

論文2002-39SC-2-1

초기 오차에 강인한 반복 학습제어 알고리즘에 관한 연구

(Study on an Iterative Learning Control Algorithm robust to the Initialization Error)

許慶茂*, 元光浩**

(Kyung-Moo Huh and Kwang-Ho Won)

요약

본 논문에서는 CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 방법이 수렴 성능의 향상과 외란에 대한 강인성 향상에 덧붙여 초기 오차가 있음에도 불구하고 이를 극복할 뿐만 아니라 기존의 알고리즘보다 더 빠른 수렴 능력이 있음을 확인한다. 또한 불안정한 결과를 낳는 높은 학습 계인의 경우에도 CITE를 추가한 본 학습제어 방법에 의해 안정화됨으로써, 빠른 수렴 특성과 강인성 향상을 가져올 수 있음을 보인다. 그리고 본 알고리즘을 선형 시변 시스템에 대해 적용한 시뮬레이션 결과를 통해 초기 오차의 극복 능력이 뛰어난 것을 확인하고, 아울러 각 학습 계인들이 수렴 속도와 안정성에 미치는 영향을 상세히 분석한다.

Abstract

In this paper, we show that the 2nd-order iterative learning control algorithm with CITE is more effective and has better convergence performance than the algorithm without CITE in the case of the existence of initialization errors, for the trajectory-tracking control of dynamic systems with unidentified parameters. In contrast to other known methods, the proposed learning control scheme utilize more than one past error history contained in the trajectories generated at prior iterations, and a CITE term is added in the learning control scheme for the enhancement of convergence speed and robustness to disturbances and initialization errors. And the convergence proof of the proposed algorithm in the case of the existence of initialization error is given in detail, and the effectiveness of the proposed algorithm is shown by simulation results.

Key Word : Iterative Learning Control, Robustness, Initialization Error, Convergence.

I. 서론

로봇트 매니플레이터와 같이 똑같은 작업을 계속 반

복하는 경우에 있어서 반복 학습제어(Iterative Learning Control, ILC) 방법이 제어 성능이 우수하고 높은 정밀도를 보장하면서도 제어 방법이 비교적 간단하여 그동안 많이 연구되고 사용되어 왔다. 이러한 반복 학습제어 방법에 있어서 최근에는 주 관심사가 안정성 문제 위주에서 성능 향상 및 설계를 더욱 중요시하는 방향으로 흐르고 있다. 같은 맥락에서 학습제어의 수렴 성능의 향상과 더불어 외란이나 시스템 변수의 변화 등 주위 환경의 변화에 대한 극복 능력을 향상시키는 방향으로 다양한 학습제어 방법들이 개발되어 왔으며, 고차 반복 학습제어(higher order ILC) 방법도 이러한

* 正會員, 檀國大學校 電子컴퓨터學部
(Dankook Univ, Dept. of Electronics & Computer Eng)
* 學生會員, 檀國大學校 電子컴퓨터學部
(Dankook Univ, Dept. of Electronics & Computer Eng)
※ 이 연구는 2000학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.
接受日字:2001年1月5日, 수정완료일:2002年2月7日

방향의 목적으로 연구되고 개발되었다.

고차 반복 학습제어 방법은 우리가 [1]에서 맨 처음 제안한 바 있으며, 여기에서 이 방법이 수렴속도와 외란에 대한 강인성에 있어서 상당한 성능 향상을 가져온다는 것을 보인 바 있다. 또한 이러한 사실은 후에 [2]에서도 1축 로봇트 암에 대해 적용한 결과를 통해 이와같은 성능 향상이 이루어짐을 보였다. 이러한 고차 반복 학습제어 방법은 특히 제어대상 시스템에 불확실성이 많고 그로 인해 반복 학습 도중에도 시스템이 약간씩 변화하는 경우에 있어서, 타 방법에 비해 탁월한 제어성능을 보이고 있다.

다음 식 (1)은 고차 반복 학습제어 방법 중 차수가 2차 반복 학습제어(2nd-order ILC) 알고리즘을 나타낸다.

$$u_{k+1}(t) = P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 e_k(t) + Q_2 e_{k-1}(t) \quad (1)$$

여기에서 $u_k(t)$ 는 k 번째 반복수행시의 제어 입력을 나타내고, $e_k(t)$ 는 $u_k(t)$ 에 대한 응답으로서의 실제 시스템 출력 $y_k(t)$ 와 원하는 목표 출력(desired output) $y_d(t)$ 와의 차이인 출력 오차를 나타내며, P_1, P_2, Q_1, Q_2 는 학습제어 게인이다.(본 논문에서 $u_k(t), e_k(t), x_k(t), y_k(t)$ 등의 표기는 모두 k 번째 반복시의 시간 t 일때의 값을 나타냄.)

한편, 반복 학습제어의 적용에 있어서 중요한 현실적 문제로 부각되는 것 중의 하나가 초기 오차의 존재로 인한 문제이다. 기존의 대부분의 학습제어 방법들이 초기 오차가 없다는 가정하에 개발된 방법들이며, 따라서 현실적으로 존재할 수밖에 없는 초기 오차에 대하여 각 제어방법들이 얼마나 강인하고 극복능력이 있는지에 관해 최근 많은 연구가 진행되어 왔다. [3]에서는 초기 오차가 존재할 시에 기존의 학습제어를 적용할 경우 시스템이 불안정해진다는 것을 분석을 통해 보였고 [4]에서는 학습제어시 출력 추종 오차의 한계치(bound)가 초기 오차와 외란, 출력 잡음의 한계치들의 연속합수로 나타난다는 것을 보였으며, [5]에서도 forgetting factor를 이용한 선택적 학습 방법으로 이 문제에 접근해 출력 추종 오차의 한계치가 초기 오차와 외란의 한계치의 Class-K 함수로 표시된다는 것을 보였다. 그리고 [6]에서는 식 (2)와 같은 특별한 형태의 고차 P-형태 반복 학습제어 방법을 사용하여 출력 추종 오차의

