Commun. Korean Math. Soc. **17** (2002), No. 3, pp. 371–382

초청논문

열용량 점근에 관하여

박정형

요 약. 경계를 통해서 유출되는 에너지 양을 측정하는 전체열용량 (total heat energy content)은 짧은 시간 극한에서 점근식을 갖는데 그 계수 β_n은 기하학적 양에 의해서 국소적으로 계산 가능한 스펙트럴 불변량이다. 이 논문에서는 열용량 점근에 대하여 저자의 관심사항을 중심으로 최근까지 연구 되어진 바에 대하여 검토 및 정리해 보고자 한다.

제 1 절 서 론

열용량 점근(Heat content asymptotics)은 본질적으로 열역학에서 유래되었는데 빌딩으로부터 주위 공기로 열흐름을 기술하는 데 사용할 수 있었다.

다음과 같은 물리적인 문제를 생각해 보자.

문제 1.1. *등온인 3차원 입체 M을 더 낮은 온도를 갖는 물에 넣었다고 가정하자. 시간 $t > 0$와 위치 $x \in M$에서 온도 분포를 $u(x,t)$라고 하면 M의 전체 열용량(total heat energy content) $\beta(t) = \int_M u(x,t)dx$로 표시된다. 이때 단시간에서 M에 남아 있는 열의 양은 얼마인가?*

물론 시간이 흘러감에 따라 전체 열용량은 점점 주위의 낮은 온도의 물로 흘러 가서 시간이 무한히 흘러가면 사라질 것이다. 그러나 단시간 $t \downarrow 0^+$에서 전체의 열은 의미분 연산자(pseudo differential operator)의 해석학에 의하면 다음과 같은 점근식

$$\beta(t) = \sum \beta_n t^n$$

Received April 22, 2002.
2000 Mathematics Subject Classification: 58J50.
Key words and phrases: heat content asymptotics, Neumann, Dirichlet boundary conditions, time dependent metric.
본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R04-2000-000-00002-0)지원으로 수행되었음.

이 존재함이 잘 알려져 있다. 이 때 그 계수는 국소적으로 계산되어질 수 있고 기하학적인 양으로 표시 될 수 있음을 알 수 있다. 이 계수 $\beta_n(\cdot)$를 열용량 점근(heat content asymptotics)이라고 한다.

이 논문에서는 국소 경계 조건을 가지는 다양체에서 단시간의 전체 열용량(total heat energy content)의 점근에 대하여 저자가 관심있는 사항을 중심으로 최근까지 연구되어진 바에 대하여 검토 및 정리해 보고자 한다.

2절에서는 β_n을 용이하게 구하기 위해서 불변정리(invariance theory), 곱셈공식(product formulas), 점화관계(recursion relations)등을 소개 하고 [1, 3, 6, 9]을 중심으로 정적(static)이고 동차 상황(homogeneous setting)인 경우, 열용량 점근에 대하여 소개한다.

3절에서는 정적(static)이고 비동차 상황(inhomogeneous setting)인 경우 [5, 12, 18] 을 중심으로 얻어진 열용량 점근을 소개한다.

4절에서는 비정적(nonstatic)이고 비동차 상황인 경우 [4, 10, 13]을 중심으로 열용량 점근을 구하고자 한다.

5절에서는 [7, 14, 18]을 중심으로 리이만 서브머젼에서 활용 및 미해결 문제를 제시한다.

제 2 절 시간에 무관한 동차 상황에서 열용량 점근

M은 차원이 m인 매끄러운 경계를 가진 콤팩트인 리이만 다양체라고 하고 V는 M 위의 벡터 번들이라고 하자. D는 M상의 라프라스형 미분 연산자라고 하자. 경계(∂M)는 노이만 성분(Neumann component) C_N와 디리클레 성분 (Dirichlet component) C_D의 closed disjoint union $\partial M = C_N \cup C_D$이라고 하자. 경계 조건을 부과하는 경계 연산자를 B라고 하면 경계 조건은

$$Bu := u|_{C_D} \oplus (u_{;m} + Su)|_{C_N}$$

로 주어졌다고 하자. 여기서 $u_{;m}$은 u를 내부 단위 법선 벡터장으로 공변미분한 것이고 S는 C_N으로 제한하였을 때 자기 동형군으로 열이동과 경계의 온도와의 관계를 제어하는 것이다. 위 경계 조건은 C_D에는 디리클레 경계 조건을 C_N에는 수정된 노이만 경계 조건을 주는 것을 의미한다. 위 경계 조건에서 특히 $S = 0$이면 C_N은 순수 노이만 경계 조건을 주는

