

論文2002-39SC-1-5

BMI의 반복적 해법을 이용한 주파수하중 차수축소 (Frequency Weighted Reduction Using Iterative Approach of BMI)

金 勇 兌 * , 吳 道 昌 ** , 朴 烘 培 ***

(Yong Tae Kim, Do Chang Oh, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문에서는 기존의 주파수하중 균형절단 기법과 주파수하중 한켈노름 근사화 기법에 비하여 더 작은 H^∞ 하중 축소오차를 가지는 새로운 알고리즘을 제시한다. 제시한 알고리즘은 제한 실 보조정리로부터 반복적인 두 단계의 선형행렬부등식 형태로 유도한다. 또한 제안한 알고리즘을 성능보장을 위한 제어기 차수축소 기법에 적용한다. 수치적 예를 통하여 제안한 알고리즘의 타당성을 보이고 기존의 모델 차수축소기법과 비교 분석하며 HIMAT(highly maneuverable aircraft technology) 시스템의 예를 통하여 성능보장을 위한 제어기 차수축소 기법에 적용할 수 있음을 보인다.

Abstract

In this paper, we present a frequency weighted model reduction using LMIs for minimizing the H^∞ weighted model error compared with the methods of frequency weighted balanced truncation and frequency weighted Hankel norm approximation. The proposed algorithm, its form is equal to the sufficient condition of performance preserving controller approximation, is based on an iterative two-step LMI scheme induced from bound real lemma. So, it can be applied to the problem of the performance preserving controller approximation. The controller reduction is useful in a practical control design and ensures its easy implementation and high reliability. The validity of the proposed algorithm is shown through numerical examples. Additionally, we extend the proposed algorithm to performance preserving controller approximation by applying to the HIMAT(highly maneuverable aircraft technology) system.

* 正會員, 韓國電子通信研究院

(Electronics and Telecommunications Research Institute)

** 正會員, 建陽大學校 情報電子通信工學部

(Dept. of Information, Electronics and Communication Engineering, Konyang University)

*** 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部

(School of Electronic and Electrical Engineering, Kyungpook National University)

接受日字:2000年7月31日, 수정완료일:2001年11月8日

I. 서 론

일반적으로 시스템을 모델링하면 유한차수의 선형 미분방정식 형태로 나타난다. 그러나 시스템의 일반적 모델링 과정에서 시간이나 동작점의 함수인 파라미터나 비선형성은 고려되지 않으므로 설계한 제어기는 플랜트와 결합 후 제대로 동작하지 못한다. 따라서 시스템의 견실성능을 보장하기 위하여 모델링에 포함되지 않는 항들을 불확실성으로 고려하여 H^∞ 제어를 설계하는 방법들이 연구되었다^[1]. H^∞ 제어기 설계 기법은 성능을 향상시키기 위하여 설정한 하중함수와 모델

링되지 않는 불확실성을 고려하기 때문에 플랜트의 차수와 제어기의 차수가 높아진다. 제어기의 차수가 높을수록 처리시간이 길어지고 소프트웨어적으로나 하드웨어적으로 문제를 일으킬 가능성이 커지며 고집적에 불리하므로, 실제 구현시 제어기 차수축소 기법이 요구된다. 제어기 차수축소는 모델 차수축소와는 달리, 페루프 시스템의 안정성과 성능을 고려해야 한다. 제어기 차수축소의 기본 방법은 주어진 플랜트에 대해 저차제어기를 설계하는 직접적 방법과, 축소된 저차플랜트에 대해 제어기 설계 기법을 적용하는 방법 및 고차플랜트에 대해 고차제어기를 구한 다음 모델 차수축소 기법을 적용하는 방법 등의 간접적 방법이 있다^[2].

최근 몇 년동안 제어기 차수축소 기법의 접근은 페루프 시스템의 H_∞ 성능을 만족시키는 방향으로 발전해오고 있다. Goddard 등^[3]과 Wang 등^[4]은 성능보장을 위한 저차제어기가 존재할 충분조건으로 주파수하중 모델 차수축소(frequency weighted model reduction) 형태를 제시하고 하중함수를 구하였다. 한편, 실제적인 응용분야에서는 주파수하중 모델 차수축소기법이 많이 사용되어 왔다^[5]. Enns 등^[6]은 균형절단(balanced truncation) 기법을 주파수하중 문제로 확장하여 수치적 예들을 통하여 확인하였다. 그리고 Latham 등^[7]은 최적한켈노름 근사화(optimal Hankel norm approximation) 기법을 주파수하중 문제로 확장하였다. 그러나 기존에 제시한 주파수하중 모델 차수축소 기법은 성능면에서 최적의 해를 찾아낼 수 없으므로 성능을 보장하는 저차제어기를 구하기 위해서는 주파수하중 모델 차수축소(performance preserving controller approximation)에 대한 최적화 측면에서의 접근이 필요하다.

