

## 아크로벳 로봇의 정준형과 도립제어

남택근\* · 소명옥\*\* · 박진길\*\*

### Canonical Form of Acrobat Robot and Its Control of Swing-up

T-K Nam\* · M-O So\*\* · J-G Park\*\*

**Key words** : Acrobat Robot(아크로벳 로봇), Underactuated Mechanism(열구동 기계시스템), Canonical Form(정준형), Swing-up(스윙업)

#### Abstract

In this paper, we described a technique for the swing-up control of a 2 link acrobat robot using a canonical form which is derived from the law of conservation of an angular momentum based on the center of the first joint. The wide usefulness of the canonical form of the acrobat robot, which was suggested here, is could also be applied to control a free flying robot or an underactuated planar manipulator with no gravity term. Some simulation results are provided to verify the effectiveness of the proposed algorithm

#### 1. 서 론

열구동시스템(Underactuated system)은 일반화좌표보다 적은 수의 액추에이터로 일반화좌표의 전부가 제어가능한 기구이다<sup>[1]</sup>. 특히 수직 평면상에 놓여진 2링크의 매니플레이터로서 두번째의 관절에는 액추에이터가 부착되어 있으나 첫번째의 관절에는 액추에이터가 부착되어 있지 않은 로봇은 아크로벳 로봇이라고 불리우며 철봉선수등의 간략화된 모델로서도 이용되어지고 있다. 이러한 열구동시스템은 액추에이터의 수를 줄이려고 하는 첨단로봇기술과 열구동특성을 신체의 기능으로서 생활해 나가는 인간이나 동물을 모의하는

로봇실현에 이바지 할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 열구동특성을 지니는 로봇을 이용하여 철봉체조동작의 부분동작인 스윙 및 도립 자세를 실현하기 위한 해석과 그 시뮬레이션 결과에 대해서 논의하고자 한다.

이와 같은 아크로벳 로봇의 스윙 및 도립제어에 관한 종래의 연구를 살펴보면 Spong<sup>[2]</sup>은 Zero dynamics 와 펌핑에너지(Pumping energy)함수를 이용하여 도립제어를 행하고 있다. Lee<sup>[3]</sup>는 슬라이딩모드 제어기법을 이용하여 도립제어를 행하고 로봇의 자세가 목표자세에 근접했을 때 선형화 근사제어에 스위칭하여 목표자세까지의 제어를 행하고 있다. 하지만 선형화근사제어에 적합한

\* 한국전기연구원 기기제어응용그룹

\*\* 한국해양대학교 기관시스템공학부

스위칭 시간을 결정하는 것은 매우 어렵고 또한 목표자세 근방일지라도 로봇이 가지는 초기속도의 영향으로 인해 제어기의 수렴영역이 좁아지게 된다. Hauser<sup>[5]</sup>는 평형매니폴드(equilibrium manifold)내에서 선형화된 시스템과 등가인 근사 비선형시스템을 구성하여 도립제어에 응용하고 있다. 그렇지만 Hauser의 연구에서는 그 구체적인 제어기를 구해내는 과정이 난해하고 해석결과에 근거한 수렴특성이 그다지 좋지 않은 것을 볼 수 있다.

이에 비해 본 논문에서는 우선 아크로벳 로봇의 제어에 있어서 적분 불가능한 가속도의 구속조건을 물리적으로 해석이 용이한 연립1계 미분방정식으로 표현한다. 다음으로 제안한 모델을 이용하여 스윙 및 도립제어를 위한 제어기를 제안하고 시뮬레이션을 통하여 그 유용성을 확인한다.

## 2. 제어대상

본 연구의 제어대상은 Fig. 1과 같은 2링크의 아크로벳 로봇이다. 이 로봇에 있어서 제1, 제2 링크의 질량을 각각  $m_1, m_2$ 라 하고 각각의 길이를  $l_1, l_2$ 라고 한다.

