강조한 Freudenthal의 철학에 기반을 두고 있다 (Gravemeijer, 1997).

첫째, 점진적 수학화를 통한 안내된 재발명 원리에서는 맥락문제가 점진적 수학화의 토대가 된다(Freudenthal, 1991). 학생들은 맥락문제를 토대로 경험적으로 실제적인 상황으로부터 비형식적인 해결 전략을 개발해 나간다. 이 때 '실제적'이란 학생들에게 경험적으로 실제적인 상황에 있는 수학적 지식의 토대를 언급하는 것이므로 맥락문제가 반드시 일상생활의 상황을 다룰 필요는 없다. 중요한 것은 문제가 상황화되는 맥락 내에서 학생들이 지적으로 활동할 수 있게 하기 위해 맥락이 학생들에게 경험적으로 실제적 이어야 한다는 것이다(Gravemeijer, 1997).

따라서 학생들의 비형식적 전략을 시작점으로 택하여 학생들로 하여금 수학의 발생과정과 유사한 과정을 경험하면서 점진적인 수학화에 의해 더 형식적인 전략을 재발명 하도록 안내하는 일이 중요하다. 이 때 이미 정의된 구조를 제시하지 않고 수학적 지식을 개발하는 과정으로 안내하는 방법에 대한 문제가 제기될 수 있다. Treffers(1987)에 의하면 다음의 다섯 가지 구체적인 원리를 통해 안내된 재발명 원리가 구현될 수 있다. 첫째, 맥락문제의 사용이다. 학생들이 지적으로 이해하여 다룰 수 있는 맥락에 모든 문제를 놓아서, 맥락 문제를 형식적 조작과 기호가 기반하는 시작점이 되게 한다. 둘째, 수직적 도구에 의한 연결이다. 수직적 도구의 역할을 하는 모델과 전략이 문제해결과정에서 발생되고, 발생된 모델과 전략은 직관적인 비형식적 전략으로부터 보다 추상적인 절차로 발달하며, 직관적 수준과 형식적 수준사이의 차이를 연결해 준다. 셋째, 학생들의 구성활동이다. 학생들은 구성 활동을 통해 수학화 과정의 핵심적인 역할을 함으로써 형식적

인 수학적 개념, 연산, 구조를 학습해간다. 따라서 학생 자신의 구성으로부터 새로운 전략이 만들어지고 자신의 구성활동에 대한 반성적 사고가 촉진될 수 있다. 넷째, 상호작용이다. 학생들의 비형식적 방법은 대안적 전략을 토론하고 반성하는 구성적 학습과정의 필수 요소가 된다. 다섯째, 학습영역(learning strands)의 연결이다. 학습영역은 분리된 실체로서 다뤄지지 않으며, 서로 연관되고 통합되어 수학적 지식과 기능이 하나의 구조화된 전체로 조직된다. 이러한 Treffers의 제안은 결국 학생의 관점에서 시작하여 반성, 토론, 그리고 다양한 해결을 해나가는 학습자 중심의 학습과정을 통해 점진적 수학화 과정이 이루어진다는 것이다.

RME의 두 번째 기본원리는 교수학적 현상학이다. Freudenthal(1983)의 교수학적 현상학에서 수학적 개념의 현상학이란 개념이 조직하는 현상과 수학적 개념 사이의 관계를 교수학적 측면에서 논하는 것이다. 교수학적 현상학을 따르기 위해서는 점진적 수학화 과정을 위해 수학이 적용되는 상황이 조사되어야 한다. Gravemeijer(1994a)에 의하면 교수현상학의 목표는 개념을 조직하여 수직적 수학화를 촉진할 수 있는 상황을 찾는 것이다. 즉, 현상학적 방법을 통해 현상과 본질의 관계가 교수학적 측면에서 논해짐으로써 교실에서 만들어질 수 있는 현상학적으로 적절하며 학생들에게 실제적인 상황을 찾는 것이 교수학적 현상학의 목표라 할 수 있다.

셋째 원리는 발생모델이다. 이는 학생들이 그들의 비형식적 수학활동의 기호모델을 창조할 수 있다는 것이다. Gravemeijer(1994a)에 의하면 비형식적 상황에서 만들어진 상황의 모델(model of)에서 수학화를 통해 만들어진 추론을 위한 모델(model for)로의 전이는 Ernest(1991)가 언급한 '주관적인 수학 지식의 발생(genesis)과 유사하다.[1] 상황의 모델로부터 추론을 위한 모델로의 전이 단계에서 일반화, 추상화, 그리고 실재화를 통한 수학적 지식의 발생과정을 찾아볼 수 있다. Gravemeijer(1997)는 비형식적 지식과 형식적 수학사이의 차이를 메꾸어 주는 역할을 하는 발생모델은 학생들에게 친근한 상황의 모델이 만들어진 후 일반화와 형식화 과정을 통해 다음과 같은 네 수준을 거쳐서 수학적 추론을 위한 모델로 만들어진다고 주장한다.

첫째, 상황적 수준(situational level)은 상황적 지식과 전략이 상황의 맥락, 즉 주로 학교외부의 상황적 맥락 내에서 사용되는 수준으로 학생들은 주어진 과제의 상황에서 활동하면서 문제를 해결하는 방법을 이해한다. 둘째, 참조적 수준(referential level)에서의 모델과 전략은 문제, 주로 학교내부의 상황에서 구성된 문제에 묘사된 상황에 주목한다. 이 때 학생들에게 경험적으로 실재적인 구체적 상황을 기반으로 하며, 모델은 상황과의 관계로부터 수치적 의미를 추출하고 상황 수준의 해결전략에 대응하는 비 형식적인 전략을 뒷받침하는데 사용된다. 셋째, 일반적 수준(general level)에서는 맥락에 대한 참조보다는 전략에 대한 수학적 초점이 우세하게 된다. 따라서 모델의 역할이 변하고 전략은 수학적 시각으로 보아 더 이상 문제상황과의 관계에 의존하지 않는다. 모델은 보다 일반적인 특징을 얻고 수학적 추론을 위한 기초로 더 중요하게 되어 형식적 수학 수준을 위한 참조적 기초가 된다. 또한 학생들은 상황과 독립적인 해석 및 해결을 요하는 일반적 활동

---

1) *Ernest*는 주관적인 수학적 지식은 개념과 성질의 정교화(elaboration), 세련화(refinement)를 포함하는 수평적 과정과 일반화, 추상화, 실재화(reify)를 포함하는 수직적 과정에 의해 발생된다고 제시하였다(Ernest, 1991).

을 통해 추론을 위한 모델을 만들어 나간다. 넷째, 형식적 수준(formal level)에서는 형식적인 절차와 표기를 가지고 수행을 하는 기호화가 이루어진다. 상황의 모델에서 추론을 위한 모델이 개발되어 가는 과정에서 알 수 있듯이 RME가 지향하는 교육은 학생들의 비 형식적 해결 가운데 발생하는 모델이 형식적 수학을 위한 참조적 토대가 되는 상향식 접근(bottom up approach)을 취하고 있음을 알 수 있다.

이상에서 RME의 핵심 원리 세 가지를 고찰해 보았다. 학생들에게 경험적으로 실제적인 현상을 제시해 주어 교사의 안내에 의해 상황 모델에서 추론모델로의 발생단계를 거치면서 학생들 스스로 수학적 구조를 재 발명하게 하는 것이 곧, 인간 활동으로서의 수학을 경험하게 되는 과정이다. 그러나 여기서 고려해야 할 점은 RME원리를 실현하기 위한 교육을 설계할 때 학생들이 스스로 재 발명하게 하는 것과 학습과정을 교사가 안내하는 것 사이에서 갈등이 존재할 수 있다는 것이다. 다음절에서는 교육과정을 이행할 때 일어날 수 있는 이러한 갈등을 해결하기 위해 사고실험(thought experiment)[2]과 교수실험(teaching experiment)[3]이 순환적으로 행해지는 개발연구(developmental research)[4]를 사용한 RME 교수설계에 대해 고찰해 보고자 한다.