따라서, 본 논문에서는 Helmersson^[8]이 제시한 반복적인 모델 차수축소 문제를 주파수하중 문제로 확장하여 제한 실 보조정리(bounded real lemma: BRL)로부터 주파수하중 모델 차수축소 문제를 양선형행렬부등식(bilinear matrix inequality: BMI) 형태로 유도한 후, 저차모델을 구하기 위한 반복적 LMI 접근법을 제시한다. 또한 제안한 알고리즘을 성능보장을 위한 제어기 차수축소 기법에 적용함으로써 알고리즘의 유용성을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 LMI를 이용한 주파수하중 모델 차수축소 알고리즘을 제안하고 III장에서는 Wang 등이 제시한 성능보장을 위한 제어기 차수축소의 충분조건과 하중함수를 유도한 후 제

안한 알고리즘의 적용가능성을 보이고 IV장에서는 수치적 예를 들어서 제안한 알고리즘의 수렴성을 확인한 후, 기존의 주파수하중 모델 차수축소 기법과의 비교를 통하여 알고리즘의 유용성을 보인다. II장에서 제안한 알고리즘을 HIMAT 시스템에 적용하여 성능보장을 위한 제어기 차수축소로의 확장성을 확인하고 마지막으로 V장에서 결론을 맺는다.

II. 주파수하중 모델 차수축소

단순한 선형 모델이나 제어기는 분석 및 설계가 쉽기 때문에 차수축소는 중요한 의미를 갖는다. 특히 단순한 제어기는 구현하기 쉽고 하드웨어적 오류나 소프트웨어적 버그가 발생할 가능성이 적기 때문에 선호된다.

일반적인 모델 차수축소는 고차모델 $G(s)$ 가 주어졌을 때 저차의 r 차모델 $G_r(s)$ 를 찾는 문제이다. 가산섭동 모델 차수축소 문제는

$$G = G_r + \Delta_a \quad (1)$$

이며, Δ_a 는 가산섭동이다. 식 (1)을 H_∞ 문제로 표현하면

$$\inf_{\deg(G_r) \leq r} \|G - G_r\|_\infty \quad (2)$$

로 정의할 수 있다. 실제적인 모델 차수축소 문제는 주파수에 하중되어 있으므로

$$\inf_{\deg(G_r) \leq r} \|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty \quad (3)$$

으로 접근할 수 있다. 여기서, W_o 는 출력 하중함수이며 W_i 는 입력 하중함수이다.

보조정리 1 제한 실 보조정리(BRL)^[9,10]

선형 시불변시스템

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (4)$$

를 고려하면 여기서 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 는 상태, $w(t) \in \mathbf{R}^p$ 는 외란, $y(t) \in \mathbf{R}^m$ 는 출력이다. 이 시스템의 리아푸노프 부등식

$$A^T X + X A < 0, \quad X > 0 \quad (5)$$

에서 X 는 변수이고 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 이다. 행렬 A 가 안정한 조건과 식 (5)의 LMI가 해를 가지는 조건은 동가이다. 여기서 행렬 A 가 안정하면 무한대의 시간후에 $\dot{x} = Ax$ 의 모든 궤적이 영(zero)으로 수렴하거나 행렬 A 의 고유치가 음의 값을 가진다. 식 (4)로부터 $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ 에 대해 임의의 $\gamma > 0$ 일 때 노음 한계치조건 $\|G\|_\infty < \gamma$ 와 자승적 안정성(quadratic stability)을 보장하기 위한 필요충분조건은

$$A^T \bar{X} + \bar{X} A + C^T C + (\bar{X} B + C^T D) \times (\gamma^2 I - D^T D)^{-1} (\bar{X} B + C^T D)^T < 0 \quad (6)$$

을 만족하는 대칭행렬 $\bar{X} > 0$ 가 존재하는 것이다. 식 (6)를 LMI 형태로 바꾸면

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{X} + \bar{X} A + C^T C & \bar{X} B + C^T D \\ B^T \bar{X} + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X A + A^T X & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

이며, 여기서 $\bar{X} > 0$ 와 $X (= \gamma^{-1} \bar{X}) > 0$ 가 존재하여야 한다.

새로운 주파수하중 모델 차수축소 알고리즘을 유도하기 위하여 식 (7)의 LMI로부터 새로운 행렬부등식을 유도한 후 반복적인 방법(iterative method)을 이용하여 반복적인 주파수하중 모델 차수축소 알고리즘을 제안한다.

정리 1 고차모델 $G(s)$ 와 저차모델 $G_r(s)$ 를 각각

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (8)$$

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right] \quad (9)$$

로 두며 입력 하중함수 $W_i(s)$ 와 출력 하중함수 $W_o(s)$ 를 각각

$$W_i(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right] \quad (10)$$

$$W_o(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_o & B_o \\ \hline C_o & D_o \end{array} \right] \quad (11)$$

로 두며 각각 RH_∞ 공간에 속한다고 가정할 때 식 (3)의 주파수하중 모델 차수축소 문제는

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & * & * & * & * & * \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & * & * \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & * \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & \Phi_{66} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