그리고 제1관절로부터 제1링크의 중심까지의 거리를  $a_1$ , 제2관절로부터 제2링크의 중심까지의 거리를  $a_2$ , 중심을 기준으로 한 관성모멘트를 각각  $J_1, J_2$ 라고 한다. 또한  $\theta$ 는 제1링크의 절대각도,  $\psi$

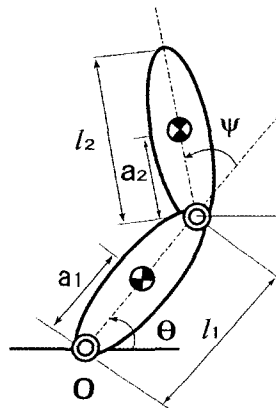


Fig.1 Acrobat robot with 2 links on the vertical plane

는 제2링크의 상대각도를 나타낸다.

로봇의 운동방정식은 라그랑제의 운동방정식을 이용하여 도출한다. 따라서 먼저 로봇의 운동에너지, 위치에너지를 구한다. 단, 마찰은 없는 것으로 가정한다. 로봇전체의 운동에너지는 각 링크의 중심(重心)의 병진운동에너지와 회전운동에너지의 합이 되므로

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\theta}^2 + m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + J_2 (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)) \quad (1)$$

가 된다. 단,  $(x_i, y_i)$ 는 각 링크의 중심의 위치를 의미하며 Fig. 1로부터

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \theta, y_1 = a_1 \sin \theta \\ x_2 &= l_1 \cos \theta + a_2 \cos(\theta + \psi), \\ y_2 &= l_1 \sin \theta + a_2 \sin(\theta + \psi) \end{aligned} \quad (2)$$

와 같이 구해진다. 다음으로 위치에너지는  $g$ 를 중력가속도라 하면

$$\begin{aligned} U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= (m_1 g a_1 + m_2 g l_1) \sin \theta \\ &\quad + m_2 g a_2 \sin(\theta + \psi) \\ &= k_1 \sin \theta + k_2 \sin(\theta + \psi) \end{aligned} \quad (3)$$

가 얻어진다.

단,  $k_1 = (m_1 a_1 + m_2 l_1)g$ ,  $k_2 = m_2 a_2 g$ 이다. 따라서 Lagrangian( $L = \mathcal{J} - U$ )에 대한 운동방정식

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (4)$$

을 이용하면 로봇의 운동방정식으로서

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a + \gamma + 2\beta \cos \psi & \gamma + \beta \cos \psi \\ \gamma + \beta \cos \psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -\beta \psi (2\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \psi \\ \beta \dot{\theta}^2 \sin \psi \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} k_1 \cos \theta + k_2 \cos(\theta + \psi) \\ k_2 \cos(\theta + \psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

를 얻을 수가 있다. 단, (4),(5)식에서  $q = (q_1, q_2)^T, q_1 = \theta, q_2 = \theta + \psi$ 이고

$$\begin{aligned} a &= J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2, \beta = m_2 l_1 a_2, \\ \gamma &= J_1 + m_2 a_2^2 \end{aligned} \quad (6)$$

을 의미한다.

(5)식은 절대각도를 기준으로 하는 (4)식을 구하여 상대각도로 변환하고 정리하여 얻어지는 식이다.

### 3. 가속도의 구속과 2링크 시스템의 정준형

아크로벳 로봇의 특성이라 할 수 있는 즉, 제1관절에 액츄에이터가 부착되어 있지 않은 조건으로부터 (5)식의 제1행은

$$\begin{aligned} (a + \gamma + 2\beta \cos \psi) \ddot{\theta} + (\gamma + \beta \cos \psi) \ddot{\psi} - \\ \beta \dot{\psi} (2\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \psi + k_1 \cos \theta + \\ k_2 \cos(\theta + \psi) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 표현될 수 있고 (7)식은 적분불가능한 가속도의 구속조건이 된다.<sup>[10]</sup> 하지만 (7)식의 구속조건에 각 운동량을 도입함으로써 1계의 미분방정식으로 표현이 가능하다. 회전축 0점주위의 각 운동량을  $P$ 라고 하면

$$P = (a + \gamma + 2\beta \cos \psi) \dot{\theta} + (\gamma + \beta \cos \psi) \dot{\psi} \quad (8)$$