Ⅲ. 개발연구를 통한 RME 교수설계

수학교육에 대한 시각의 변화는 개인이 구성한 수학적 실제의 발달에 참여하는 것을 학생의 핵심 역할로 보아 학생들의 추론을 분석하는데 관심을 두고 있다. 동시에 수학활동의 사회 문화적 측면을 인정하여 학생들의 활동이 교실 소문화 내에 위치하는 것으로 보게 되었다. 또한 이론과 실행 사이의 반사적 관계를 강조해서 이론이 실행을 통해서 나오고, 실행에 근거해서 피드백 되는 관계에 초점을 두게 되었다(Cobb, 2000). Cobb는 이러한 대안적인 관점을 발생관점(emergent perspective)이라 부르고, 학습은 능동적인 개인의 구성과 수학의 문화화(enculturation)의 과정으로 특징지을 수 있다고 언급하였다. 즉, 학생들의 수학적 활동을 사회적으로 상황화된 것으로 봄으로써 심리적 접근만을 취하는 시각을 초월한 것이다. 이러한 관점이 함의하고 있는 바는 RME 이론을 기반으로 한 교수를 설계할 때 학생들의 구성적 활동과 교실전체의 사회적 활동은 서로 반사적으로 이루어지는 활동임을 알게 해 준다. 따라서, 학생들은 경험적으로 실제적인 맥락하에서 자신의 수학활동을 재조직함과 동시에 교실 공동체가 세우는 규범과 수행에 참여하게 되는 것이다.

2) 사고실험은 교사가 지도에 앞서서 수업과 관련된 모든 사고를 미리 거치는 학습방법으로서 아동의 사고활동을 무엇보다 중시하면서 상상 속에서 학생들과 대화하고 토론하며 수업을 진행시키는 방법이다.
3) 학생들의 머리 속에서 이루어지는 실제의 수학적인 작용과 수학을 가르치는 환경에서 학생들이 수학을 구성하는 과정을 알기 위해서 고안된 연구방법이다. 연구자가 학생의 수학에 대한 가정을 하고 학생들과 직접적인 상호작용을 통해 가정했던 것을 확인하는 방법이다.
4) 개발연구는 이론적 요소와 경험적 요소를 포함한다. 교육이론에 의해서 안내 받는 교육개발과 계획단계와 해석적 틀에 의해 안내 받는 연구단계가 반사적으로 싸이클을 이루면서 장기간에 걸쳐 진행된다.
5) 이론과 실험 사이의 반사적 관계 내에서 진행되는 교수실험을 통해 국소적 교수 이론이 개발된다. 분수, 지필 알고리즘, 행렬, 미분 등에 대한 국소적인 교수 이론을 가지고 국부적인 이론이 구체화된다.

이러한 시각을 가지고 학생의 수학활동과 학습환경에서의 상호작용 모델을 만들기 위해 Simon(1995)은 교수실험을 통해서 가상학습궤도(hypothetical learning trajectory)를 설계하였고, 네델란드에서는 개발연구를 통해 국소적 교수이론(local instruction theory)[5]을 개발하였다. 가상학습궤도는 교사의 학습목표, 학습활동에 대한 교사의 계획, 학습과정에 대한 교사의 가설로 구성된다. 이 학습궤도를 통해 교사는 실제적인 교수학습과정이 학생의 가상된 학습궤도와 어느 정도 일치하는지를 분석하여 학생의 사고과정에 대한 개념화를 이해하게 된다 (Simon, 1995). 가상학습궤도는 교수실험을 통해 만들어지게 되는데 이러한 교수실험의 주목적은 연구자가 학생의 수학학습과 추론을 경험하는 것이다. 학생들이 스스로 구성한 수학을 연구자와의 상호작용을 통해 해석함으로써 학생들의 수학에 대한 모델을 만든다(Steffe, Thomson, & von Glasersfeld, 2000). 이러한 교수실험은 가설을 형성해서 실험하고 재구성하는 재귀적 사이클을 통해 개념적 분석과 이론적 분석이 순환된다. 이 과정은 Gravemeijer(1994b)가 기술한 개발연구 사이클과 많은 방법에 있어서 유사하다. 개발연구 사이클은 교수이론에 기반한 교수개발과 계획단계 및 경험적 방법론에 기반한 연구단계의 순환으로 구성된다.

RME 이론을 토대로 한 교수를 설계하기 위해 사고실험과 교수실험이 순환적으로 이행되는 개발연구는 Freudenthal(1991)의 교수개발에 대한 철학을 반영한 것이다. 개발연구에서 교수실험 과정은 교사와 학생 사이의 상호작용을 통해 경험적으로 실제적인 맥락문제를 탐구하는 것으로 이루어진다. 따라서, 학생의 자율권이 유지되면서 학생의 비형식적인 해결이 더 정교한 수학적 해결로 정당화된다. Cobb(2000)에 의하면 수학학습과 수학에 대한 유사한 본질에 기초를 둔다는 점에서 발생관점과 RME 이론은 양립 가능하다. 즉, 교수실험과 개발연구는 모두 수학이 인간의 창조적 활동이고 수학학습은 문제를 해결하고 상황에 대처하는 효율적인 방법을 개발하며 수학적 실체를 낳는 중에 수학적 발달이 이루어진다는 것을 전제로 하고 있다.

교수실험을 분석한 결과 연구자는 학생들이 스스로 재발명 하는 과정과 교사가 학습을 안내하는 과정을 중재한 접근을 취하게 된다. 결국 교수실험을 통한 개발연구는 이론적 분석을 수행하고, 이 분석결과에 기초한 교수를 수행하고, 질적·양적 데이터로부터 교수효과를 평가하고, 이론적 관점을 수정해 나가는 교육연구방법이다. 따라서, 사고, 학습, 교수를 이해하는 이론적 관점을 가지게 할 뿐 만이 아니라 인지의 측면과 다양한 교육형태의 결과를 서술할 수 있게 해주는 교육적 의의를 가진다 (Schoenfeld, 2000).

수학 교수·학습을 재 고려할 때 교육 연구자들은 학생의 개념화, 학생이 학습하는 방법에 대한 확고한 이해를 필요로 한다. 따라서 개발연구를 통해 수학이 학습되고 가르쳐지는 방법에 대한 이론을 만듦과 동시에 교수 설계를 개선할 수 있을 것이다. 이상에서 고찰한 RME 이론과 개발연구방법을 토대로 하여 대학 미분방정식 수업을 설계하기 위한 것이 본 연구의 목적이다. 이를 위해 다음절에서는 먼저 미분방정식의 발생적 과정을 살펴본 후 전통적인 미분방정식 교수의 문제점과 그 대안적 접근인 소위 개혁지향 미분방정식의 지향점을 분석함으로써 미분방정식 교수의 RME이론 접근 가능성을 모색한다.

Ⅳ. 미분방정식의 역사

1. 미분방정식의 발생과 그 전개 (17 - 18세기)

미분방정식의 연구는 17세기 후반 뉴턴으로부터 시작되었다. 천문학에서 이전의 연구들은 단지 행성의 운동에 초점을 두었던 것에 비해 뉴턴은 천체운동사이의 관계에 초점을 두었으며, 이러한 물리적 현상을 미분방정식으로 표현하고 미분방정식으로부터 현상을 이해하였다 (Hubbard & West, 1991). 양에 대한 정보를 직접 주는 방정식을 통해서라기 보다는 변화율 방정식을 분석함으로써 간접적으로 천체운동 (양, quantity)에 대한 정보를 얻는 이러한 전이는 Kuhn(1970)에 의해 과학혁명의 한 예시로 언급되었다.