의 해 (A_r, B_r, C_r, D_r)을 구하는 문제와 동가이다. 여기서 *는 대칭요소이며 각각의 행렬요소는

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \bar{A}^T S + S \bar{A} \\ \Phi_{21} &= A_i^T N_1^T + N_1^T \bar{A} + C_i^T B_r^T N_2^T + C_i^T D_r^T B_o^T N_3^T \\ \Phi_{22} &= L_{11} A_i + A_i^T L_{11} + L_{12} B_r C_i + C_i^T B_r^T L_{12}^T \\ &\quad + L_{13} B_o D_r C_i + C_i^T D_r^T B_o^T L_{13}^T \\ \Phi_{31} &= A_r^T N_2^T + N_2^T \bar{A} + C_r^T B_o^T N_3^T \\ \Phi_{32} &= A_r^T L_{12}^T + L_{12}^T A_i + C_r^T B_o^T L_{13}^T \\ &\quad + L_{22} B_r C_i + L_{23} B_o D_r C_i \\ \Phi_{33} &= L_{22} A_r + A_r^T L_{22} + L_{23} B_o C_r + C_r^T B_o^T L_{23}^T \\ \Phi_{41} &= A_o^T N_3^T + N_3^T \bar{A} \\ \Phi_{42} &= A_o^T L_{13}^T + L_{13}^T A_i + L_{23}^T B_r C_i + L_{33} B_o D_r C_i \\ \Phi_{43} &= A_o^T L_{23}^T + L_{23}^T A_r + L_{33} B_o C_r \\ \Phi_{44} &= L_{33} A_o + A_o^T L_{33} \\ \Phi_{51} &= \bar{B}^T S + B_i^T N_1^T + D_i^T B_r^T N_2^T + D_i^T D_r^T B_o^T N_3^T \\ \Phi_{52} &= \bar{B}^T N_1 + B_i^T L_{11} + D_i^T B_r^T L_{12}^T + D_i^T D_r^T B_o^T L_{13}^T \\ \Phi_{53} &= \bar{B}^T N_2 + B_i^T L_{12} + D_i^T B_r^T L_{22} + D_i^T D_r^T B_o^T L_{23}^T \\ \Phi_{54} &= \bar{B}^T N_3 + B_i^T L_{13} + D_i^T B_r^T L_{23} + D_i^T D_r^T B_o^T L_{33} \\ \Phi_{55} &= -\gamma I \\ \Phi_{61} &= \bar{C} \\ \Phi_{62} &= -D_o D_r C_i \\ \Phi_{63} &= -D_o C_r \\ \Phi_{64} &= -C_o \\ \Phi_{65} &= \bar{D} - D_o D_r D_i \end{aligned}$$

$$\Phi_{66} = -\gamma I$$

이며 W_oGW_i 의 상태공간 표현 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 는

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_i & 0 & 0 & B_i \\ BC_i & A & 0 & BD_i \\ B_oDC_i & B_oC & A_o & B_oDD_i \\ \hline D_oDC_i & D_oC & C_o & D_oDD_i \end{array} \right] \quad (13)$$

이다. 또한 $S, N_1, N_2, N_3, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{22}, L_{23}, L_{33}$ 는 대칭행렬

$$X = \begin{bmatrix} S & N_1 & N_2 & N_3 \\ N_1^T & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ N_2^T & L_{12}^T & L_{22} & L_{23} \\ N_3^T & L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

의 부행렬들이다.

증명: 식 (3)의 주파수하중 모델 차수축소는

$$\begin{aligned} \inf_{\deg(G_r) \leq r} \|W_o(G - G_r)W_i\|_\infty \\ = \inf_{\deg(G_r) \leq r} \|W_oGW_i - W_oG_rW_i\|_\infty \end{aligned} \quad (15)$$

와 같이 표현할 수 있다. 따라서, 최적의 주파수하중 모델 차수축소 문제에 있어서

$$\|W_oGW_i - W_oG_rW_i\|_\infty < \gamma \quad (16)$$

을 만족하면서 γ 를 최소화하는 $G_r = (A_r, B_r, C_r, D_r)$ 을 찾는 문제는 보조정리 1의 Bounded Real Lemma로부터

$$\left[\begin{array}{ccc|c} X\bar{A} + \bar{A}^T X & X\bar{B} & \bar{C}^T & \\ \hline \bar{B}^T X & -\gamma I & \bar{D}^T & \\ \hline \bar{C} & \bar{D} & -\gamma I & \end{array} \right] < 0 \quad (17)$$

을 만족하면서 γ 를 최소화하는 행렬 $X > 0$ 와 G_r 을 찾는 문제와 동일하다. 여기서 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 는 $(W_oGW_i - W_oG_rW_i)$ 의 상태공간표현이며, 식 (8), (10), (11)로부터 W_oGW_i 의 상태공간식 (13)을 얻는 방법과

같은 방법으로 식 (9), (10), (11)로부터 $W_oG_rW_i$ 의 상태공간식도 비슷하게 구할 수 있다. 이로부터 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 는