한계치가 초기 오차와 외란, 불확실성 등의 두 인접 반복시(iteration)간의 차이의 한계치에 직접적으로 의존한다는 것을 보였다. 그리고 이 방법에서는 현재에서의 출력 추종 오차를 사용하였으며, 이 오차의 학습 게인에 의해 출력 추종 오차의 한계치를 조정할 수 있음을 보였다. 하지만 이 방법은 학습제어시 과거의 입력들 중에서 바로 전 반복시에서의 입력 $u_k(t)$ 만을 사용함으로써 인해 학습 게인 Q_j 들을 선정하기가 너무 광범위하고 모호한 단점이 있으며, 또한 각 학습 게인들이 수렴 속도와 안정성에 미치는 영향에 대해 분석하지 못하였다.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \sum_{j=0}^N Q_j(t) e_{k-j+1}(t) \quad (2)$$

그리고 이 밖에도 이와 관련한 여러가지 반복 학습제어 방법에 대한 연구가 계속되어 왔다^[7,9].

본 논문에서는 우리가 이미 제안한 2차 반복 학습제어 알고리즘 (1)에 현재에서의 출력 추종 오차(current iteration tracking error, CITE)를 추가한 학습제어 방법 (3)에 의해, 초기 오차가 존재하는 경우에도 원하는 출력에 수렴함을 증명해 보이고, 선형 시변 연속 시스템에 대하여 적용한 시뮬레이션 결과를 통해 빠른 수렴 특성과 시스템 안정성의 향상을 보인다. 또한 학습 게인 P_1, P_2, Q_1, Q_2, R 이 수렴 속도와 안정성에 미치는 영향을 시뮬레이션 결과와 알고리즘 해석을 통해 상세히 분석함으로써, 초기 오차가 존재하는 실제의 경우에 있어서 본 방법에 의한 학습제어기 설계가 용이하도록 하였다.

$$u_{k+1}(t) = P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 e_k(t) + Q_2 e_{k-1}(t) + R e_{k+1}(t) \quad (3)$$

본문에서 사용되는 벡터 노름(vector norm)과 행렬 노름(matrix norm), 그리고 lambda 노름의 정의는 다음과 같다.

$f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(r)})$ 일 때

$$\|f\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} |f^{(i)}|$$

$G = (g^{(ij)})$ 일 때

$$\|G\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \sum_{j=1}^r |g^{(ij)}| \right\}$$

$h : [0, T] \rightarrow R^n$ 일때

$$\|h(\cdot)\|_1 \triangleq \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|h(t)\|_\infty$$

II. CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 알고리즘

다음과 같은 선형 시변 연속 시스템(linear time-varying continuous system)을 대상으로 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = \xi^0 \\ \dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 x 는 $nx1$ 의 상태벡터이고 u 는 $px1$ 의 제어벡터이며 y 는 $mx1$ 의 출력벡터이다. 그리고 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 는 각기 적절한 차원을 갖는 행렬로서, 모두 미지의 파라미터를 포함하는 연속함수 들이다.

우리가 성취하고자 하는 목표 출력 경로를 $y_d(t), 0 \leq t \leq T$ 라 하고, 허용오차 범위를 $\epsilon^* > 0$ 이라 하자. 이 때 우리의 목적은 시스템 파라미터 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 의 값을 정확히 알지 못하는 상태에서, 선형 시변 연속 시스템 (4)의 출력 $y(t)$ 가 다음 식(5)과 같은 조건을 만족시키도록 하는 제어 입력 $u(t), 0 \leq t \leq T$ 를 구해내는 것이다.

$$E(y(t)) = \|y_d(t) - y(t)\| \leq \epsilon^*, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

여기서 시스템에 대한 동특성을 정확히 알지 못하는 상태이기 때문에, 우리가 생각하는 경로추적 문제는 간단히 해결되기가 어렵다. 그래서 그것을 해결하기 위한 방법으로서 다음과 같은 CITE를 포함한 2차 반복 학습 제어 알고리즘을 제안하였다.

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= P_1 u_k(t) + P_2 u_{k-1}(t) + Q_1 e_k(t) \\ &+ Q_2 e_{k-1}(t) + R e_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 이고, $R e_{k+1}(t)$ 항이 CITE 항을 나타낸다. 그리고 이 알고리즘은 다음의 두 조건 (A1), (A2)하에서 수렴한다는 것을 보인바 있다^[10].

$$(A1) \quad P_1 + P_2 = I$$

$$(A2) \quad \rho = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1} (P_1 - Q_1 D(t))\|_\infty$$

$$+ \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1} (P_2 - Q_2 D(t))\|_\infty < 1$$

대부분의 실제 시스템에서는 매 반복시마다 초기 오차가 존재하기 쉽다. 따라서 본 논문에서는 이와 같이 초기 오차가 있을 경우에 대하여 본 알고리즘의 수렴성을 분석하고 관찰한다.

먼저 본 알고리즘이 초기 오차가 있는 경우에도 반복횟수 k 가 증가함에 따라 시스템 출력이 목표 출력에 수렴하도록 보장한다는 것을 다음에서 보인다.

이를 위해 (4)의 시스템에서 상태 벡터의 초기 조건에 오차가 있다고 가정하자. 즉 $x_d(0) \neq x_k(0)$ 라고 가정한다.