것을 의미한다. M의 초기 온도 분포를 ϕ라고 하고, $p(x;t) \in C^\infty(V)$는 M상의 열원(potential function)이라고 하고, $\psi(y;t) \in C^\infty(V|_{\partial M})$는 경계에서의 온도라고 할 때 시간 $t > 0$와 위치 $x \in M$에서 온도 분포 $u_{p,\phi,\psi;D}(x;t)$는 다음 미분 방정식의 해이다.

$$(\partial_t + D)u_{p,\phi,\psi;D}(x;t) = p(x;t),$$
$$u_{p,\phi,\psi;D}(x;0) = \phi(x),$$
$$Bu = \psi.$$

이는 디리클레 성분 C_D에서는 경계에서 온도 ψ를 유지하고 노이만 성분 C_N에서는 경계에서 ψ에 의해 결정되는 일정율로 절연하는 것을 의미한다. $\rho(x;t)$은 다양체의 특정 열이라고 할 때, ρ는 쌍대 번들(dual bundle) V^*의 절단(section)으로 간주할 수 있다. dx, dy는 각각 M과 경계상의 리이만측도(Riemannain measure)라고 하자. p, ϕ, ψ, ρ는 미분가능하다고 가정하며 $\langle \cdot, \cdot \rangle$는 V와 쌍대 번들 V^*사이의 자연스런 짝(natural pairing)이라고 하면 다양체 M의 전체 열용량 β는 다음과 같이 주어진다.

$$\beta(p,\phi,\psi,\rho;D)(t) := \int_M \langle u_{p,\phi,\psi;D}(x;t), \rho(x;t)\rangle dx.$$

그러면 $t \downarrow 0$일 때 의미분 연산자(pseudo differential operator)의 타원적 방법(elliptic method)에 의해 다음과 같은 점근식이 존재함이 알려져 있다.

$$\beta(p,\phi,\psi,\rho;D) \sim \sum_{n\geq 0} \beta_n(p,\phi,\psi,\rho;D)t^{\frac{n}{2}},$$

이 때 계수 $\beta_n(\cdot)$를 열용량 점근(heat content asymptotics)이라고 하고 이는 단시간 내의 열흐름을 나타낸다. $u_{p,\phi,\psi;D}(x;0) = \phi(x)$이므로 초기 전체 열용량 β_0는

$$\beta_0(\cdot) = \beta(\cdot)(0) = \int_M \langle \phi, \rho \rangle dx$$

로 나타내어진다. 여기서 데이타와 연산자가 t에 무관한 경우 정적(static)이다고 말하고, 특히 $p = 0$이고 $\psi = 0$라면 동차 상황(homogeneous setting)이라고 말한다. 열용량 점근은 내부 불변량과 경계 불변량으로 분해해서 다음과 같이 씌여진다.

$$\beta_n(p,\phi,\psi,\rho) = \int_M \beta_n^{int}(p,\phi,\psi,\rho)dx + \int_{\partial M} \beta_n^{\partial M}(p,\phi,\psi,\rho)dy.$$

우변의 첫항은 내부항으로 경계조건에 무관하며, M상의 기하학적 불변량으로 나타내지며 반면에 우변의 둘째항은 경계항으로 경계상의 기하학적 양에 의해 나타내지며 전적으로 경계조건에 의존한다.

특정 열 ρ를 테일러 전개하면

$$\rho(x;t) = \sum_{0 \le k < k_0} \rho_k(x) t^k + O(t^{k_0})$$

이 되고 열용량 함수 β_n은

$$\beta_n(p, \phi, \psi, \rho; D) = \sum_{2k+l=n} \beta_l(p, \phi, \psi, \rho_k; D)$$

로 나타낼 수 있다. 그러면 $\rho = \rho(x)$는 정적이다고 가정할 수 있다.

2.1. 불변 정리(Invariance Theory)

열용량 불변량을 용이하게 산출하기 위해서 차원 분석(dimension analysis)을 이용하여 β_n의 기본적 성질을 구해보자. 이론을 단순화하기 위해서 동차 상황에서 연구해 보자. 열방정식의 기본해를 e^{-tD_B}라고 하자. ε은 실수라고 하고 $D(\varepsilon) := \varepsilon^2 D$라고 하면

$$\begin{aligned}\sum_n \beta_n(0, \phi, 0, \rho; D(\varepsilon)) t^{\frac{n}{2}} &\simeq \int_M \langle e^{-t\varepsilon^2 D_B}\phi, \rho\rangle dx(\varepsilon^{-2} g) \\ &= \varepsilon^{-m} \int_M \langle e^{-(t\varepsilon^2)D_B}\phi, \rho\rangle dx(g) \\ &\simeq \varepsilon^{-m} \sum_n \beta_n(0, \phi, 0, \rho; D)(\varepsilon^2 t)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

이 된다. 그러므로

$$\beta_n(0, \phi, 0, \rho; \varepsilon^2 D) = \varepsilon^{n-m} \beta_n(0, \phi, 0, \rho; D) \tag{1}$$

를 얻는다.