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & \bar{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{A} & 0 & 0 & 0 & \bar{B} \\ 0 & A_i & 0 & 0 & B_i \\ 0 & B_rC_i & A_r & 0 & B_rD_i \\ 0 & B_oD_rC_i & B_oC_r & A_o & B_oD_rD_i \\ \hline \bar{C} & -D_oD_rC_i & -D_oC_r & -C_o & \bar{D} - D_oD_rD_i \end{array} \right] \quad (18)$$

와 같이 구할 수 있다. 이때 대칭행렬 X 를 식 (14)와 같은 형태로 두고 식 (14)와 (18)을 식 (17)에 대입하면 식 (12)의 행렬부등식을 유도할 수 있다. 여기서 식 (12)는 γ 를 최소화하는 (A_r, B_r, C_r, D_r) 와 $X > 0$ 를 찾는 BMI문제이다. ■

보조정리 2 (A_r, B_r, C_r, D_r) 을 상수로 두면 식 (12)는 변수 X 에 대한 LMI가 된다. 또한 $N_2, N_3, L_{12}, L_{13}, L_{22}, L_{23}, L_{33}$ 를 상수로 두면 식 (12)는 변수 S, N_1, L_{11} 과 (A_r, B_r, C_r, D_r) 에 대한 LMI가 된다.

정리 1과 보조정리 2를 이용하여 주파수하중 모델 차수축소 문제를 해결하는 반복적 알고리즘을 유도할 수 있다.

알고리즘 1 고차모델과 저차모델을 식 (8)과 (9)같이 정의하고, 입력 하중함수와 출력 하중함수를 식 (10)과 (11)같이 정의할 때, 주파수하중 모델 차수축소 문제에서 최소의 γ 를 만족하는 (A_r, B_r, C_r, D_r) 은

과정 1. 고차모델 $G(s)$ 로부터 최적 한켈노름 근사화를 이용하여 $G_r(s)$ 을 구한다.

과정 2. 과정 1에서 얻은 (A_r, B_r, C_r, D_r) 을 고정시키고 식 (12)의 LMI에서 X 에 대하여 γ 를 최소화시킨다.

과정 3. 과정 2에서 얻은 값으로 $N_2, N_3, L_{12}, L_{13}, L_{22}, L_{23}, L_{33}$ 를 고정시키고 식 (12)의 LMI에서 $S, N_1, L_{11}, A_r, B_r, C_r, D_r$ 에 대하여 γ 를 최소화시킨다.

과정 4. 만족하는 γ 를 구할 때까지 과정 2와 3을

반복한다.

의 과정으로 구할 수 있다.

III. 성능보장을 위한 제어기 차수축소

일반적으로 선형분수변환(LFT : linear fractional transformation) 구조는 제어시스템에서 다양한 케환구조를 표준화하는 수단으로서 표준플랜트 구조의 전달함수를 나타내고 그림 1와 같은 구조를 가진다. 여기서 w 는 외부입력, u 는 제어입력, z 는 제어할 출력, y 는 측정출력, P 는 표준플랜트, K 는 제어기를 나타낸다.

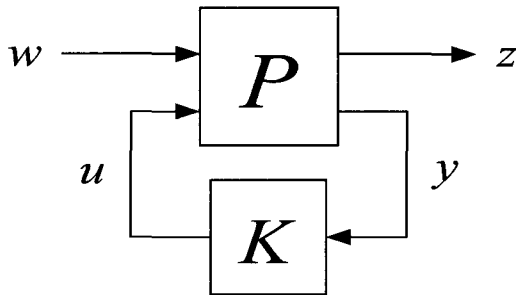


그림 1. 선형분수변환
Fig. 1. Linear fractional transformation.

그림 1에서 고차제어기 $K \in H_\infty$ 이고 플랜트가

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \in H_\infty \quad (19)$$

일 때 w 에서 z 까지의 전달함수 T_{zw} 는

$$T_{zw} := F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (20)$$

이고 저차제어기 K_r 에 대한 전달함수 T_{zw}^r 은

$$T_{zw}^r := F_l(P, K_r) = P_{11} + P_{12}K_r(I - P_{22}K_r)^{-1}P_{21} \quad (21)$$

이다. 일반적 제어기 차수축소 기법은 축소오차 $\|T_{zw} - T_{zw}^r\|_\infty$ 을 최소로 하는 K_r 을 찾는 문제이다. 성능보장 측면에서는 페루프 시스템의 안정성과 성능을 고려한 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 에 대하여 $\|T_{zw}^r\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 T_{zw}^r 을 찾는 문제로 접근하는 것이 좋다.

저차제어기를 가지는 페루프 전달함수의 집합은

$$T_{zw}^r = T_{zw} + W_2 \Delta W_1 \quad (22)$$

이다. 여기서 Δ 은 안정한 섭동, W_1 과 W_2 는 각각 안정한 가역 하중함수(invertible weighting functions)이다. 성능보장을 위한 제어기 차수축소 설계는 제어기 K 의 차수를 축소시키면서 $\|T_{zw}^r\|_\infty$ 을 가능한한 작게 만드는 제어기를 찾는 문제이다. 식 (22)는

$$\begin{aligned} \Delta &= -W_2^{-1}(T_{zw} - T_{zw}^r)W_1^{-1} \\ &= -W_2^{-1}(F_l(P, K) - F_l(P, K_r))W_1^{-1} \\ &\approx -W_2^{-1}V_2(K - K_r)V_1W_1^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

과 같이 K_r 에 대하여 표현 가능하다. 여기서, $V_1 = (I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$ 이고 $V_2 = P_{12}(I + K(I - P_{22}K)^{-1}P_{22})$ 이다. 식 (23)에서 T_{zw}^r 이나 K_r 을 구하기 위해서 주피수하중 모델 차수축소 기법을 사용해야 함을 알 수 있다.