<수렴성 증명>

$$\begin{aligned} u_d(t) - u_{k+1}(t) &= P_1(u_d(t) - u_k(t)) + P_2(u_d(t) \\ &- u_{k-1}(t)) - Q_1[C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) - C(t)x_k(t) \\ &- D(t)u_k(t)] - Q_2[C(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) \\ &- C(t)x_{k-1}(t) - D(t)u_{k-1}(t)] - R[C(t)x_d(t) \\ &+ D(t)u_d(t) - C(t)x_{k+1}(t) - D(t)u_{k+1}(t)] \\ &= (P_1 - Q_1 D(t))(u_d(t) - u_k(t)) \\ &+ (P_2 - Q_2 D(t))(u_d(t) - u_{k-1}(t)) - Q_1 C(t)(x_d(t) \\ &- x_k(t)) - Q_2 C(t)(x_d(t) - x_{k-1}(t)) - RC(t)(x_d(t) \\ &- x_{k+1}(t)) - RD(t)(u_d(t) - u_{k+1}(t)) \end{aligned}$$

로 부터

$$\begin{aligned} (I + RD(t))(u_d(t) - u_{k+1}(t)) \\ &= (P_1 - Q_1 D(t))(u_d(t) - u_k(t)) \\ &+ (P_2 - Q_2 D(t))(u_d(t) - u_{k-1}(t)) \\ &- Q_1 C(t)(x_d(t) - x_k(t)) - Q_2 C(t)(x_d(t) - x_{k-1}(t)) \\ &- RC(t)(x_d(t) - x_{k+1}(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

가 얻어지며, 양변을 $(I + RD(t))^{-1}$ 로 곱한 뒤 노음을 계산하면 다음과 같은 부등식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \|u_d(t) - u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq \\ &\|(I + RD(t))^{-1} (P_1 - Q_1 D(t))\|_\infty \|u_d(t) - u_k(t)\|_\infty \\ &+ \|(I + RD(t))^{-1} (P_2 - Q_2 D(t))\|_\infty \|u_d(t) - u_{k-1}(t)\|_\infty \\ &+ \|(I + RD(t))^{-1} Q_1 C(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty \\ &+ \|(I + RD(t))^{-1} Q_2 C(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_{k-1}(t)\|_\infty \\ &+ \|(I + RD(t))^{-1} RC(t)\|_\infty \|x_d(t) - x_{k+1}(t)\|_\infty \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, T] \quad (8)$$

가정에서 $x_d(0) \neq x_k(0)$ 이므로 모든 시간대 $0 \leq t \leq T$ 에서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty &= \|x_d(0) - x_k(0) + \int_0^t [(A(\tau)x_d(\tau) \\ &+ B(\tau)u_d(\tau) - (A(\tau)x_k(\tau) + B(\tau)u_k(\tau))]d\tau\|_\infty \\ &\leq \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty + \int_0^t [a \|x_d(\tau) - x_k(\tau)\|_\infty \\ &+ b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty]d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

(여기에서 $a = \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|_\infty$,

$$b = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)\|_\infty \text{ 임.})$$

여기에 Bellman-Gronwall lemma[11]를 적용하면

$$\begin{aligned} \|x_d(t) - x_k(t)\|_\infty &\leq \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty e^{at} \\ &+ \int_0^t b \|u_d(\tau) - u_k(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)}d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

의 부등식이 얻어지며, 따라서 식 (8)과 (10)으로부터 다음 관계가 얻어진다.(여기서 식을 간단히 하기 위해 $u_d(t) - u_k(t)$ 를 $\delta u_k(t)$ 로 표기한다.)

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq l_1 \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty \\ &+ m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty e^{at} \\ &+ m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty e^{at} \\ &+ m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{a(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty e^{at} \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서

$$l_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_1 - Q_1D(t))\|_\infty,$$

$$l_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|(I + RD(t))^{-1}(P_2 - Q_2D(t))\|_\infty$$

이고,

$$m_1 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}Q_1C(t)\|_\infty,$$

$$m_2 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}Q_2C(t)\|_\infty,$$

$$m_3 = \sup_{t \in [0, T]} b \|(I + RD(t))^{-1}RC(t)\|_\infty \quad \text{이다.}$$

식 (11)에서 정함수 $e^{-\lambda t}$ 를 곱하면 다음 관계가 얻어지며

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\delta u_{k+1}(t)\|_\infty &\leq \\ &l_1 e^{-\lambda t} \|\delta u_k(t)\|_\infty + l_2 e^{-\lambda t} \|\delta u_{k-1}(t)\|_\infty \\ &+ \frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_1 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_k(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_2 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k-1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty e^{(a-\lambda)t} \\ &+ m_3 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|\delta u_{k+1}(\tau)\|_\infty e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &\leq l_1 \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda + l_2 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\ &+ m_1 \int_0^t \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ m_2 \int_0^t \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ m_3 \int_0^t \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda e^{(a-\lambda)(t-\tau)}d\tau \\ &+ [\frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty + \frac{m_2}{b} \|x_d(0) \\ &- x_{k-1}(0)\|_\infty + \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty] e^{(a-\lambda)t} \\ &\forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (12)$$

이로부터 다음 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda &\leq \\ &[l_1 + \frac{m_1}{\lambda - a}(1 - e^{(a-\lambda)T})] \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \\ &+ [l_2 + \frac{m_2}{\lambda - a}(1 - e^{(a-\lambda)T})] \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda \\ &+ \frac{m_3}{\lambda - a}(1 - e^{(a-\lambda)T}) \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda + \varepsilon \\ &\lambda > a \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서

$$\varepsilon = \frac{m_1}{b} \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m_2}{b} \|x_d(0) - x_{k-1}(0)\|_\infty \\
 & + \frac{m_3}{b} \|x_d(0) - x_{k+1}(0)\|_\infty \\
 & = \frac{m_1}{b} \varepsilon_k + \frac{m_2}{b} \varepsilon_{k-1} + \frac{m_3}{b} \varepsilon_{k+1}
 \end{aligned}$$

이다. ($\varepsilon_k = \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty$ 로 표기) 결국 이 ε 항이 추가됨으로 인해, λ 를 충분히 크게 잡을 때 다음 관계가 성립하게 되며,

$$\begin{aligned}
 \|\delta u_{k+1}(\cdot)\|_\lambda & \leq l_1 \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \\
 & + l_2 \|\delta u_{k-1}(\cdot)\|_\lambda + \varepsilon,
 \end{aligned}$$

조건 (A2)에서 $l_1 + l_2 < 1$ 이므로, Lemma 1에 의해 $\|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda$ 는 $(\frac{1}{1-l_1-l_2}) \varepsilon$ 내로 수렴하게 된다.