수학자들은 물리적인 문제들을 해결하기 위해 미분적분학을 사용하였고, 곧 새로운 종류의 문제를 다룰 필요성에 직면하게 되었다. 단순한 문제들은 초등함수(elementary functions)로 구할 수 있는 구적법(quadratures)으로 해결되었고, 타원적분(elliptic integral)과 같이 보다 어려운 문제들은 초등함수로는 표현될 수 없는 구적법으로 환원되었다. 그러나, 복잡한 어떤 문제의 해를 구하기 위한 특별한 기술이 요구되었고 그 결과 미분방정식이 발생하게 되었다 (Kline, 1972). 이 시기에는 미분방정식 그 자체를 해석함으로써 해에 대한 종합적 정보를 얻으려 하기보다는 미분방정식의 해에 대한 명백한 공식을 발견하여 해석적 해를 구하려 하였다.

뉴턴은 프린시피아(1687)에서 미분방정식의 해를 구성하였지만, 이를 해석적 형식으로 변환하고자 하는 일련의 노력은 18세기에 점진적으로 행해졌다(Klein, 1972). 18세기 중반까지 미분방정식은 독립적인 주제가 되었지만 방정식의 해를 구하는 것 그 자체가 목적이었다. 이 때 해에 대해 추구하는 성질은 점차적으로 변하였는데, 처음에는 해를 초등 함수의 식으로 보았고 곧 초등함수로서 해결되지 않는 구적법으로서 해를 표현하는 데 만족하였으며, 초등 함수와 구적법으로 해를 발견하는 것에 실패했을 때는 무한 급수로서 해를 구하였다 (Kline, 1972).

요약하면 미분방정식은 미분적분학을 사용하여 복잡한 물리적 문제들을 해결하기 위해 발생하였지만, 실제로 대부분의 미분방정식은 단순한 구적법으로 환원시키기가 어려우며, 그 해를 구하기 위해서는 적당한 치환이나 연산을 필요로 한다. 따라서 18세기에는 정확한 미분방정식을 다루기보다는 간단한 조작을 통해 극히 단순화된 미분방정식을 다룸으로써 해석적 공식과 닫힌 형식의 해를 추구하였고 이를 위해 극히 간단한 방법에 의해서 풀 수 있는 미분방정식으로 변환하고자 노력했다.

2. 미분방정식의 질적인 연구(19세기)

19세기의 미분방정식은 더욱 폭넓게 연구되면서 어떤 조건에서 풀이가 가능한지에 대한 문제가 제기되었다. 이러한 해의 존재성에 대해 코시는 두 가지 해결방법을 제시하였는데 첫 번째는 합의 극한으로 적분을 도입한 오일러 방법과 근본적으로 일치한다. 즉, 오일러의 연구를 바탕으로 미분방정식에 의해 근사값 방법을 이용하는 방법을 보이고 근사 풀이법을 증명하였는데 이 때 해의 유일성에 대해서도 언급하였다. 두 번째 방법은 Brio와 Bouquet가 정리한 형태로 가장 잘 알려졌지만 코시가 '극한 계산(calcul des limites)'이라 불렀던 급수해법(majorants)으로 첫 번째 방법보다 폭넓은 이용이 가능한 일반화된 방법이었다(Klein, 1972).

한편 이 시기에는 미분방정식에 대한 깊은

이론적 연구가 행해졌는데, 18세기 후반 푸앵카레는 문제에 대한 본질적인 특성을 밝혀내고, 이를 지속적으로 조사함으로써 한 문제의 다양한 측면을 질적으로 연구하였다. 그는 다루기 힘든 복잡한 미분방정식을 해결하기 위해 보다 간단한 형태로 환원했던 전통적인 시도보다는 풀이법의 본질을 정면으로 다루고자 하였다. 또한 푸앵카레는 행성의 움직임, 행성의 안정성, 위성의 궤도를 나타내는 운동미분방정식의 주기적 해에 대한 조사를 하는 새로운 접근을 하였는데 이를 위해 비선형 미분방정식을 다루었다. 이 때 해에 대한 식 없이 해의 움직임을 이해하고자 하였으며 미분방정식 그 자체를 조사함으로써 미분방정식을 기하적으로 해석하였는데 그는 이러한 자신의 접근법을 질적 이론이라 불렀다(Kline, 1972).

푸앵카레 이후의 상미분방정식과 편미분방정식 연구는 대부분 물리학적인 응용과 관계가 있고 특히 천체역학과 n체 문제에 관련되어 있으며, 비선형 미분방정식에 대한 관심은 20세기에 한층 더 확고해져서 그 적용이 천문학으로부터 정보, 자동조절장치, 전기에 대한 문제로 확장 이동하고 있으며 이에 대한 연구 또한 질적인 국면에서 양적인 조사로 이동하고 있다(Kline, 1972).

3. 현재의 미분방정식

미분방정식의 질적인 연구는 푸앵카레부터 계속되어 왔지만 단지 조사수준과 적용수준에 그쳤다. 미분방정식의 도입부터 질적인 분석을 강조하는 대신 미분방정식의 대수적 해가 주요 주제가 되었으며, 많은 대학의 미분방정식 과정은 전형적인 요리책과 같이 다양한 유형에 대한 분리된 지필 기술을 다루어왔다. 또한, 1계 미분방정식에 대한 해함수의 분석적 공식이 개념발달의 시작이 되었고 과학과 공학의 많은 실제적인 응용을 포함하였지만 수치적 방법은 거의 존재하지 않은 채 대부분 다양한 미분방정식의 해에 대한 형식적인 미분공식을 다루어왔다(Kallaher, 1999; Kline, 1972; Boyce, 1994). 그러나, 문제의 해를 구하기 위해 필요한 대수적 연산을 개발하고 수행하기 위한 노력은 학생들로 하여금 대수적 계산에는 능숙하게 하였지만, 해로부터 결론을 이끌어 내거나 수학적 용어로 문제를 공식화하는 기술을 개발하지 못하도록 하였다. 또한 대부분의 미분방정식은 어떤 기본적인 닫힌 형식의 공식으로서 해결되지 않으며, 수학적 기본개념 특히 미분방정식의 해에 대한 질적인 이해를 하지 못하는 결과를 가져왔다. 그러나, 최근에는 컴퓨터의 발달로 해의 움직임을 포함하는 질적인 이슈들과 수치적 방법의 도입이 가능하게 되었다.

4. 개혁미분방정식 교수학습의 지향점

전통 교실에서 수행되어 온 기호조작을 강조하는 절차적 접근은 학생들이 공유된 수학적 지식을 구성하기 위해 정신적으로 행동하는 것을 중요시하지 않았다. 따라서 수학은 탈개인화되었고 수학활동은 탈맥락화 된 활동이 되었다(Cobb & Yackel, 1998). 이러한 전통적 접근에서 학생들은 대학 미분방정식 수업에서도 문제해결을 위해 암기된 절차를 사용하였고 미분방정식의 정확한 해를 구하는 분석적 공식이 미분방정식의 개념발달을 위한 시작점이 되어왔다.

이 같은 문제의식을 가지고 전통 미분방정식 수업을 개혁하려는 노력은 미분방정식을 만드는데 토대가 되는 수학과 물리적 절차 모두를 강조하는 질적인 관점에서 대수적, 수치적, 그래프적으로 미분방정식을 이해하기 위해 수업

내용과 교수법에서 변화를 시도하였다. 또한 미분방정식과 역동적인 체계(dynamic system)를 탐구하는 능력을 가진 컴퓨터를 사용하여 실세계의 변화를 기술하는 실제적인 모델을 통해 해의 움직임을 조사하는 것이 가능하게 되었다.