차원 분석((1)에 의해서 주어지는 scaling 성질을 말함)을 이용하면 β_n^{int}는 차수가 n인 동차식이고 β_n^{int}은 차수가 $n-1$인 동차식임을 알 수 있으며 열용량 점근은 다음과 같이 나타내어 질 수 있음을 알 수 있다.

$$\beta_n(0, \phi, 0, \rho; D) = \sum_{I,J} \int_M p_{I,J} \phi_{;I} \rho_{;J} dx + \sum_{I,J} \int_{\partial M} p^B_{I,J} \phi_{;I} \rho_{;J} dy.$$

여기서 계수들 $p_{I,J}$, $p^B_{I,J}$은 스칼라 곡률, 제 2기본량 등과 같은 미분연산자의 국소 불변량으로 표시될 수 있으며 $\phi_{;I}$과 $\rho_{;J}$는 ϕ와 ρ의 다중 공변 미분이다. 내부 불변량 $p_{I,J}$는 계량 텐서, R, Ω, E등으로 다항식의 표현을 갖는 데 Weyl에 의하면 이 다항식은 텐서적, 축약 등에 의해서 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 이때 다항식의 계수들은 다양체의 차원에 무관한 전체적으로 상수임을 알수 있다. (1)을 이용하면 내

부 불변량 $p_{I,J}$에서 (R, Ω, E)의 차수가 (k_R, k_Ω, k_E)이고 k_∇가 실제로 공변 미분한 횟수라면 $2k_R + 2k_\Omega + 2k_E + k_\nabla + |I| + |J| = n$이 되고, 경계불변량 $p^B_{I,J}$에서 (R, Ω, E, L)의 차수가 $(k_R, k_\Omega, k_E, k_L)$라고 한다면 $2k_R + 2k_\Omega + 2k_E + k_L + k_\nabla + |I| + |J| = n-1$이 된다. 여기서 주의할 점은 $p_{I,J}$와 $p^B_{I,J}$는 유일하게 결정되지 않으므로 부분 적분에 의해서 불필요한 항을 소거하는 것이다. 또한 차원 분석을 이용하면 ϕ, ρ는 가중치 0을 주고 L, S는 가중치 1을 주고 R, Ω, E는 가중치 2을 주며 공변 미분을 한번씩 할 때마다 가중치는 하나씩 증가함을 알 수 있다.

2.2. 적공식과 회귀관계(product formulas and recursion relations)

D_1, D_2는 t에 독립인 미분 연산자이고 경계를 가지지 않은 다양체 M_1과 경계를 가진 다양체 M_2와의 적다양체를 $M = M_1 \times M_2$라고 하자. M의 연산자를 D라고 하면 D, ϕ, ρ는 $D = D_1 + D_2$, $\phi = \phi_1\phi_2$, $\rho = \rho_1\rho_2$와 같이 분해할 수 있다. 그러면

$$\beta_n(0, \phi, 0, \rho; D) = \sum_{p+q=n} \beta_p(0, \phi_1, 0, \rho_1; D_1) \cdot \beta_q(0, \phi_2, 0, \rho_2; D_2)$$

이 된다. 만일 초기 조건 ϕ가 경계 조건을 만족한다면($B\phi = 0$), 다음과 같은 회귀 관계를 얻을 수 있다.

$$\beta_n(0, \phi, 0, \rho; D) = -\frac{2}{n}\beta_{n-2}(0, D\phi, 0, \rho; D).$$

2.3. 예 제

예제 2.1. 서론의 제기된 문제로 돌아가서 D가 스칼라 라프라션 $\triangle$인 경우, 구간 $[0, \pi]$에서 β_1를 구해보자.