즉, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda \leq (\frac{1}{1-l_1-l_2}) \varepsilon$ 로서, 이는 λ -norm에 있어서 $u_k(t)$ 가 $u_d(t)$ 에 반경 $(\frac{1}{1-l_1-l_2}) \varepsilon$ 범위내로 수렴함을 나타낸다. 또한 식 (10)을 이용하여 앞서와 같이 계산하면,

$$\begin{aligned}
 \|\delta x_k(\cdot)\|_\lambda & \leq \\
 \|x_d(0) - x_k(0)\|_\infty & + \int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda d\tau \\
 & \leq \varepsilon_k + \frac{1}{\lambda-a} (1 - e^{(a-\lambda)T}) \|\delta u_k(\cdot)\|_\lambda
 \end{aligned}$$

가 되며, 따라서

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta x_k(\cdot)\|_\lambda & \leq \varepsilon_k \\
 & + \frac{1}{\lambda-a} (1 - e^{(a-\lambda)T}) (\frac{1}{1-l_1-l_2}) \varepsilon
 \end{aligned}$$

가 된다. 이들 결과와 식 (4)로부터 $y_k(t)$ 가 $y_d(t)$ 에 일정 반경 내로 수렴함을 쉽게 알 수 있다.

위의 결과로부터 초기 오차가 있는 경우에 있어서, 초기 오차의 크기가 작을수록 목표치에의 수렴 반경이 작아지게 되어, 더 정확한 제어가 된다는 것을 알 수 있다.

III. 시뮬레이션 결과 및 고찰

본 논문에서 제안한 CITE를 포함한 2차 반복 학습 제어 알고리즘과 CITE가 포함되지 않은 기존의 반복 학습제어 알고리즘과의 성능 비교를 위해, 식 (18)과 같은 형태로서 [1]에서 사용되었던 다음의 선형 시변 시스템에 대하여 각 알고리즘을 적용시켜 그 결과를 비교해보기로 한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{19-a}$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{19-b}$$

이 때 목표 출력 $y_d(t)$ 는

$$y_d(t) = 12t^2(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{20}$$

라 하자.

그런데 이 시스템에서는 출력식 (19-b)에 직달항 $D(t)$ 와 관련된 항목이 없기 때문에 본 알고리즘 (6)을 바로 적용할 수가 없다. 하지만 출력식 (19-b)와 목표 출력 (20)을 약간 변형함으로써 본 알고리즘이 적용될 수 있는 등가의 출력식 및 목표 출력을 얻을 수 있다.

$$\hat{y}(t) = \dot{y}(t) = \hat{C}(t)x(t) + \hat{D}(t)u(t) \tag{21}$$

(이 때

$$\begin{aligned}
 \hat{C}(t) & = CA(t) = [-(2+5t) \quad -(3+2t)], \\
 \hat{D}(t) & = CB(t) = 1) \\
 \hat{y}_d(t) & = \dot{y}_d(t) = 12t(2-3t)
 \end{aligned} \tag{22}$$

즉, $u(0) = 0$ 인 조건하에 식(21)의 출력 $\hat{y}(t)$ 를 식(22)의 목표 출력 $\hat{y}_d(t)$ 로 가게 하는 그 어떤 제어 방식도, 식(19)의 출력 $y(t)$ 를 식(20)의 목표 출력 $y_d(t)$ 로 가도록 한다는 점에서 등가하다고 하는 것이다. 따라서 이때 학습 알고리즘 적용시 사용되는 오차 $e_k(t)$ 는 $\hat{y}_d(t) - \hat{y}_k(t) = \dot{y}_d(t) - \dot{y}_k(t)$ 이다.

이제 위 시스템의 출력의 경로 오차를 모든 시간대에서 $\varepsilon^* = 0.02$ 내에 들도록 추적 성능을 보장하기 위해 CITE가 포함되지 않은 기존의 2차 반복 학습제어와

CITE를 포함한 2차 반복 학습제어의 두 가지 알고리즘을 설계하여 원하는 성능이 나올 때까지 계속 반복적으로 적용한다. 여기에서 기존의 2차 반복 학습제어 알고리즘은 알고리즘 (6)에서 $R=0$ 인 경우와 같다.

1. CITE 항이 시스템에 미치는 영향

다음 그림들은 빠른 수렴 특성을 위해서 학습 계인을 키웠을 경우의 결과로서, 학습제어에 CITE를 포함함으로써 출력에 미치는 영향을 보여주는 실험 결과이다. 일반적으로 빠른 수렴 특성을 얻기 위해 큰 학습 계인을 가하게 되면 시스템은 점점 불안정한 쪽으로 가게 되므로, 학습 계인의 증가에는 제약을 받을 수밖에

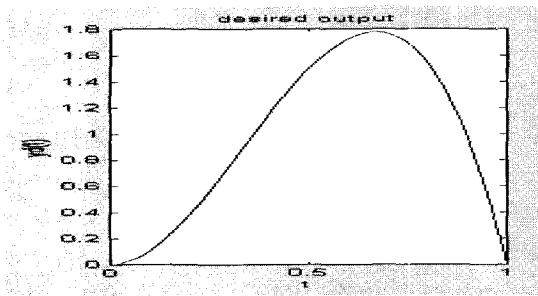


그림 1. 목표출력
Fig. 1. Desired output.