미분방정식의 개혁 운동은 1983년 Aritique와 Gautheron이 저술한 Systems Differential, Etude Graphique에서 개혁의 첫 시도를 찾을 수 있다 (Habre, 2000). Blanchard(1994)는 컴퓨터와 그래픽계산기를 사용하여 근사해 그래프를 그리고, 이를 해석하고 정당화하는 것에 대한 중요성을 논했으며, 같은 관점에서 Hubbard(1994)는 전통적인 상미분방정식 수업에서는 학생들이 미분방정식의 해가 무엇을 표현하는지에 대해 이해하지 못하므로 컴퓨터그래픽의 도움으로 해의 움직임을 추측하고 초기조건을 변화시켰을 때의 패턴 변화를 발견할 수 있다고 논하였다.

질적인 측면의 중요성은 Boyce(1994, 1995), Borrelli와 Coleman(1997), Branton과 Hale(1999)에 의해서도 강조되었다. Boyce는 미분방정식은 기본적인 함수로 표현될 수 없는 해를 가지므로 수치적, 그래프적인 방법으로 해를 해석하고 해의 장기적인 움직임(long term behavior)을 결정하고, 초기 조건과의 관련성을 결정하는 개념적인 이해를 얻기 위해서 그래픽계산기나 기호 조작자(symbolic manipulator), world wide web의 사용을 추천하였다. Borrelli와 Coleman은 시각화가 미분방정식의 역동적인 측면을 이해하는데 필수적임을 밝히고, 곡선의 기울기로 미분을 이해하고 그래프를 해석할 수 있으며 그래프에서 해의 장기적인 움직임과 평형상태와 같은 중요한 정보를 해석할 수 있다고 주장하였다. Branton과 Hale은 미분방정식을 이해하는 수단으로 기울기장(slope field)의 사용과 컴퓨터 테크놀러지를 사용한 시각화의 강조를 제안하였다. West(1999)도 테크놀러지를 사용함으로써 실세계 현상과 개념 사이의 연결을 통해 학습자는 학습한 수학적 아이디어의 실제 소유자가 될 수 있다고 그 의의를 언급하였다.

이상에서 고찰한 바와 같이 미분방정식의 개혁 노력은 정확한 해 함수를 찾는 특수한 기술을 강조하는 전통적인 접근에서 벗어나 근사해를 찾고 해 함수의 움직임을 탐구하기 위해 테크놀러지를 사용하여 분석적, 수치적, 그래프적 방법의 통합을 제안하고 있다. 그러나 Resmussen (1999)에 의해서 지적되었듯이 그래프적, 수치적 방법이 학생의 학습 초기부터 사용된다면 개혁이 지향하는 바는 전통적인 접근과 다를 바가 없다. 또한 전통적인 접근처럼 학생들은 그래프적, 수치적 아이디어의 재발명과 구성 과정에 참여하지 못하게 된다. 즉, 기울기장이나 오일러 공식을 사용하는 것은 이미 만들어진 기호 체계를 단지 분석적으로 접근하지 못하여 테크놀러지의 도움으로 수치적, 그래프적으로 사용한다는 점에서 전통적인 접근에서 크게 개선된 것이 없다는 점이다.

그러므로 미분방정식의 개혁을 주장하는 연구들의 지향점을 교육에 반영하기 위해서는 분석적, 수치적, 그래프적 표현이라는 외적인 수학적 표현(external representation)이 학생들의 정신적 이미지와 관계된 표상 즉, 내적인 표현 (internal representation) 과정의 참조를 통해 발생되어야 한다. Janvier(1987)등에 의하면 내적인 표현은 기의(signified)의 영역 안에 있는 것으로서 학생들의 심상(mental image)에 대응하는 것이고, 외적인 표현은 기표(signifier)의 영역 안에 있는 것으로서 수학적 실체를 외적으로 표현하기 위한 상징적 조직자 즉, 기호, 스키마, 다이어그램 등에 해당한다. 이러한 기호의 발생 과정은 곧, RME의 기본 원리 중의 하나인 상황모델에서 추론모델로의 발생과정이

함의하고 있는 바와 일맥상통 하다고 볼 수 있다.

이러한 기호의 발생 과정이 함축하고 있는 바를 반영하여 미분방정식에서 학생들의 수학적 아이디어와 기호의 발생 과정에 대한 연구를 통해 미분방정식의 새로운 교육과정과 교수방법을 제안한 연구는 개혁을 제안한 연구에 비해 그 수가 많지 않다(Rasmussen, 1997, 1999, 2000, 2001; Habre, 2000).

Habre(2000)는 학생들이 1계 상미분방정식을 풀기 위한 수단으로 기울기장을 사용하는가, 이러한 기울기장으로부터 정보를 읽는데 성공하는가, 그리고 기호적, 그래프적, 수치적 표현간의 전이 능력이 있는가를 연구하였다. 연구자는 학생들의 수학적 사고에서 변화를 기대하였지만, 학생들은 기호적 표현이 그래프적 표현이나 수치적 표현보다 중요하고 유용하다고 생각하는 경향이 있었다. 기울기장을 그려서 평형해를 확인한 학생들이 대수적으로 미분방정식을 풀어서 평형해를 구하는데 실패하거나 변수분리법을 사용하여 분석적으로 해를 구한 학생들이 기울기장을 보고 해의 장기적인 움직임이나 평형해를 발견하지 못한 것으로부터 Habre는 학생들이 시각적, 분석적으로 사고하는 것이 필요함을 제안하였다.

같은 시각에서 Rasmussen은 학생들의 사고와 기호 사용을 분석하여 수학적 개념에 대한 학생들의 추론방식을 개선하고 학생의 수학적인 발달을 지지할 수 있는 학습과정을 검토할 필요성을 가지고 연구를 행하였다. Rasmussen은 RME의 교수설계 이론과 기호화에 대한 활동 지향적 관점을 가지고, 학생들이 미분방정식의 수학적 아이디어와 방법의 재발명 과정을 연구하였다. 이에 따라 미분방정식의 역사적 발달을 생각하여 변화율의 맥락과 해의 성질을 고려하며, 양에 대한 정보를 얻도록 하기 위해 비선형 미분방정식으로부터 학습을 시작하게 하고, 경험적으로 실제적인 맥락으로서 순간변화율을 미분방정식의 아이디어와 방법 개발의 시작점으로 택하였다. 즉, 학생들에게 경험적으로 실제적인 것의 출발점으로 두기 위해 수학사를 사용한 역사적 조사와 학생들이 가진 비형식적 해 전략과 설명에 대한 조사를 통해 학생들의 현재 앎의 방식을 고려함으로써 RME의 안내된 재발명 원리를 반영하였다. 또한 학생들로 하여금 자신의 비형식적 활동의 기호적 모델 즉, 발생모델을 만드는 활동에 참여하도록 함으로써 RME 이론과 일관된 교수활동 계열을 통해 수학적 아이디어를 재발명 하도록 하였다. 그는 RME 교수이론, 기호화에 대한 이론적 시각, 학생 사고의 분석을 토대로 미분방정식에서 개혁을 개념화하는 접근을 서술함으로써 수학화에 초점을 두어 현재의 개혁지향 접근을 보완하였다.

미분방정식의 개혁을 위한 이상의 연구노력들을 분석한 결과 앞 절에서 고찰한 RME 이론의 기본원리와 부합되는 지향점을 찾을 수 있다.

첫째, 안내된 재발명이 이루어지기 위해서 맥락문제를 사용하여 학생 스스로의 탐구와 구성을 통한 비형식적인 학생들의 수학에서 의미의 협상과 토론을 통한 형식적인 수학으로의 발달이 강조되고 있다. 인구 성장률, 전염병의 전파율, 약의 희석율과 같은 실세계 현상의 변화를 표현하는 방정식을 통해서 미분방정식의 해 함수에 대해 탐구하는 개념화를 강조하고 기호 표현이나 공식보다는 기호가 발생되어 나오는 과정에 주안점을 둔다.