제기된 문제는 $C_N = \phi$인 경우로서 온도분포는 다음 미분 방정식

$$(\partial_t + \triangle)u(x;t) = 0,$$
$$u(x;0) = 1, \quad x \in int(M),$$
$$u(y,t) = 0, \quad y \in \partial M$$

의 해이다. 해를 구하기 위해서 디리클레 경계 조건을 만족하는 라프라션의 스펙트럴 분해 $\{\phi_\nu, \lambda_\nu\}$를 잡자. 즉 이는 $L^2(M)$의 완비인 정규 직교 기저 $\{\phi_\nu\}$가 $\triangle\phi_\nu = \lambda_\nu\phi_\nu$이고 $B\phi_\nu = 0$ 임을 의미한다. ϕ의 후리에 계수를 $\gamma_\nu(\phi) = \int_M \phi_\nu\phi$라고 놓으면 제기된 문제는

$$1 = \sum_\nu \gamma_\nu\phi_\nu, \qquad u(x,t) = \sum e^{-t\lambda_\nu}\gamma_\nu\phi_\nu, \qquad \beta(t) = \sum e^{-t\lambda_\nu}\gamma_\nu^2$$

로 나타낼 수 있다. 구간 $[0,\pi]$에서 디리클레 경계조건을 가진 스칼라 라프라션 $\triangle = -\partial_x^2$의 스펙트럴 분해는 $\{\sin(nx), n^2\}_{n^2\geq 1}$이다. 상수 함수의 후리에 계수를 $\gamma_\nu = \int_M \phi_\nu$이라고 하면

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & n \equiv 1(2) \\ 0 & n \equiv 0(2) \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 결과적으로

$$\beta(t) = \beta_0 + \beta_1 t^{\frac{1}{2}} + O(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 1, n\equiv 1(2)} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 t}$$

임을 알 수 있으며 양변을 미분하여

$$\frac{1}{2}\beta_1 t^{-\frac{1}{2}} + O(1) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 1, n\equiv 1(2)} e^{-n^2 t}$$

임을 알 수 있다. $n = 2j+1$을 대입하고 포아송 합을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta_1 t^{-\frac{1}{2}} + O(1) &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n\equiv 1(2)} e^{-n^2 t} \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_j e^{-(j+\frac{1}{2})^2 (4t)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} + O(1) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 그러므로

$$\beta_1 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} = -\frac{2vol(\partial M)}{\sqrt{\pi}}$$

임을 알게 된다.

라프라스형 연산자는 국소적으로

$$D = -(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_{\nu +} A^\mu \partial_{\mu +} B)$$

으로 쓸 수 있는 데, 이는 유일한 V상의 접속 ∇과 V의 자기동형사상 E가 존재해서

$$D = -\{Trace(\nabla^2) + E\}$$

로 쓸 수 있다. 가령 예를 들면 D가 p형식에 작용하는 라프라션이라면 접속 ∇는 Levi-Civita 접속이고 E는 곡률에 의해서 주어지고 D가 스핀 라프라션이라면 ∇는 스핀 접속이고 E는 스칼라 곡률에 의해서 $E = -\frac{1}{4}\tau$로 주어진다. $\widetilde{D}$는 V^*의 수반 연산자라고 하면 $\widetilde{D}$에 의해서 정의되는 접속 $\widetilde{\nabla}$은 ∇의 쌍대 접속이다. 지수 i와 j는 1부터 m까지 움직이고 $\{e_i\}$는 M의 국소 정규 프레임장이라고 하자. 프레임을 정규화해서 e_m을 경계로 제한하면 내부 단위 법선 벡터가 되도록 잡자. 지수 a, b, c는 1부터 $m-1$까지 움직인다고 하자. ';'과 ':'는 각각 M과 ∂M의

Levi-Civita 접속에 의한 다중 공변 미분을 의미한다. R, τ, L과 Ω는 각각 리이만 곡률 텐서, 스칼라 곡률, 제 2 기본 형식과 접속 ∇의 곡률이라고 하자. 먼저 정적이고 동차 상황인 경우 다음의 정리를 얻을 수 있다. 증명은 [1, 3, 6]을 참고로 하고 관련된 논문은 [2, 16, 19, 20]등이 있다.