보조정리 3^[4] $\|T_{zw}\|_\infty := \sigma < 1$ 로 두고 W_1, W_2 를 안정하고 최소위상(non-minimum phase)을 가지는 가역 하중함수로 가정할 때

$$\begin{bmatrix} I - W_2 \tilde{W}_2 & T_{zw} \\ T_{zw}^r & I - W_1^{-1} W_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

$$\|W_2^{-1}(T_{zw} - T_{zw}^r)W_1^{-1}\|_\infty < 1 \quad (25)$$

의 두 조건을 만족하면, $\|T_{zw}^r\|_\infty < 1$ 이다. 여기에서 $W_1^{-1}(s) := W_1^T(-s)$ 이다.

식 (25)의 $\|W_2^{-1}(T_{zw} - T_{zw}^r)W_1^{-1}\|_\infty$ 이 가능한한 작게 되기 위해서는 $W_2^{-1}T_{zw}W_1^{-1}$ 의 크기가 가능한한 작아야 한다. 한편, 보조정리 3에서 $\|T_{zw}^r\|_\infty < 1$ 를 만족하기 위해서는 충분조건인 식 (24)와 (25)를 동시에 만족하는 K_r 을 구하여야 한다. 두 식을 동시에 만족시키는 K_r 을 구하기 위하여 식 (24)를 만족하는 하중함수 W_1, W_2 를 구하면 식 (25)는 $K_r := (A_r, B_r, C_r, D_r)$ 을 구하는 제안한 알고리즘의 형태를 가진다. 식 (24)로부터 $\|W_2^{-1}T_{zw}W_1^{-1}\|_2 := \text{Trace}(W_2^{-1}T_{zw}W_1^{-1}W_1^{-1}W_2^{-1})$ 를 최소화시키는 하중함수

W_1, W_2 유도하면

$$W_1^* W_1 = I - \sqrt{T_{zw}^* T_{zw}} \quad (26)$$

$$W_2^* W_2 = I - \sqrt{T_{zw}^* T_{zw}} \quad (27)$$

이다. 한편, 식 (26)과 (27)에서 W_1 과 W_2 를 구할 때 근사화가 이용되고 계산이 어려우므로 W_2 를 상수로 두고 스펙트럴 인수분해(spectral factorization)를 이용하여 W_1 을 구하면

$$W_1^* W_1 = I - \sigma^{-1} T_{zw}^* T_{zw} \quad (28)$$

$$W_2 = (1 - \sigma)^{\frac{1}{2}} I \quad (29)$$

이다.

IV. 모의실험

제안한 알고리즘의 유용성을 보여주기 위해 몇가지 예를 보인다. 예제 1과 예제 2에서는 Latham 등이 제안한 주파수하중 한켈근사화 기법과 Enns 등이 제안한 주파수하중 균형절단 차수축소 기법과 제안한 알고리즘의 축소오차를 비교하고, 예제 3에서는 HIMAT의 종축운동을 위한 제어기의 성능보장을 위한 차수축소 문제를 고려한다. 모의실험은 MATLAB의 LMI Control Toolbox^[11]를 이용하여 구현하였다.

예제 1^[7]

주어진 6차모델과 하중함수는

$$G(s) = \frac{1}{s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + 1} \quad (30)$$

$$W_a = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2as + 1} \quad (31)$$

이고 $a_1 = 3.8637, a_2 = 7.4641, a_3 = 9.1416, a_4 = 7.4641, a_5 = 3.8637$ 이다. 주어진 모델에서 $\alpha = 0.1$ 일 때와 $\alpha = 0.01$ 일 때의 하중함수의 주파수응답은 그림 2와 같다.

식 (30)의 6차모델을 주파수하중 한켈근사화 기법과 주파수하중 균형절단 차수축소 기법과 제안한 알고리즘을 이용하여 각각의 하중함수 $W_{0.1}, W_{0.01}$ 에 대하여 4차의 축소모델 $G_r(r=4)$ 을 구하였다. 하중 축소오차 $\gamma = \|W_a(G - G_r)\|_\infty$ 의 비교는 표 1과 같다. 각각

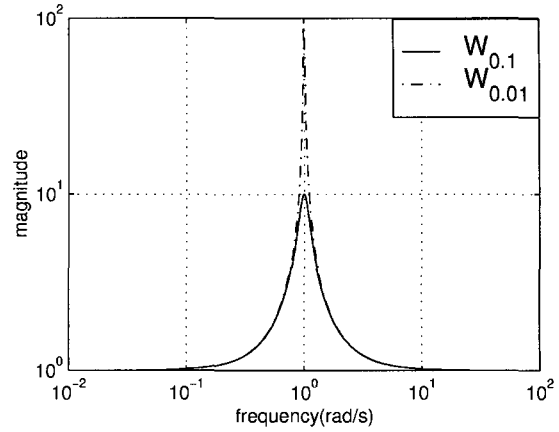


그림 2. 하중함수의 주파수응답
Fig. 2. Frequency response of weighting.