둘째, 학생들은 맥락문제를 해결하기 위한 현상의 모델을 만든 후에 추론을 위한 모델로 발전시켜 나가는 과정을 경험할 수 있다. 기울기장, 위상도(phase plot), 분기도(bifurcation diagram)등이 학생들이 미분방정식의 해를 탐구하기 위해서 고안하게 되는 모델들이다. Kallaher (1999)에 의하면 이러한 모델은 실세계와 수학적 세계 사이의 연결성을 시각적으로 제시해주는 역할을 하며, 미분방정식의 해가 시간이 지남에 따라서 평형상태에 가까워지는지의 여부, 장기적인 해의 움직임에 있어서의 변화, 초기 조건의 변화에 따른 해의 민감성 등의 해의 질적인 움직임을 탐구할 수 있게 해 준다. 그러나 중요한 것은 추론을 통해 해 함수에 대한 사고방식이 전이하는 과정 즉, 상황모델에서 추론을 위한 모델로의 전이 과정이지 단지 외적으로 표현되는 이들 수학적 모델이 아니다.

예를 들어 인구수의 변화를 표현하는 미분방정식 $\frac{dP}{dt}=kP$ 의 탐구에서 상황적 수준에서는 변화율을 경험적으로 실제적인 맥락으로 해석하고, 먼저 이산적인 추론에 기초해서 기울기장을 가지고 수치적인 활동을 한다. 다음 참조적인 수준에서는 기울기장을 상황모델로 사용해서 근사적인 해 함수를 찾기 시작한다. 일반적인 수준에서는 특수 상황에 독립적인 해석에 초점을 두어 이산적인 근사에 참조를 두지 않고 특수해 함수나 특수 변화율에 기초해서 해석하기 보다 전체적으로 변화율과 해 함수를 해석한다. 이 때에 수학적 맥락의 모델로 역할을 하는 기울기장에서 더 형식적인 복잡한 추론을 위한 모델인 위상도 그림이 만들어진다. 형식적 수준에서는 기호적 표기를 사용해서 분석적 기술로 정확한 해를 구하며 해를 해석한다.

셋째, 학생들의 비형식적, 직관적 기호화와 추론 방식이 타인에게 의사소통 되는 중에 수학적 아이디어를 재발명하는 의미 있는 수학학습이 가능한 교실규범이 세워지게 된다. 실세계의 변화를 내포한 변화율 식을 가지고 활동하는 동안 변화율에 대한 개념적 이해를 촉진하여 수학적 아이디어가 재발명 되는 기회를 주는 수업 방식은 수학이 인간의 활동이라는 규범적 이해를 하게 하는 의의를 가진다. Yackel(1998)등이 제안한 바와 같이 미분방정식의 해가 공식에 의해 만들어진다는 교사의 일방적인 설명이 아니라 학생들의 해석과 접근을 듣고 진보하도록 중재하고, 소그룹 토론과 전체 학급 토론을 통해서 추론을 설명하고 정당화하고 타인의 사고를 이해하도록 노력하는 사회 수학적 규범이 형성되는 수업 방식이 강조되어야 한다.

Habre의 연구는 이미 발명된 미분방정식 해에 대한 기호적, 그래프적, 수치적 표현간의 전이 능력을 조사하였던 것에 반해. 이 연구에서는 학생들의 해의 재 발명 과정을 연구한 것이다. Rasmussen은 RME이론에 따라 경험적으로 실제적인 맥락을 미분방정식 학습의 출발점으로 택해 학생의 사고와 기호의 발생과정을 연구하였다. 이 연구는 상황의 모델에서 추론모델로의 전이과정에서 나타나는 네 가지 활동 수준으로 기호 발생과정을 나누어 학생들의 추론과정을 분석하였다.

Ⅴ. RME의 이론에 따르는 미분방정식 교수설계의 예시

17세기 뉴턴에 의해 행성의 움직임 즉, 물리적 현상을 표현하기 위해 미분방정식의 연구가 시작되었다. 따라서 이 연구에서는 미분방정식의 역사발생을 따라 RME의 안내된 재발명 원리를 반영한 교수설계를 하였다. 그러나 미분방정식의 해를 구하는 역사적 발생원리에 따르면 분석적 접근에서 질적인 접근을 따르고 있다. 그러나, 이 연구는 해를 구하는 과정에서 질적인 접근으로부터 분석적 접근을 따랐다.

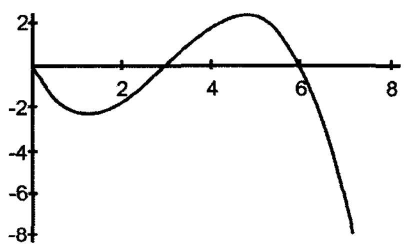
이는 이해를 위한 학습 과정의 재발명 과정을 따르고자 한 것이다.

이 장에서는 전통적인 미분방정식 수업과 개혁미분방정식 수업이 지닌 문제점을 해결하기 위해 RME 접근을 따르는 미분방정식 교수설계의 한 예시를 제시하고 이를 발생모델의 설계발견술에 따라 설명하였다. [표 1]은 16주 동안의 교수학습내용이며, 이 장에서는 9차시에 학생들이 보여준 발생모델의 네 가지 수준을 분석하였다. 다음은 9차시에 학생들이 탐구한 활동지의 맥락문제이다:

곤충의 수변화는 미분방정식

$\frac{dN}{dt} = -N(N-3)(N-6)$으로 나타낼 수 있다. dN/dt의 그래프가 아래와 같을 때 다음의 초기 조건에 따른 미래의 곤충 수를 예측하고 그 과정을 설명하여라.

① N(0)=2, ② N(0)=3.
③ N(0)=4, ④ N(0)=7



〔그림 1〕 *dN/dt* 그래프

위의 예시는 안정성과 해의 장기적인 움직임 사이의 연결성에 대한 학생들의 이해를 알아볼 수 있는 대표적인 문항이다. 이 예시를 통해 1절에서는 발생모델을 만드는 과정에서 나타나는 학생들의 추론과정을 Ⅱ장에서 제시한 네 가지 활동 수준으로 구분하여 설명하고, 2절에서는 교사에 의해 안내된 재발명하에 발생모델의 발달과 함께 나타나는 기호화 단계를 도식화하고 설명하고자 한다.

1. 상황모델(model - of)에서 추론모델(model - for)로의 전이에서 나타나는 네 가지 활동 수준

RME이론과 관련된 이전의 연구들(Gravemijer & Doorman, 1997; Gravemeijer et. al., in press; Stephan, 1998; Underwood & Yackel, 1997)에서 상황모델과 추론모델의 전이는 학생들의 활동을 네 가지 활동 수준 즉, 상황적, 참조적, 일반적, 형식적 수준으로 나눔으로써 뚜렷해질 수 있다는 것을 보여왔다. 이러한 네 수준은 엄밀한 체계를 의미하기 위한 것이 아니라 발달적인 진행과정을 묘사함으로써 학생들의 추론과정을 설명하기 위해 고려된다. 이 글의 논의는 9차시에 해당하는 활동이므로 이미 학생들은 해에 대한 다양한 질적인 접근법을 배운 상태이다. 따라서 네 가지 활동수준은 선형적인 위계를 가지고 나타나지 않았고 학생들에 따라 다양한 활동수준이 나타났으므로 교사는 전체교실토론을 통해 학생들이 모두 이 네 가지 수준을 이해하도록 안내하였다.