정리 2.1. *D, ρ가 t에 무관한 경우, 열용량 점근 β_n은 다음과 같다.*

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \beta_0(0,\phi,0,\rho;D) = \int_M \langle\phi,\rho\rangle dx.\\
&\text{(ii)}\ \beta_1(0,\phi,0,\rho;D) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{C_D}\langle\phi,\rho\rangle dy.\\
&\text{(iii)}\ \beta_2(0,\phi,0,\rho;D) = -\int_M\langle D\phi,\rho\rangle dx + \int_{C_N}\langle B\phi,\rho\rangle dy\\
&\qquad + \int_{C_D}\Big\{\big\langle \frac{1}{2}L_{aa}\phi,\rho\big\rangle - \langle\phi,\rho_{;m}\rangle\Big\}dy.\\
&\text{(iv)}\ \beta_3(0,\phi,0,\rho;D) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{C_D}\Big\{-\frac{2}{3}\langle D\phi,\rho\rangle - \frac{2}{3}\langle\phi,\widetilde{D}\rho\rangle\\
&\qquad + \frac{1}{3}\langle\phi_{:a},\rho_{:a}\rangle - \frac{1}{3}\langle E\phi,\rho\rangle\\
&\qquad + \Big\langle\big(\frac{1}{12}L_{aa}L_{bb} - \frac{1}{6}L_{ab}L_{ab} + \frac{1}{6}R_{amam}\big)\phi,\rho\Big\rangle\Big\}dy\\
&\qquad + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_{C_N}\langle B\phi,\widetilde{B}\rho\rangle dy.
\end{aligned}
$$

β_4도 구해졌지만 지면 관계상 생략한다. 여기서 β_n은 열이 주위 매개체로 어떻게 빠져 나가는 지를 알려주고 있다. 가령 β_0은 처음의 전체 열용량을 의미하고 β_1은 열이 디리클레 성분을 통해 주위 매개체로 빠지기 시작함을 의미하고 점근 전개에서 그외 고차항들은 제 2 기본량, 곡률등과 같은 기하학을 반영함을 의미한다.

제 3 절 시간에 무관한 비동차 상황에서 열용량 점근

해 u를 p, ϕ, ψ로 분해하면

$$u_{p,\phi,\psi;D} = u_{p,0,0;D} + u_{0,\phi,0;D} + u_{0,0,\psi;D}$$

를 얻을 수 있으며 결과적으로 열용량 함수 β_n는 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$\beta_n(p,\phi,\psi,\rho;D) = \beta_n(p,0,0,\rho;D) + \beta_n(0,\phi,0,\rho;D) + \beta_n(0,0,\psi,\rho;D)$$

우변의 불변량을 각각 분리해서 연구할수 있다. $\beta_n(0,*,0,\rho:D)$가 기본적 연구 대상이며 나머지 두 불변량 $\beta_n(\rho,0,0,\rho:D)$와 $\beta_n(0,0,\psi,\rho:D)$는 $\beta_n(0,*,0,\rho:D)$로 표현될 수 있음을 알 수 있다. 첫째, 열원이 p인 정적인 열용량 점근을 $\beta_n(0,*,0,\rho:D)$에 의해서 나타내면 다음과 같다.

정리 3.1 ([4]). *열원 $p\sim t^r p_r$를 테일러 전개하여 열원이 p인 정적인 열용량 점근을 구하면 다음의 관계를 만족한다.*

$$n\geq 2,\quad \beta_n(p,0,0,\rho;D)=\frac{2}{n}\beta_{n-2}(0,p,0,\rho;D).$$

둘째, 경계조건 ψ를 가진 정적인 열용량 점근을 $\beta_n(0,*,0,\rho:D)$로 나타내면 다음과 같다.

정리 3.2 ([5]). *적어도 최소한 한 개의 디리클레 경계 성분이 있다고 가정하자. 이 가정은 조화적으로 균형된 해의 존재를 의미한다. 그러므로 $Bh=\psi$를 만족하는 조화 함수 h를 구하면 다음의 회귀 관계를 만족한다.*

$$\beta_n(0,0,\psi,\rho;D)=-\beta_n(0,h,0,\rho;D).$$

제 4 절 시간에 종속된 비동차 상황에서 열용량 점근

기존의 연구에 있어서는 계산을 단순화하기 위해 계량(metric)을 시간에 무관하다고 가정하는 데 이 가정은 물리적인 관점에서 보면 자연스럽지 못하다. 예를 들면 우주의 초기 역사를 연구할 때, 대부분의 빅뱅 이론에 의하면 그 기하(즉 metric)는 시간에 상대적으로 빠르게 변화하고 있음을 알 수 있다. 여기서부터 시간에 종속된 연산자와 구분짓기 위해 D_0는 정적인 연산자를 나타내기로 하겠다. 다음과 같은 시간에 종속된 라프라스형 연산자족을 생각하자.

$$D:=D_0+\sum_{r>0}t^r\{G_{r,ij}(x)\nabla_i\nabla_j+F_{r,i}(x)\nabla_i+E_r(x)\},$$

여기서 G, F, E는 변분(variation)을 나타내는 텐서이다. 차원 분석에 의하면 G_r는 가중치 $2r$을 주고 F_r는 가중치 $2r+1$을 주고 E_r는 가중치 $2r+2$를 준다. 먼저 초기 조건이 시간에 종속된 경우 정적인 연산자에 의해 정의된 열용량 점근과 시간에 종속된 열용량 점근 사이의 관계를 구할 수 있다. 4절의 증명은 [10, 13]을 참고하기 바란다.