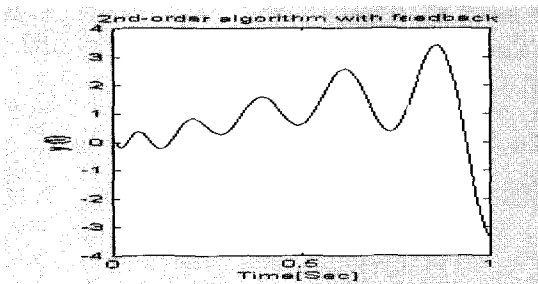


그림 2. 기존의 2차 반복 학습 제어의 출력
Fig. 2. Output by 2nd-order ILC.

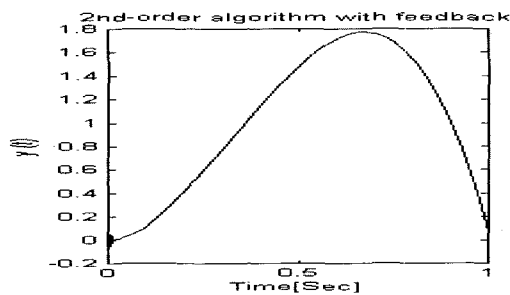
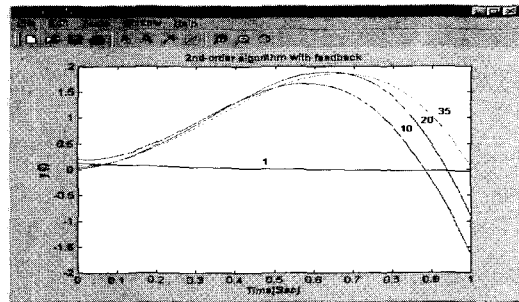


그림 3. CITE를 포함한 2차 반복 학습제어의 출력
Fig. 3. Output by 2nd-order ILC with CITE.

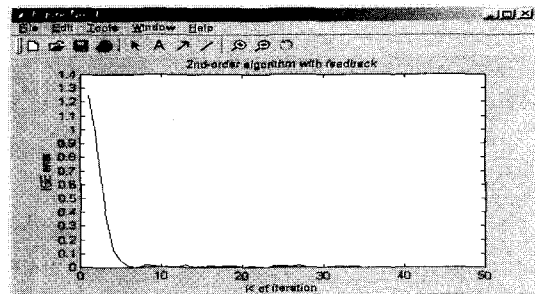
에 없다.

위에서 그림 1은 목표출력 $y_d(t)$ 를 나타내고 있으며, 그림 2와 그림 3은 실제 출력 $y(t)$ 를 나타내고 있다. 그림 2는 기존의 2차 반복 학습제어를 적용한 경우로서, 높은 학습 계인으로 인해 시스템이 불안정해진 것을 볼 수 있다. ($P_1=0.9, P_2=0.1, Q_1=2.0, Q_2=0.1, R=0$). 그러나 그림 3처럼 CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 알고리즘을 적용한 경우에는 역시 높은(주로 Q_1 이 영향을 많이 미침) 학습 계인임에도 불구하고 출력이 목표출력에 수렴하고 있음을 알 수 있다. ($P_1=0.9, P_2=0.1, Q_1=2.0, Q_2=0.1, R=0.5$) 여기에서 반복횟수 k 는 40회까지 한 결과이다. 이를 통해 높은 학습 계인에서는 불안정했던 시스템 출력이 CITE 항을 사용함으로써 안정화되는 것을 알 수 있다. 하지만 이 경우에도 학습 계인을 너무 키우면 시스템의 출력 초기에 약간의 오차가 발생하는 경우가 있었다.

2. 초기 오차가 존재할 때의 수렴 성능 실험 결과
그림 4와 5는 초기 오차가 존재할 경우의 결과로서,



(a) 초기오차가 $0.2 \cdot \text{rand}(1)$ 일때의 출력, $k=35$



(b) 출력 오차의 ISE

그림 4. 초기 오차가 존재할 경우의 출력 및 출력오차 (기존의 2차 반복 학습제어 적용시)

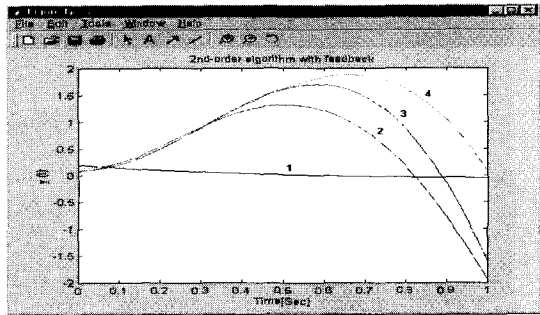
Fig. 4. Output and output error when initialization error exists(2nd-order ILC case)