표 1. α 값에 따른 하중 축소오차

Table 1. Weighted reduction errors for α .

방법 \ α	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.01$
Latham 등	0.5073	10.5989
Enns 등	8.8715	74.9600
Proposed	0.0511	0.5157

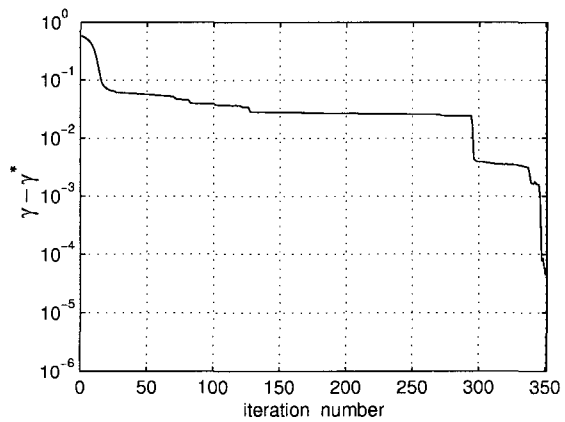


그림 3. γ 값의 수렴성 ($\alpha=0.01$)
Fig. 3. Convergence of γ for $\alpha=0.01$.

의 하중함수에 대한 하중 축소오차의 비교로 제안한 알고리즘의 하중 축소오차 γ 가 다른 기법에 비하여 작음을 확인할 수 있다. $\alpha = 0.01$ 일 때 제안한 알고리즘의 γ 값의 수렴성은 그림 3과 같다. γ^* 는 반복적 과정을 통하여 얻은 최소의 γ 값이고, 351번의 반복으로 γ^* 로 수렴함을 알 수 있다.

$\alpha = 0.01$ 일 때의 하중 축소오차의 주파수응답은

그림 5와 같다. 그림 5에서 가중치를 둔 1 rad/s 근처의 주파수 영역에서 제안한 방법이 다른 방법에 비하여 오차가 월등히 작음을 확인할 수 있고 H^∞ -노름 관점에서 제안한 방법으로 구한 저차모델의 하중 축소오차가 Enns 등의 방법보다 145배, Latham 등의 방법보다 20배 작음을 알 수 있다. 하중 축소오차를 다른 방법들과 비교함으로써 제안한 알고리즘이 우수함을 확인할 수 있다.

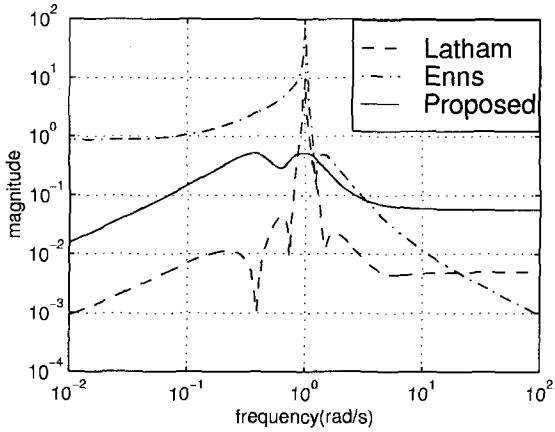


그림 4. 하중 축소오차의 주파수응답($\alpha=0.01$)
Fig. 4. Frequency response of weighted reduction errors for $\alpha=0.01$.

예제 2^[12]

그림 5의 HIMAT에서 공칭플랜트 G_{nom} 는 네 개의 상태(전방속도, 받음각, 피치율, 피치각)와 두 개의 측정 출력(받음각, 피치각)과 두 개의 제어입력(엘레본 위치 명령, 귀날개 위치명령)을 가진다. 모든 $\|\Delta_G\| < 1$ 에 대하여 외란 $[\hat{w}^T d^T]^T$ 에서 오차 $[e^T \hat{z}^T]^T$ 까지의 전달함수의 노름값을 1보다 작게 하는 하중함수와 같이 설정한다. 여기에서 $d=[d_1^T d_2^T]^T$, $e=[e_1^T e_2^T]^T$ 이다.

$$W_{del} = \begin{bmatrix} \frac{29(s+100)}{s+10000} & 0 \\ 0 & \frac{29(s+100)}{s+10000} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$W_p = \begin{bmatrix} \frac{0.3(s+3)}{s+0.3} & 0 \\ 0 & \frac{0.3(s+3)}{s+0.3} \end{bmatrix} \quad (33)$$

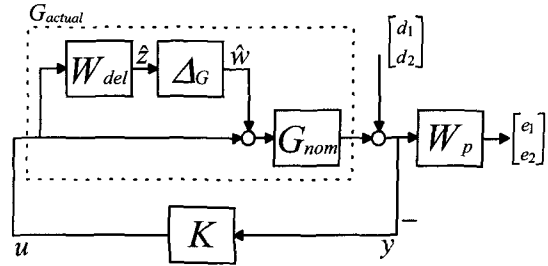


그림 5. HIMAT 시스템의 블록선도
Fig. 5. Block diagram of HIMAT system.