정리 4.1. *ρ가 시간 t에 무관한 경우, 다음의 관계식을 만족한다.*

(i) $\beta_n(0,\phi,0,\rho;D)=\beta_n(0,\phi,0,\rho;D_0),\qquad n=0,1,2.$

(ii) $\beta_3(0,\phi,0,\rho;D)=\beta_3(0,\phi,0,\rho;D_0)+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_{C_D}G_{1,mm}\langle\phi,\rho\rangle dy.$

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)}\ \beta_4(0,\phi,0,\rho;D) &= \beta_4(0,\phi,0,\rho;D_0)\\
&-\frac{1}{2}\int_M \langle G_{1,ij}\phi_{;ij}+F_{1,i}\phi_{;i}+E_1\phi,\rho\rangle dx\\
&+\int_{C_D}\Big\{\Big(\frac{7}{16}G_{1,mm;m}-\frac{1}{4}G_{1,mm}L_{aa}-\frac{5}{16}F_{1,m}\Big)\langle\phi,\rho\rangle\\
&-\frac{5}{16}G_{1,am}\langle\phi_{:a},\rho\rangle+\frac{1}{2}G_{1,mm}\langle\phi,\rho_{;m}\rangle\Big\}dy\\
&-\frac{1}{2}\int_{C_N} G_{1,mm}\langle B\phi,\rho\rangle dy.
\end{aligned}
$$

비동차 경계조건을 가진 정적인 열용량 점근과 시간에 종속된 연산자의 열용량 점근의 관계는 다음과 같다.

정리 4.2.

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \beta_n(0,0,\psi,\rho;D)=\beta_0(0,0,\psi,\rho;D_0), \qquad n=0,1,2.\\
&\text{(ii)}\ \beta_3(0,0,\psi,\rho;D)=\beta_3(0,0,\psi,\rho;D_0)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{C_D} G_{1,mm}\langle\psi_0^D,\rho\rangle dy.\\
&\text{(iii)}\ \beta_4(0,0,\psi,\rho;D)=\beta_4(0,0,\psi,\rho;D_0)+\int_{C_N}\frac{1}{2}G_{1,mm}\langle\psi_0^N,\rho\rangle dy\\
&\qquad+\int_{C_D}\Big\{-\frac{1}{2}G_{1,mm}\langle\psi_0^D,\rho_{;m}\rangle+\frac{5}{16}G_{1,am}\langle\psi_{0:a}^D,\rho\rangle\\
&\qquad+\Big(\frac{1}{4}G_{1,mm}L_{aa}-\frac{7}{16}G_{1,mm;m}+\frac{5}{16}F_{1,m}\Big)\langle\psi_0^D,\rho\rangle\Big\}dy.
\end{aligned}
$$

이제까지의 결과를 요약하면 다음의 정리를 얻는다.

정리 4.3. *M은 매끄러운 경계를 가진 콤팩트인 리이만 다양체라고 하자. 시간에 종속된 계량, 시간에 종속된 열원, 시간에 종속된 경계 조건, 시간에 종속된 특정 열에 의해서 정의되는 열용량 점근은 다음과 같다.*

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \beta_0(p,\phi,\psi,\rho;D)=\int_M\langle\phi,\rho\rangle dx.\\
&\text{(ii)}\ \beta_1(p,\phi,\psi,\rho;D)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{C_D}\langle\phi-\psi_0^D,\rho\rangle dy.\\
&\text{(iii)}\ \beta_2(p,\phi,\psi,\rho;D)=-\int_M\big\{\langle D_0\phi,\rho\rangle-\langle p_0,\rho\rangle\big\}dx\\
&\qquad+\int_{C_D}\Big\{\Big\langle\frac{1}{2}L_{aa}(\phi-\psi_0^D),\rho\Big\rangle-\langle(\phi-\psi_0^D),\rho_{;m}\rangle\Big\}dy
\end{aligned}
$$