각 반복시마다 무작위 초기 오차가 있을 경우의 출력 및 출력오차의 ISE(Integral of Squared Error) 값을 보인다. 이때 초기 오차는 크기가 0.2이내의 랜덤 값 ($0.2 * random(0,1)$)으로 하였고(여기에서 $random(0,1)$ 이란 0과 1사이의 random number로서, 실제 시뮬레이션에서는 Matlab에서 발생시켜 제공해주는 값을 사용하였다), 반복횟수는 100까지로 하였다. 여기에서 그림 4는 기존의 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과이고, 그림 5는 CITE를 포함한 2차 반복 학습제어를 적용했을 때의 결과이다. 그림 4에서 보듯이 기존의 2차 반복 학습제어의 경우에는 목표경로와 ϵ^* 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 35번의 수행이 필요하다는 것을 알 수 있다. 그러나 그림 5에서 보듯이 CITE를 포함한 2차 반복 학습제어의 경우에는 목표경로와 ϵ^* 이내의 경로오차를 유지하도록 하는데 4번의 수행만이 필요하다는 것을 알 수 있다. 따라서 CITE를 포함한 학습제어가 기존의 학습제어보다 초기 오차에 대한 극복 능력이 훨씬 더 뛰어난을 알 수 있다. 이 때

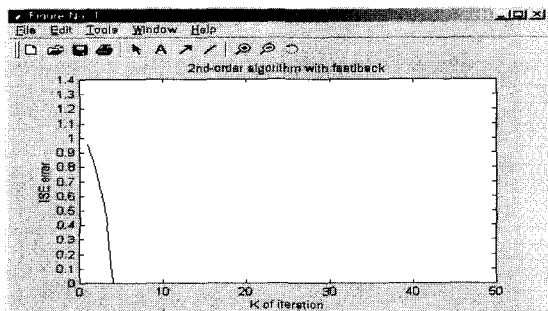
각 학습 계인은 $P_1=0.7, P_2=0.3, Q_1=0.9, Q_2=1, R=0.05$ 이었다.

3. 초기 오차의 크기에 따른 수렴성능 비교

아래의 그림 6, 7, 8은 초기 오차의 크기가 각각 $0.2 * random(0,1), 0.3 * random(0,1), 0.5 * random(0,1)$ 일때의 출력오차의 ISE 값을 그래프를 통해 보여주고 있다. 역시 목표 경로와의 경로오차 ϵ^* 는 0.02로 하였다. 여기서 보듯이 초기 오차의 크기가 커질수록, ϵ^* 이내의 경로오차를 유지하기까지의 반복 횟수 k 가 증가함을 알 수 있다. 하지만 이 3가지 어느 경우에도 기존의 알고리즘을 적용한 경우보다는 훨씬 빨리 수렴하고 있음을 알 수 있다.



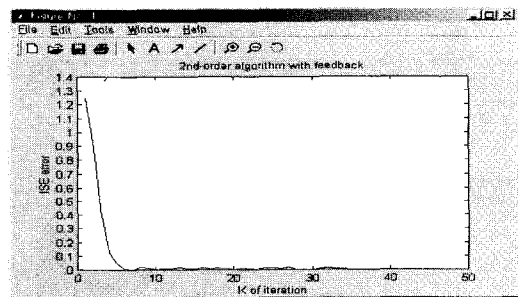
(a) 초기오차가 $0.2 * rand(1)$ 일때의 출력, $k=4$



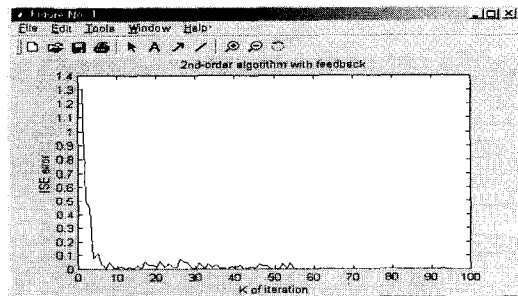
(b) 출력 오차의 ISE

그림 5. 초기 오차가 존재할 경우의 출력 및 출력오차 (CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 적용시)

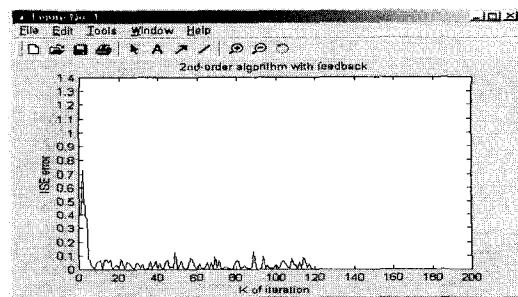
Fig. 5. Output and output error when initialization error exists(2nd-order ILC with CITE case)



초기오차= $0.2 * rand(1)$, $k=35$

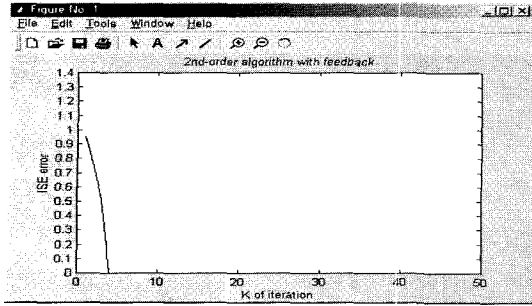


초기오차= $0.3 * rand(1)$, $k=54$

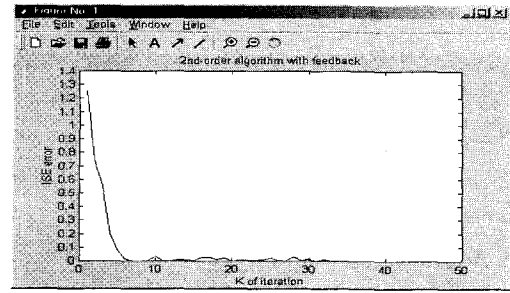


초기오차= $0.5 * rand(1)$ $k=118$

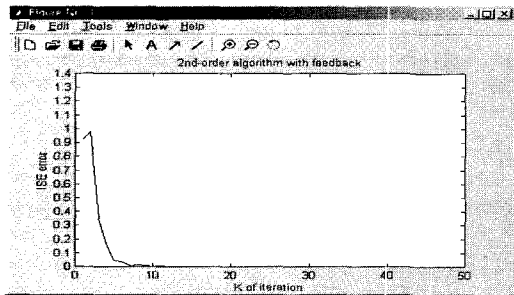
(a) 기존의 2차 반복 학습제어 적용시($R=0$)