공칭플랜트 G_{nom} 와 하중함수 W_{del} 과 W_p 를

$$G_{nom} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$W_{del} = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$W_p = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix} \quad (36)$$

로 두고 LFT 구조의 표준플랜트 P 를 구하면

$$P = \begin{bmatrix} A_n & 0 & 0 & B_n & 0 & B_n \\ 0 & A_d & 0 & 0 & 0 & B_d \\ B_p C_n & 0 & A_p & 0 & B_p & 0 \\ 0 & C_d & 0 & 0 & 0 & D_d \\ D_p C_n & 0 & C_p & 0 & D_p & 0 \\ -C_n & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

이다.

Glover-Doyle 알고리즘을 이용하여 구한 8차의 제어기 K 에 대한 페루프 전달함수의 H^∞ -노름값을 구하면

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = 0.9950 \quad (38)$$

이다. 최적 한켈노름 근사화 기법을 이용하여 제어기 K 를 5차로 축소한 저차제어기 \hat{K} 에 대한 페루프 전달함수의 노름값은

$$\|F_l(P, \hat{K})\|_\infty = 1.1912 \quad (39)$$

이다. 저차의 성능보장을 위한 제어기를 구하기 위하여

제한한 알고리즘을 이용하여 식 (39)의 페루프 전달함수의 노름값을 최적화시켜야 한다. 제한한 알고리즘을 이용하여 구한 5차의 제어기 $K_r(r=5)$ 에 대한 페루프 전달함수의 노름값은

$$\|F_l(P, K_r)\|_\infty = 1.0201 \quad (40)$$

의 값을 가진다. 식 (40)의 결과는 Wang 등이 제시한 보조정리 3을 위배하지만 이는 식 (23)의 근사화에 기인하는 것이므로, 식 (40)의 γ 값이 식 (38)의 값에 비하여 0.025만큼 크므로 K_r 을 차수축소에 있어서 개선된 성능을 보장하는 제어기로 볼 수 있다. K_r 과 K 의 페루프 특이치 응답을 비교한 그림 6에서 제안한 알고리즘을 통하여 구한 저차제어기의 성능만족을 확인할 수 있다.

저차제어기의 성능보장을 확인하기 위하여 견실안정성(robust stability: RS)과 공칭성능(nominal performance: NP)을 비교해 볼 수 있다. 제어기 K 가 모든 불확실성을 포함한 모델집합 G_{actual} 을 내부적으로 안정시키면 페루프 시스템은 견실안정성을 가지고, 공칭모델 G_{nom} 에 대하여 제어목적이 만족하면 페루프 시스템은 공칭성능을 가진다. 그림 5의 페루프 시스템이

$$\|W_{del}KG_{nom}(I + KG_{nom})^{-1}\|_\infty < 1 \quad (41)$$

을 만족하면 견실안정성을 가지고,

$$\|W_p(I + G_{nom}K)^{-1}\|_\infty < 1 \quad (42)$$

을 만족하면 페루프 시스템은 공칭성능을 가진다. H_∞

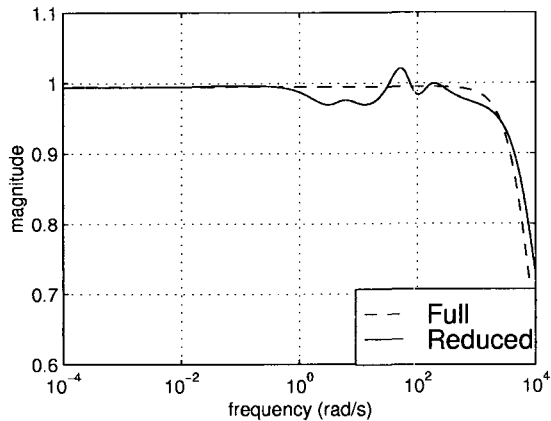


그림 6. 페루프 시스템의 특이치 응답
Fig. 6. Singular value plot of closed loop system.

이론으로 구한 8차의 고차제어기 K 를 포함하는 견실안정성과 공칭성능은 그림 7과 같고 제한한 알고리즘으로 구한 5차의 저차제어기 K_r 을 포함하는 견실안정성과 공칭성능은 그림 8과 같다. 두 그림의 비교에서 5차의 저차제어기가 성능을 보장하면서 8차의 고차제어기를 대체 가능함을 알 수 있다.