$$+\int_{C_N}\Big\{\big\langle B\phi-\psi_0^N),\rho\big\rangle\Big\}dy.$$

(iv) $\beta_3(p,\phi,\psi,\rho;D)$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{C_D}\Big\{\frac{2}{3}\langle p_0,\rho\rangle-\frac{2}{3}\langle D_0\phi,\rho\rangle-\frac{2}{3}\big\langle(\phi-\psi_0^D),\widetilde{D_0}\rho\big\rangle\\
&+\frac{1}{3}\big\langle(\phi-\psi_0^D)_{:a},\rho_{:a}\big\rangle-\frac{2}{3}\langle\psi_1^D,\rho\rangle\\
&+\Big\langle\big(-\frac{1}{3}E+\frac{1}{12}L_{aa}L_{bb}-\frac{1}{6}L_{ab}L_{ab}\\
&+\frac{1}{6}R_{amam}-G_{1,mm}\big)(\phi-\psi_0^D),\rho\Big\rangle\Big\}dy\\
&+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_{C_N}\Big\{\big\langle(B\phi-\psi_0^N),\widetilde{B}\rho\big\rangle\Big\}dy.
\end{aligned}$$

(v) $\beta_4(p,\phi,\psi,\rho;D)$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\int_M\Big\{\langle p_1,\rho\rangle-\langle D_0p_0,\rho\rangle+\langle D_0\phi,\widetilde{D_0}\rho\rangle\\
&-\big\langle(G_{1,ij}\phi_{;ij}+F_{1,i}\phi_{;i}+E_1\phi),\rho\big\rangle\Big\}dx\\
&+\int_{C_D}\Big\{\frac{1}{4}L_{aa}\langle p_0,\rho\rangle-\frac{1}{2}\langle p_0,\rho_{;m}\rangle-\frac{1}{4}L_{aa}\langle\psi_1^D,\rho\rangle\\
&+\frac{1}{2}\langle\psi_1^D,\rho_{;m}\rangle+\frac{1}{2}\big\langle(D_0\phi)_{;m},\rho\big\rangle+\frac{1}{2}\big\langle(\phi-\psi_0^D),(\widetilde{D_0}\rho)_{;m}\big\rangle\\
&-\frac{1}{4}\langle L_{aa}D_0\phi,\rho\rangle-\frac{1}{4}\big\langle L_{aa}(\phi-\psi_0^D),\widetilde{D_0}\rho\big\rangle\\
&+\Big\langle\big(\frac{1}{8}E_{;m}-\frac{1}{16}L_{ab}L_{ab}L_{cc}+\frac{1}{8}L_{ab}L_{ac}L_{bc}-\frac{1}{16}R_{ambm}L_{ab}\\
&+\frac{1}{16}R_{abcb}L_{ac}+\frac{1}{32}R_{;m}+\frac{1}{16}L_{ab:ab}\big)(\phi-\psi_0^D),\rho\Big\rangle\\
&-\frac{1}{4}L_{ab}\big\langle(\phi-\psi_0^D)_{:a},\rho_{:b}\big\rangle-\frac{1}{8}\big\langle\Omega_{am}(\phi-\psi_0^D)_{:a},\rho\big\rangle\\
&+\frac{1}{8}\big\langle\Omega_{am}(\phi-\psi_0^D),\rho_{:a}\big\rangle\\
&+\big(\frac{7}{16}G_{1,mm;m}-\frac{1}{4}G_{1,mm}L_{aa}-\frac{5}{16}F_{1,m}\big)\big\langle(\phi-\psi_0^D),\rho\big\rangle\\
&-\frac{5}{16}G_{1,am}\big\langle(\phi-\psi_0^D)_{:a},\rho\big\rangle+\frac{1}{2}G_{1,mm}\big\langle(\phi-\psi_0^D),\rho_{;m}\big\rangle\Big\}dy
\end{aligned}$$

$$+\int_{C_N}\left\{\frac{1}{2}\langle Bp_0,\rho\rangle-\frac{1}{2}\big\langle(B\phi-\psi_0^N),\widetilde{D_0\rho}\big\rangle-\frac{1}{2}\langle D_0\phi,\widetilde{B}\rho\rangle\right.$$
$$-\frac{1}{2}\langle\psi_1^N,\rho\rangle+\Big\langle\big(\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}L_{aa}\big)(B\phi-\psi_0^N),\widetilde{B}\rho\Big\rangle$$
$$\left.-\frac{1}{2}G_{1,mm}\big\langle(B\phi-\psi_0^N),\rho\big\rangle\right\}dy.$$

제 5 절 미해결 문제

다음 정리는 D가 정적인 경우 리이만 서브머젼에서 열용량 점근의 활용이다. 증명은 [14]을 참고하기 바란다.