(1) 상황적 수준

이 수준에서 학생들은 변화율을 경험적으로 실제적인 맥락으로 해석함으로써 변화율 방정식을 사용하는 방식을 이해한다. 즉, 미래의 곤충 수를 근사하기 위해 기호적, 그래프적으로 제시된 변화율방정식을 사용하는 방법을 이해하는 것이다. 한편 수치적 활동은 이산적 추론의 기반이 되므로, 학생들의 활동이 해 함수들에 대한 이산적 추론에 기반을 둔다면 기울기

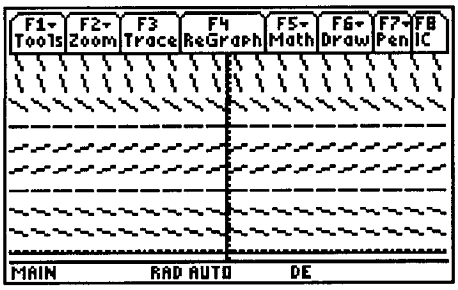
[표 1]

차시	worksheet 제목	학습내용
1-2	포식자 - 포획자	실세계 현상을 모델링한 미분방정식의 계수 의미, 그래프 해석
2	물고기 수 예측	오일러 방법의 그래프적 아이디어
3-5	정순이와 재모의 방법	변수분리법, 자율미분방정식에서의 오일러 방법, Slope field
4-5	Population Growth-Limited Resources	1계 미분방정식에서의 오일러 방법
5	Generalizing Your Method	오일러 방법의 일반화
6-7	Slope Fields	위상평면(Slope fields)에서 해곡선의 기하학적 해석, 해석적 증명, 미분방정식의 해의 의미
7-8	Cooling Coffee	변화율, 미분방정식 자체의 해석, 초기치 문제, 일반해, 특수해
8-9	Flow Line	흐름선(flow Line)
9	How many Insects?	time-series plot, flow Line, slope field, sink, source, node
10-11	Fish Harvesting	미분방정식을 통한 모델링, 그래프해석, bifurcation diagram
11	A Leaky Bucket	미분방정식을 통한 미래예측, 변수분리, slope field
11	해의 유일성 정리	해의 존재성과 유일성 정리
12	선형미분방정식	선형미분방정식의 해석적 방법
13	중간고사	
14-15	토끼와 여우	연립방정식에서 평형해 의미, phase portrait, time-series plot
15-16	협력적 종과 경쟁적 종	nullclines, direction field, direction fieldf에서 오일러 방법
16-17	평면에서의 벡터, 평형해	일차독립, 일차종속, 연립방정식에서 평형해의 기하적 의미, 평행해와 행렬식간의 관계
17-18	용수철	연립미분방정식의 해곡선, 평형점, 행렬식과의 관계
18-22	직선해	직선해의 기하적 · 대수적 의미, 특성방정식, 고유치, 고유벡터
22-23	흔들리는 초고층 빌딩	평형해 의미, 위상평면(phase plane)에서 해곡선
23	Analysis of a Linear System, Further Analysis of a Linear System	선형연립미분방정식의 고유치에 따른 위상평면의 모양, 대수적 해
24	Summarizing Your Results	선형연립미분방정식의 고유치(허근일 경우 포함)에 따른 위상평면의 모양, 대수적 해, 상황에 적용
25	기말고사	

장을 가지고 하는 행동은 상황적 수준에 있는 것으로 볼 수 있다. 예를 들어, 정순이는 이 문제에 대한 자신의 접근법을 다음과 같이 설명하였다:

(문제에 제시된 그래프를 칠판에 다시 그린 후 이를 가지고 설명)...1에서 기울기가 ....음수니까... (기울기장에 기울기를 표시하면서)기울기가 밑으로 되면서 제일 크게 그려지고, 나머지는 이제 이 사이는 증가하고 이 사이는 감소하니까 3과 4사이는 조금씩 이렇게....(기울기장에 증가하는 양의 기울기들을 표시한다).

정순이는 곤충의 미래 수를 근사하기 위해 그래프적으로 제시된 변화율 방정식을 해석하였고 제시된 그래프로부터 이산적으로 추론한 기울기들을 기울기 장에 표현함으로써 미래의 곤충 수를 예측하고자 하였다. 이러한 정순이의 활동은 상황적 수준에 속하며 다음 그림은 정순이가 칠판에 그렸던 기울기장을 TI-92그래픽 계산기로 표현한 것이다.

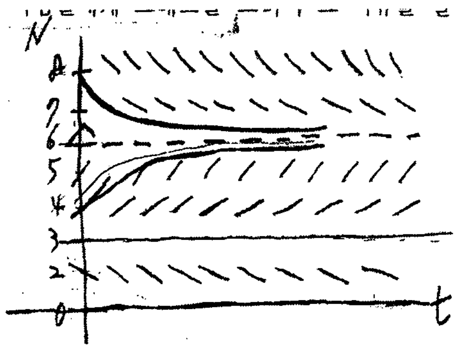


[그림 2] 미분방정식 $\frac{dN}{dt} = -N(N-3)(N-6)$ 에 대한 기울기 장

(2) 참조적 수준

이 수준에서는 상황모델이 경험적으로 실제적인 환경인 학생들의 이해에 기본이 된다. 즉 참조적 수준에서는 변화율의 방정식이 경험적으로 실제적인 환경으로 여겨진다. 특히, 기울기장에서의 참조적인 활동은 근사해함수와 정확한 해함수사이를 구별하고 이를 관련지음으로 시작하는데, 여기에서 정확한 해를 찾기 위한 분석적 기술이 중요한 역할을 하며 이 때 TI-92 그래픽 계산기는 기울기장이 학생의 추론을 돕는 도구로서 사용되도록 도울 수 있다. 즉 이 수준에서는 모든 가능한 점에서의 변화율을 나타내기 위해 기울기장을 가지고 활동하며 기울기장의 짧은 접선들을 연결하여 연속적인 해 함수를 발견하려고 추론한다. 예를 들면 정순이는 다음과 같이 언급하면서 기울기장에 연속적인 해그래프를 그렸다:

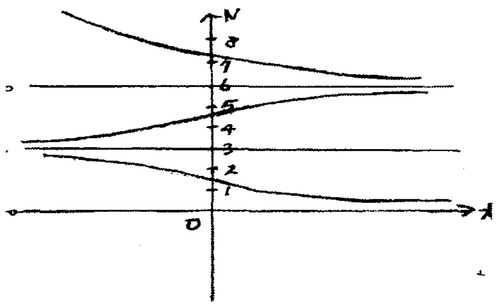
그래프를 그린 그릴 때 여기...초기값이 N(0)=2인 그래프를 그릴 때는 (그래프에서 점 2를 가리키며) 여기서 출발해서 여기가 1이니까 여기서부터는 계속 기울기가 감소하잖아요. 그러니까 바로 이렇게 그려지고 위에는 이렇게 그려질 거고....



[그림 3] 정순이가 그린 해 그래프

이와 같이 상황모델인 기울기장(해그래프)은 경험적으로 실제적인 환경인 미분방정식의 이해에 기본이 된다. 그러나 이 수준에서는 해함수를 해를 이산적인 근사나 특정한 해함수로 이해하고 아직 해를 다양한 해함수의 모임으로

생각하는 개념화가 이루어지지는 못하였다. 위의 정순이가 그린 그래프와 다음의 주희가 처음에 그린 그래프와 같이 해그래프를 많은 곡선으로 그리지 않고 평형해에 대한 수평선과 세 개의 곡선만으로 그린 것은 이를 반영한다.