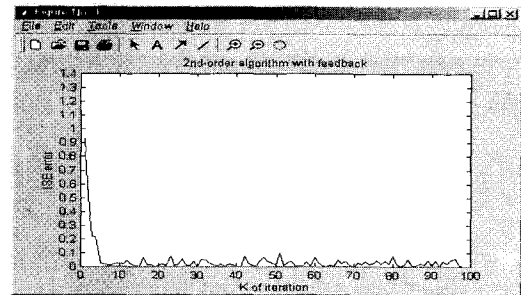
초기오차=0.2*rand(1), k=4



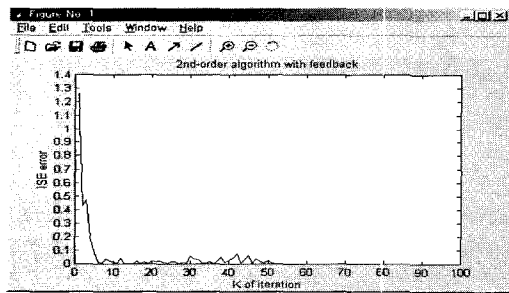
초기오차=0.3*rand(1), k=32



초기오차=0.3*rand(1), k=11



초기오차=0.5*rand(1), k=99



초기오차=0.5*rand(1), k=51

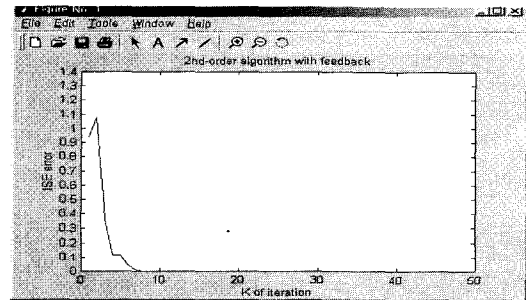
(b) CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 적용시 (R=0.05)

그림 7. CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 적용시 $P_1=0.9, P_2=0.1, Q_1=1.3, Q_2=0.1, R=0.2$ 일때의 출력오차의 ISE

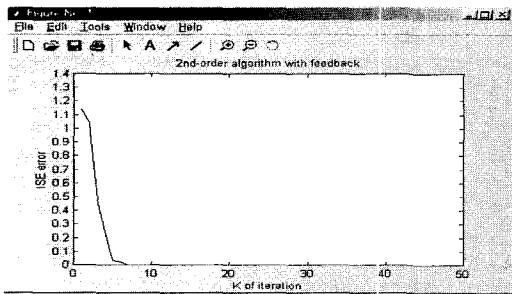
Fig. 7. ISE of output error when. $P_1=0.9, P_2=0.1, Q_1=1.3, Q_2=0.1, R=0.2$

그림 6. $P_1=0.7, P_2=0.3, Q_1=0.9, Q_2=1$ 일때의 출력오차의 ISE

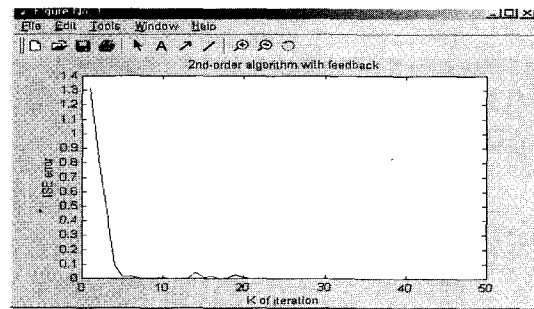
Fig. 6. ISE of output error when. $P_1=0.7, P_2=0.3, Q_1=0.9, Q_2=1$



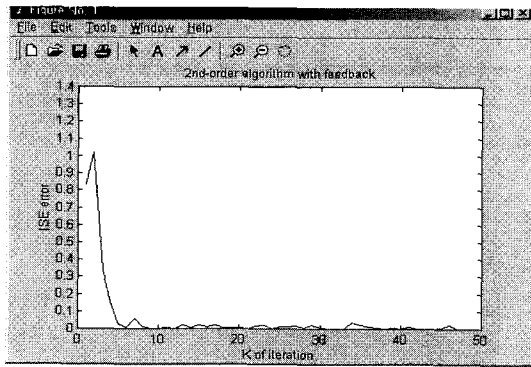
초기오차=0.2*rand(1), k=8



초기오차=0.2*rand(1), k=6



초기오차=0.3*rand(1), k=21



초기오차=0.5*rand(1), k=46

그림 8. CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 적용시 $P_1=0.8, P_2=0.2, Q_1=0.7, Q_2=0.1, R=0.9$ 일때의 출력오차의 ISE

Fig. 8. ISE of output error when. $P_1=0.8, P_2=0.2, Q_1=0.7, Q_2=0.1, R=0.9$

4. 학습 계인 R의 영향 분석

표 1을 보면, CITE 학습 계인 R이 있음으로 해서 수렴 조건 (A2)의 ρ 값이 작아졌음을 알 수 있으며, 이 때문에 수렴속도가 빨라졌음을 알 수 있다. 이것은 조건 (A2)에서 ρ 의 식을 살펴보아도 금방 알 수 있으며, 서로 일치한다는 것을 알 수 있다. 물론 ρ 값이 0에 가까울수록 수렴속도가 빨라지게 된다. 그러나 $R \geq 1$ 인 경우에는 표 1의 G, H, I에서 볼 수 있듯이 출력이 불안정한 결과가 나왔다. 다만 $R=1$ 의 경우라도 $\rho=0$ 인 경우(표 1의 E, F)에 한해서는 안정하게 수렴한다는 것을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 CITE를 포함한 2차 반복 학습제어 방법 알고리즘이 초기 오차가 있음에도 불구하고 이를 극복하여 기존의 알고리즘보다 훨씬 더 빠른 수렴 능력이 있음을 확인하였다. 또한 불안정한 결과를 낳는 높은 학습 계인의 경우에도 CITE 항을 추가한 본 학습 제어 방법에 의해 안정화됨으로써, 빠른 응답 특성과 강인성 향상을 가져올 수 있음을 보여 주었다. 그러나 $R>1$ 일 때는 대부분 불안정하게 되는 바, 이에 대한 원인 분석이 앞으로 보완되어야 할 것으로 판단된다.