정리 5.1. *Z, Y는 경계를 가진 콤팩트, 리이만 다양체라고 하자. $\pi : Z \to Y$는 화이버 F가 폐 극소 다양체인 리이만 서브머젼이라고 하자. ϕ, ρ는 각각 Y상의 초기 온도, 특정열이라고 하자. $C_{N,Z} = \pi^{-1}C_{N,Y}$ 이고 $C_{D,Z} = \pi^{-1}C_{D,Y}$ 라고 가정하면 $\beta_n(0, \pi^*\phi, 0, \pi^*\rho) = vol(F)\beta_n(0, \phi, 0, \rho)$가 성립한다.*

주의. *열핵점근(Heat trace asymptotics)에서는 번들의 곡률 때문에 윗 정리가 성립하지 않는다.*

본 논문에서는 다양체의 경계가 $\partial M = C_D \cup C_N$의 closed disjoint union을 가정했다. 그러나 재미있는 문제는 $C_D \cap C_N$이 여차원 1인 ∂M의 부분 다양체일 경우에서 일어난다. 최근 Dower-Gilkey-Kirsten [10]에 의하면 $C_D \cap C_N$이 여차원 1인 ∂M의 부분 다양체라면 열핵 (Heat trace) $Tr_{L^2}(e^{-tD_B})$의 점근식이 존재하지 않음을 보였다.

문제 5.2. 윗 가정에서 전체 열용량에 대한 점근식 $\beta \cong \sum \beta_n t^{\frac{n}{2}}$은 존재하는가?

참고 문헌

[1] M. van den Berg, S Desjardins, and P Gilkey, *Functoriality and heat content asymptotics for operators of Laplace type*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **2** (1993), 147–162.

[2] M. van den Berg and J. F. Le Gall, *Mean curvature and the heat equation*, Math. Z. **215** (1994), 437–464.

[3] M. van den Berg and P. Gilkey, *Heat Content Asymptotics of a Riemannian Manifold with Boundary*, Journal of Functional Analysis **120** (1994), 48–71.

[4] ———, *The heat content asymptotics of a time-dependent process*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **130** A (2000), 307–312.

[5] ———, *Heat Content Asymptotics with inhomogeneous Neumann and Dirichlet boundary conditions*, Potential Analysis **14** (2001), 269–274.

[6] S. Desjardins, P. Gilkey, *Heat content asymptotics for operators of Laplace type with Neumann boundary conditions*, Math. Z. **215** (1994), 251–268.

[7] J. S. Dowker, P. B. Gilkey, and K. Kirsten, *On properties of the asymptotic expansion of heat trace for the N/D problem*, Int J. Math. **12** (2001), 505–517.

[8] P. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Diff. Geo. **10** (1975), 601–618.

[9] ———, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem(2nd edition)*, CRC Press, Boca Raton, Florida, ISBN 0-8493-7874-4 (1994).

[10] ———, *The heat content asymptotics for variable geometries*, J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999), 2825–2834.

[11] P. Gilkey and K. Kirsten, J. H. Park, *Heat content asymptotics for oblique boundary conditions*, accepted by Letters in Mathematical Physics.

[12] P. Gilkey, J. Leahy, and J. H. Park, *Spectral Geometry, Riemannian Submersions, and the Gromov-Lawson Conjecture*, CRC Press, ISBN 0-8493-8277-7 (1999).

[13] P. Gilkey and J. H. Park, *Heat content asymptotics of an inhomogeneous time dependent processes*, Modern Physics Letteres A **15** (2000), 1165–1179.

[14] ———, *The Bochner Laplacian, Riemannian submersions, Heat content asymptotics and Heat equation asymptotics*, Czech Math. J. **49** (1999), 2825–2834.

[15] G. Grubb, *Functional calculus of pseudo differential boundary problems*, Progress in Math. **65**, Birkhaüser, Boston (1986), 1983–1998.

[16] D. M. McAvity, *Surface energy from heat content asymptotics*, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993), 823–830.

[17] J. H. Park, *Continuous variation of eigenvalue and Garding's inequality*, Differential Geometry and Its Application **10** (1999), 187-189.

[18] J. H. Park and P. Gilkey, *Heat content asymptotics*, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **104** (2002), 185–188.

[19] A. Savo, *Uniform estimates and the whole asymptotic series of the heat content on manifolds*, Geometric Dedicata **73** (1998), 181-214.

[20] ———, *Heat content and mean curvature*, Rend. Mat. Appl. **18** (1998), 197-219.

[21] H. Weyl, *The classical Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton (1946).

호남대학교 자연과학대학
컴퓨터응용수학과
광주시 광산구 서봉동 59
506-714
E-mail: jhpark@honam.honam.ac.kr