[그림 4] 주희가 처음에 그린 해 그래프

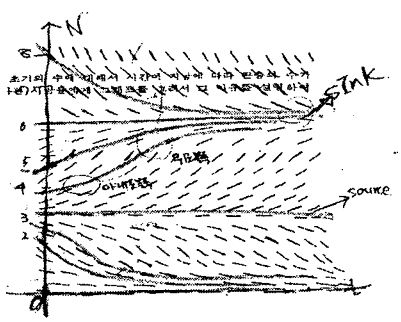
(3) 일반적 수준

일반적 수준에서는 추론 모델을 통하여 특수한 상황과 독립적으로 해를 이해하고 설명할 수 있다. 미분방정식의 해함수를 이산적인 변화율이나 특정한 해함수로 설명하는 것이 아니라 전체적인 해함수들과 전체적인 변화율로서 해석한다. 혜준이의 다음 진술은 해함수를 전체적인 변화율로서 해석한 것을 암시한다:

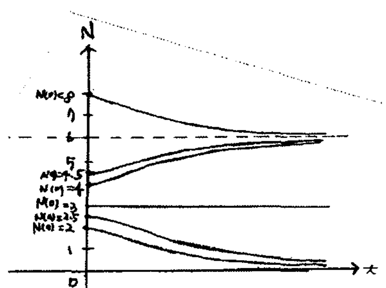
.... N(곤충의 수)이 0이랑 3사이 일 때는요 ... dN/dt이 점점 줄었다가 (손으로 가리키며).... 그러니까 값이... (값에 해당하는 해 그래프를 그리며 설명한다).이렇게 이제 점점 줄다가 그게 점점 감소하다가 또 ... 그리고 3이랑 6사이에는 또 그게 이렇게 감소하니까(3과 6사이의 그래프를 그린다) 이렇게 되고, 6이상일 때는 dN/dt이 계속 감소하니까 (6이상에 그래프를 그린다.) 이런 식으로 그래프가 그려진다 고 생각했거든요?

혜준이는 변화율에 대한 추론을 통해 초기 곤충수가 0보다 크고 3보다 작을 때 변화율은 감소한다는 것을 발견하였으며, 이를 통해서 초기 조건이 0과 3사이에 있을 때의 모든 가능한 해 함수를 생각했음을 알 수 있다. 즉 초기 조건이 0과 3사이에서 모든 가능한 해함수를 고려함으로써 해함수들의 집합을 하나의 실체로 보고 모든 해함수의 장기적 움직임을 하나의 단위로서 분석하게 된다. 따라서, 이 수준에서는 하나의 특수한 해 함수에 초점을 맞추는 것에서 해의 장기적 움직임을 분석하는 것으로의 초점의 전이가 이루어지고 이로부터 해에 대한 안정성과 불안정성을 결정할 수 있게 된다.

한편 이 수준에서는 참조적 수준에서와 달리 많은 해함수들을 그림으로써 자신이 그린 곡선들을 대표적인 해곡선으로 이해했다는 것을 암시한다.



(a)

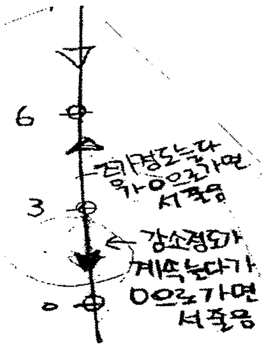


(b)

[그림 5] 주미가 그린 해그래프(a)와 주희가 그린 해그래프(b)

(4) 형식적 수준

전통적인 표기를 형식적으로 사용하는 수준으로 이는 일반적 수준의 활동과 구분하게 해주는 유용하고 중요한 활동이다. 이 수준에서 학생들은 다음과 같은 위상선을 가지고 역동적 활동을 한다.



[그림 6] 주미가 그린 위상선

Gravemeijer(2000)등에 의하면 상황모델에서 추론모델로의 전이는 Sfard(1991)가 언급한 실재화 과정과 유사한 것으로 이 때의 수학적 활동의 실재화는 기호화 자체가 아니라 모델을 가지고 추론하고 행동하는 과정이 실재화 된다는 것이다. 또한 상황수준에서 형식적 수준으로의 전이과정은 엄격히 순서화된 위계를 포함하는 것이 아니라고 강조하였다. McClain 과 Cobb(1998)는 일반적 활동에서의 토론과 형식적인 기호를 통한 추론에서의 토론은 참조적 활동이나 상황에서의 활동까지도 포함한다고 언급하였다. 이는 Pierie와 Kieran(1994)이 수학적 수행과 개인의 이해의 발달은 재귀적이고 여러 수준의 절차로 나타난다고 주장한 것과 일맥상통한 것이다. Pierie와 Kieran에 의하면 이해의 성장 과정은 역동적이고 조직적인 과정으로서 근원적인 지식(primitive knowing)에서부터 이미지를 만들고 형식화와 구조화를 거쳐서 발명에 이른다. 이 때, 각 단계들은 서로 이웃하는 층으로 이루어져 있으며 각 층들은 앞 단계의 층을 포함하고 있고, 각 층들 사이를 전후로 움직이면서 이해의 과정이 성장하게 된다. 이들의 주장은 결국 Freudenthal(1983)이 교수학적 현상학에서 설명한 바와 같이 학생들의 수학화 과정이 현상과 본질의 교대 작용에 의한 불연속적인 수준상승 과정임을 밝히고 있는 것이다.

2. 미분방정식에서 기호의 발달을 나타내는 기호화 체인(chain of significtion)

기호화는 수학적 실제의 발생에서 중요한 역할을 한다. Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain 과 Whitenack(1997)은 실제로부터 시작하여 기호화를 하기 위해 기호화 체인을 구성하였으며, Rasmussen (1999)은 이러한 기호화 체인을

- 기호 $_4$
  - 기호 $_3$/ 기의 $_4$
    - 기호 $_2$/ 기의 $_3$
      - 기호 $_1$/ 기의 $_2$
        - 기의 $_1$ 변화율 근사
        - 기표 $_1$ 기울기장(*slope field*)
      - 기표 $_2$ 정확한 해함수
    - 기표 $_3$ 위상선(*phase line*)
  - 기표 $_4$ 분기도(*bifurcation diagram*)

[그림 7] 미분방정식에서 기호의 발달을 나타내는 기호화 체인(Rasmussen, 1999)

RME의 발생모델에 대한 설계발견술과 관련지어 미분방정식에서 기호의 발달을 나타내는 기호화 체인을 다음과 같이 구성하였다.

기호화 체인에서는 기의와 기표 사이의 의미론적 관계가 고려되며 체인이 구성됨에 따라 기호의 의미가 발달함을 알 수 있다. Walkerdine (1988)에 의하면 비형식적 표기와 개념 즉, 기표와 기의의 조합으로 기호를 만들게 되며 이때 기호가 발달하면서 체인이 구성되고 다시 기호의 의미가 계속 발달되어 간다. 한 특수한 실행에서 시작하는 기의$_1$은 기표$_1$과의 조합으로 기호$_1$을 만들고, 기호$_1$은 계속되는 다른 실행에서 기표$_2$와의 조합으로 기호$_2$를 만들게 된다. 따라서 위의 기호화체인에서 기호$_1$ (변화율 근사/기울기 장)과 기표$_2$(정확한 해함수)사이의 상호작용적 연결을 구성하는 것은 이산적 근사해의 상황모델을 가지고 연속적인 해함수를 만드는 것에 대응하며, 기호$_2$와 기표$_3$ (위상선)사이의 연결을 구성하는 것은 해함수들의 모임으로서의 추론모델을 가지고 위상선을 확립하는 것에 대응한다. 이러한 기호화 체인은 기호적 절차의 구성을 통한 학생의 수학적 발달을 설명해주는 것으로서 기호가 새로운 기표를 만들기 위해 기의되는 기표와 기의 사이의 의미론적 관계를 찾을 수 있다.

한편 기호화 체인에서 기호는 과정과 대상의 이중성을 띄고 있다. 이는 곧 수학적 개념은 조작적 성질과 구조적 성질의 이중성을 가진다는 Sfard(1991)관점과 기호의 이중적 역할 즉, 과정(process)과 개념(concept)으로서의 역할을 설명하기 위해 "procept"을 소개한 Tall(2000)의 관점과 일맥상통한다고 볼 수 있다. 결국 이들의 관점으로부터 기호는 과정에서 대상으로의 일방적 선형성이 아니라 과정이 대상에 통합될 수도 있음을 알 수 있고, 수학화를 통해 수준이 상승되면서 기호가 발달되어감을 알 수 있다. 이러한 체인의 구성을 통한 기호의 발달은 상황모델에서 추론모델로의 전이과정과도 일치한다.