부 록

Lemma 1 : 양의 실수값들로 이루어진 수열 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 이 다음 조건을 만족시킨다고 가정하자. (단, $l_i \geq 0$ 임)

$$a_n \leq l_1 a_{n-1} + l_2 a_{n-2} + \dots + l_N a_{n-N} + \epsilon, \quad (n=N+1, N+2, \dots), \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (\epsilon \geq 0).$$

이때 만일 $l = \sum_{i=1}^N l_i < 1$ 의 조건이 성립하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{\epsilon}{1-l} \text{의 관계가 성립한다.}$$

(증명) $n_1 \in \{n-1, n-2, \dots, n-N\}$ 이

$a_{n_1} = \max\{a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-N}\}$ 인 index number라고 하면, Lemma 1의 가정에 의해

$$a_n \leq l_1 a_{n-1} + l_2 a_{n-2} + \dots + l_N a_{n-N} + \epsilon \leq l a_{n_1} + \epsilon \text{가 성립한다. 마찬가지로}$$

$$n_2 \in \{n_1-1, n_1-2, \dots, n_1-N\} \text{도}$$

$a_{n_2} = \max\{a_{n_1-1}, a_{n_1-2}, \dots, a_{n_1-N}\}$ 인 index number라고 하면,

$$a_{n_1} \leq l a_{n_2} + \epsilon \text{이 성립한다. 따라서,}$$

$$a_n \leq l^2 a_{n_2} + l\epsilon + \epsilon$$

이 성립하게 된다. 이를 보다 일반화시키면,

$$a_n \leq l^m a_{n_m} + l^{m-1}\epsilon + l^{m-2}\epsilon + \dots + l\epsilon + \epsilon = l^m a_{n_m} + \frac{1-l^m}{1-l}\epsilon$$

의 관계가 성립하게 된다.(여기서 m 과 n_m 은 양의 정수임.)

만일 $n_m \leq N$ 의 관계가 성립하도록 m 이 선택된다면,

$[n/M]-1 < m \leq n-N$ 의 관계가 성립하게 되며, 따라서 $n \rightarrow \infty$ 이면 $m \rightarrow \infty$ 가 된다.

$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 이라 하면,

$$a_n \leq l^m M + \frac{1-l^m}{1-l}\epsilon \text{의 관계가 성립하며, 이로부터}$$

터 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{\epsilon}{1-l}$ 가 성립함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Bien, Z., and Huh, K. M., "Higher-order Iterative Learning Control Algorithm", IEE Proceedings, Part. D, Vol. 136, No. 3, May, 1989.

- [2] Y. Chen, Z. Gong and C. Wen, "Analysis of a high order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems". Automatica, 34(3), pp.345~353, 1998.
- [3] K. H. Lee and Z. Bien, "Initial Condition Problem of Learning Control", IEE Proc. Part D, Vol. 138, No. 6, pp. 525~528, 1991.
- [4] G. Heinzinger, D. Fenwick, B. Paden, and F. Miyazaki, "Robust Learning Control", IEEE Pros. 28th Conf. on Decision and Control, WP2-3:15, Tampa, Florida, America, 1989.
- [5] M. Sun, B. Huang, X. Zhang, "Selective Learning with a Forgetting Factor For Trajectory Tracking Uncertain Nonlinear System", Pros. 2nd Asian Control Conf., II-47-50, Seoul, 1997.
- [6] Y. Chen, C. Wen, and M. sun, "A robust high order P-type iterative learning controller using current iteration tracking error", International Journal of Control, Vol. 68, No. 2, 331~342, 1997.
- [7] Zeungnam Bien and Jian-Xin Xu, Iterative Learning Control-Analysis, Design, Integration and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] Mikael Norrlof, "Iterative Learning Control-Analysis, Design and Experiments", Linus&Linea AB, Linkoping, Sweden, 2000.
- [9] G. Heinzinger, D. Fenwick, B. Paden, and F. Miyazaki, "Stability of Learning Control with Disturbances and Uncertain Initial Conditions", IEEE Tr. on Automatic Control, Vol. 37, No. 1, pp. 110~114, 1992.
- [10] K. M. Huh, "A Study on the Second-order Iterative Learning Control Algorithm with Feedback", The International Conference on Electrical Engineering(ICEE'98), Vol. 1, pp.36~39, 1998.
- [11] Lakshmikantham, V., and Leela, S., Differential and Integral Inequalities - Vol. 1, Academic Press, pp. 37~41, 1969.

저 자 소 개



許慶茂(正會員)

1979년 : 서울대학교 전자공학과 졸업. 1981년 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사. 1989년 : 동대학 박사. 현재 : 단국대학교 전자컴퓨터학부 전자공학전공 부교수. <주요연구분야 : 로봇트 제어, 3차원 디스플레이, 시스템 제어, 학습 제어, Servo Motor 제어, 디지털 제어기 설계 및 Simulation>



元光浩(學生會員)

1999년 : 단국대학교 전자공학과(학사). 현재 : 동대학원 석사과정. <주요 관심분야 : 시스템 제어, 학습 제어, 원격 로봇 제어>