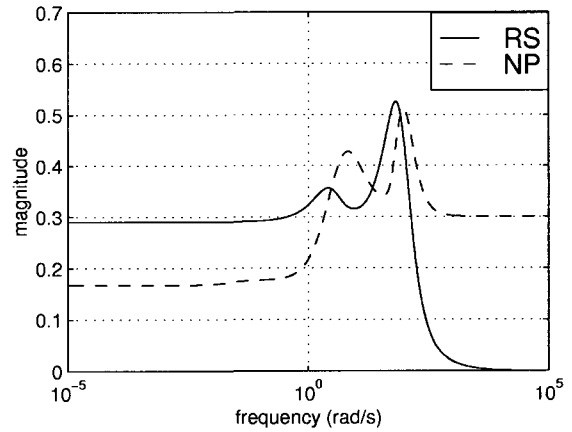


그림 7. 고차시스템의 견실안정성과 공칭성능
Fig. 7. Robust stability and nominal performance of full order system.

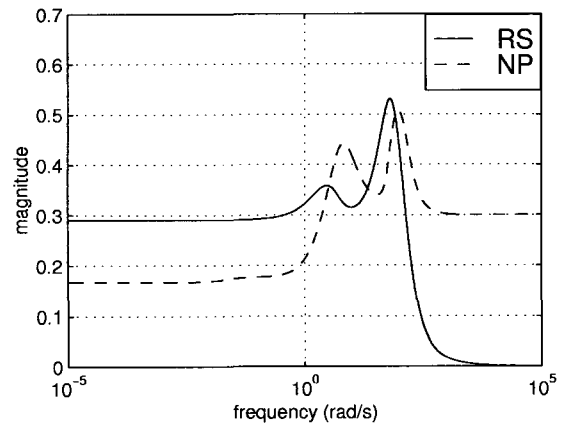


그림 8. 저차시스템의 견실안정성과 공칭성능
Fig. 8. Robust stability and nominal performance of reduced order system.

V. 결 론

본 논문에서는 BRL로부터 저차의 주파수하중 모델을 구하는 행렬부등식을 유도하고, 비선형 성분을 포함하는 행렬부등식을 두 개의 LMI로 나누어 반복적 방법으로 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 또한 제한한

알고리즘이 성능보장을 위한 제어기 차수축소기법으로 확장 가능성을 확인하였다. 마지막으로 기존의 주파수 하중 모델 차수축소 논문에 나타난 수치적 예제를 인용하여 제안한 알고리즘이 기존의 방법보다 작은 하중 축소오차를 가짐을 보였으며 HIMAT 시스템에 제안한 알고리즘을 적용하여 성능을 보장하는 저차제어기를 구함으로써 제안한 알고리즘의 유용성을 보였다. 향후 제안한 행렬부등식의 수렴성에 관한 수식적인 증명과, 양선형행렬부등식 즉 BMI의 global optimum에 관한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Kargonekar, and B. A. Francis, "State space solutions to standard H₂ and H_∞ control problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 831-847, Aug. 1989.

[2] B. D. O. Anderson and Y. Liu, "Controller reduction: Concepts and approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 802-812, Aug. 1989.

[3] P. J. Goddard and K. Glover, "Controller approximation: Approaches or preserving H_∞ performance," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 43, pp. 858-870, July 1998.

[4] G. Wang, V. Sreeram, and W. Q. Liu, "Performance preserving controller reduction via

additive perturbation of closed loop transfer function," *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, pp. 1697-1702, Aug. 1998.

[5] K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, 1998.

[6] D. Enns, "Model Reduction for Control Systems Design," Ph. D. dissertation, Stanford Univ., 1984.

[7] G. A. Latham and B. D. O. Anderson, "Frequency weighted optimal Hankel-norm approximation of stable transfer function," *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 5, pp. 229-236, 1986.

[8] A. Helmersson, "Model reduction from an H_∞ / LMI perspective," *Europ. Cont. Conf.*, pp. 232-238, Oct. 1995.

[9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[10] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, 1995.

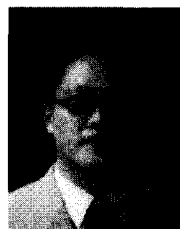
[11] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc., 1995.

[12] G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith, *μ-analysis and Synthesis Toolbox*, The MathWorks Inc., 1991.

저 자 소 개



金 勇 兪(正會員)
1998년 경북대 전자전기 공학부 졸업. 동대학원 석사(2000). 1999. 1 2.~2000. 6 현대전자 통신시스템 BU 3G비동기연구팀 연구원. 2000. 8.~현재 한국전자통신연구원(ETRI) 네트워크 연구소 라우터 기술연구부 연구원. 관심분야는 건설제어, 기기비트 이더넷, 흐름 제어.



吳 道 昌(正會員)
1991년 경북대 전자공학과 졸업. 동 대학원 석사(1993), 박사(1997). 1997. 3~1997. 8 창원대학교 국제초빙교수. 1997.8~현재 건양대학교 조교수. 관심분야는 H_∞제어, 모델 및 제어기 차수축소, 시간지연제어, 대규모시스템제어, 통신시스템제어.

朴 烘 培(正會員) 第36卷 S編 第5號 參照
현재 경북대학교 전자전기공학부 교수.