Ⅵ. 결 론

이 연구의 목적은 RME의 이론적 틀을 대학 미분방정식에 적용하여 대학수학 교수학습에서의 새로운 방향을 모색하고자 하는 것이다. 이러한 연구목적을 위해 먼저 RME의 기본원리와 개발연구방법을 고찰한 후 미분방정식의 역사적 발생과정을 살펴보았다. 이를 통해 정확한 해를 구하기 위한 분석적 공식만을 강조하는 전통적인 미분방정식 교수의 문제점과 그래프적, 수치적, 해석적 방법의 통합을 추구하는 개혁미분방정식의 지향점을 분석하고 그래프적, 수치적 접근의 무의미한 사용을 통한 개혁미분방정식의 한계를 지적하였다. 이러한 한계를 RME의 이론을 적용함으로써 해결할 수 있다는 가설 하에 RME이론에 따르는 미분방정식의 교수설계의 한 예시를 제공하였다. 이 연구는 이화여자대학교의 미분방정식 수업을 통한 교수실험연구의 일부이며, 대학수학, 특히 미분방정식에서 RME이론의 적용가능성을 제시하고자 하는 개발연구로서 미분방정식 학습에서 학생들의 사고과정과 사고방법의 기초를 세우고 정련시키기 위한 교육과정과 교수설계의 아이디어를 제공하고자 하였다.

또한 내용과 방법론이 분리되어 지도되고 있는 사범대 교육을 지양하고 내용과 방법이 통합된 사범대 교육과정을 추구함으로써 예비교사 교육의 새로운 방향을 제시하고자 한다. 이는 곧 교사들이 자신이 배운 방법을 반영하여 가르친다는 것을 고려해 예비교사의 현장적응

능력을 키우고자 함이다. 대학수학교육에 관한 연구는 한국은 물론 구미에서도 새로운 분야이다. 최근 한국에서 BK21사업이 초래한 결과 중 하나는 연구중심대학, 교육중심대학의 구분의 심화로 꼽을 수 있으며, 또한 학부제 등 학생 위주의 교육제도가 시행되면서 수학과 학생들의 모집이 어려워지고 있다. 그 결과 각 대학 특히 교육중심대학의 수학과의 존재성이 위기에 처해있다(이준열, 홍성표, 2000). 대학수학회에서 대학수학교육 분과가 새로 결성된 것과 함께 대학수학교육분야가 대한수학회 학술발표대회에서 2001년 가을 처음 추가 된 것도 당면 문제를 해결하기 위한 자구책으로 해석할 수 있다. 각 대학의 순수수학 교육 중심의 수학과의 교과과정에 대한 반성과 아울러 수학의 응용중심의 교과과정 개편방향으로 연구가 이루어지고 있다. 그러나 대학수학교육의 문제는 교과과정을 개편하거나 새 교과서를 저술하는 것만으로는 해결될 수 있는 문제가 아님은 자명하다. 대학수학교육의 교수-학습의 진정한 발전은 K-12에서 연구된 수학교육의 이론이나 관점을 고려함이 바람직하다. 이 연구는 초등학교중심으로 개발된 RME를 대학수학교육, 특히 미분방정식에 적용가능성을 탐색하였다는 것에 의의가 있다. 또한 미분방정식뿐만 아니라 적용 가능한 대학수학교육의 분야에 대한 후속연구가 필요하다.

참고문헌

정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 교육학 박사학위 논문.

정영옥(1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰-초등학교의 알고리듬 학습을 중심으로. 수학교육학연구, 제 9권 제 1호, 81-110.

정영옥(2000). 수학교육 연구동향-네델란드의 현실적 수학교육, 학교수학, 제 2권 제 1호, 283-310.

양영오 · 조윤동(2000). 수학의 역사 下. 경문사

이준열 · 홍성표(편저) (2000). 수학과 특성화 Model 개발. 포항공과대학교 .

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical *systems viewpoint. The College Mathematics Journal, 25*(5), 385-393.

Borrelli, R & Coleman, C. (1999). Modeling and visualization in the introductory ODE course. In M. Kallaher (Ed.), *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology*(pp.1-12). The Mathematical Association of American, 50.

Boyce, W. E. (1994). New directions in elementary differential equations. *The College Mathematics Journal 25*(5), 364-371.

Boyce, W. E. (1995). Technology in elementary differential equations. In L, Lum (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 65-74). Addison-Wesley Publishing Company.

Branton, M & Hale, M. (1999). A geometric approach to ODE. In M. Kallaher (Ed.). *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology* (pp.19-39). The Mathematical Association of American, 50.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger,

J. Voigt, & U. Waschesci (Eds.). *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge University Press.

Cobb, P. (2000). Conducting experiments in collaboration with teacher. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science. Lawrence Erlbaum Associates.*

Ernest, P. (1991). The philosophy of mathematics education. The Falmer Press.

Feudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structure. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H.(1991). Revisiting mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1994a). Developing realistic mathematics education. Utrect: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443-471.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrect: CD-β Press..

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), Symbolizing and communication in mathematics classrooms (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Habre, S. (2000). Exploring students strategies to solve ordinary differential equations in a reformed settings. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.

Hubbard, J. H. (1994). What it means to understand a differential equation. *The College Mathematics Journal, 25*(5), 372-384.

Hubbard, J. H., McDill, J. M., Noonburg, A., & West, B.H. (1994). A new look at the Airy equation with fences and funnels. *The College Mathematics Journal, 25*(5), 419-431

Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates.

Kallaher, M. (1999). Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology. The Mathematical Association of American, 50.

Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to modern times. New York: Oxford University Press.

Piere, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it.? *Educational Studies in Mathematics 26*, 165-190.

Rasmussen, C. (1997). Qualitative and numerical methods for analyzing differential equations: A case study of students understandings and difficulties. Doctoral dissertation, University of Maryland, College Park.

Rasmussen, C. (1999). Symbolizing and unitizing in support of students mathematics growth in differential equations. Paper presented at the 1999 NCTM Research Precession, San Francisco, CA.

Rasmussen, C., & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(2), 161-172.

Rasmussion, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students understandings and difficulties. *The Journal of Mathematics Behavior, 20,* 55-87.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society, 47*(6), 641-649.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Steffe, L., Thomson, P., & von Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science.* Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. et al. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 223-241.

Treffers, A. (1987). Three dimendions. A model of goal and theory description in mathematics education: The wiskobas project. Dordrecht: Reidel.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socio mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(4), 458-477.

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (1998). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *The Journal of Mathematics Behavior, 19,* 275-287.

Walkerdine, V. (1988). The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality. London: Routledge.

West, B. (1999). Technology in DE courses: my experience, student reactions. In M. Kallaher (Ed.). *Revolutions in differential equations: Exploring ODEs with modern technology* (pp.79-89). The Mathematical Association of American, 50.

New directions in the teaching and learning of differential equations: The RME approach

Kwon, Oh Nam · Shin, Kyung Hee (Ewha Womans University)
Shin, Eun Ju · Kim, Young Sheen · Choi, Hyo Jin (Ewha Womans University, Graduate School)

This paper is based on a teaching experiment research conducted in a differential equations course at Ewha Womans University. The purpose of this paper lies in seeking a new direction in the teaching and learning of college mathematics by applying RME's theoretical essence to the teaching of differential equations. For this purpose, the emergent procedure had to be carefully considered before to analyzing the existing problems in teaching differential equations and alternative access to reformed differential equations. Methods of deve- lopmental research, ideas concerning teaching procedure and instructional design are offered. This research demonstrates that a deeper understanding of differential equations by students can be achieved with the instructional design which reflects the RME theory.