가 얻어지고 (8)식으로부터

$$\dot{\theta} = \frac{P}{a + \gamma + 2\beta \cos \psi} - \frac{\gamma + \beta \cos \psi}{a + \gamma + 2\beta \cos \psi} \dot{\psi} \quad (9)$$

를 구할 수 있다. 또한 (8)식의 시간에 대해 미분과 (7)식의 관계로부터

$$\begin{aligned} \dot{P} &= (a + \gamma + 2\beta \cos \psi) \ddot{\theta} + (a + \gamma + 2\beta \cos \psi) \ddot{\psi} \\ &\quad - \beta \dot{\psi} (2\dot{\theta} + \dot{\psi}) \sin \psi \\ &= -k_1 \cos \theta - k_2 \cos(\theta + \psi) \end{aligned} \quad (10)$$

이 얻어진다. 여기에서 상태변수를  $(\psi, \theta, P)^T$

로 취하고 제2관절의 상대 각속도 즉,  $u = \dot{\psi}$ 라고 하면 (9), (10)식으로부터

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P}{a + \gamma + 2\beta \cos \psi} \\ -k_1 \cos \theta - k_2 \cos(\psi + \theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma + \beta \cos \psi}{a + \gamma + 2\beta \cos \psi} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

를 얻는다.

또한 (11)식에 대하여 상태변수를  $x = (\psi \ \theta \ P)^T$ 로 놓으면

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (12)$$

와 같은 비선형의 아핀시스템(affine system)으로 표현이 가능하다. 이하에서 (11)식을 2링크의 열구동 로봇 (underactuated robot)의 정준형 (canonical form)이라고 부른다. 왜냐하면 수평 평면상에 놓여진 열구동 로봇 매니플레이터 (underactuated manipulator)에서는 중력항이 없으므로 (11)식의 3번째행의 좌변이 영으로 되는 것에 대응하기 때문이다. 또한 Fig. 2와 같은 2링크의 부유로봇을 생각하면<sup>[8]</sup> 로봇전체의 중심을 기준으로 한 각 운동량이

$$P = (a_1 + \gamma_1 + 2\beta_1 \cos \psi) \dot{\theta} + (\gamma_1 + \beta_1 \cos \psi) \dot{\psi} \text{ 와 같}$$

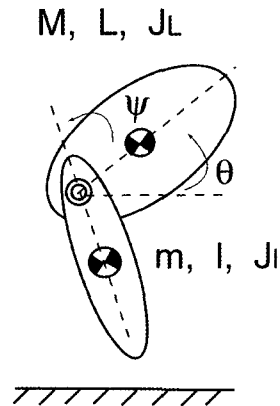


Fig. 2 Two link free flying robot

이 유도되어진다.

단, 여기에서  $a_1, \beta_1, \gamma_1$ 은  $a_1 = J_L + \frac{mML^2}{m+M}$ ,

$\beta_1 = \frac{mML}{m+M}, \gamma_1 = J_l \frac{mML^2}{m+M}$  이고  $J_l, J_L$ 은 각각

하체 (첫번째 링크)와 동체(두번째 링크)의 중심을 기준으로 한 관성모멘트를 의미한다. 따라서 파라메타에 있어서 약간의 의미의 차이가 있지만 부유로봇 또한 각 운동량보존법칙으로부터 (11)식에서  $\dot{P} = 0$ 로 놓고 유도되어지는 시스템으로 기술되어진다.

### 4. 제 어

#### 4.1 스윙 및 도립제어

본 장에서는 3장에서 유도한 아크로벳 로봇의 정준형을 이용하여 임의의 초기자세로부터 도립자세를 실현하는 제어법칙을 아래와 같이 3단계의 제어로 나누어 실현하고자 한다.

- 1단계제어 : Fig. 3 (a)의 초기자세로부터 임의의 시간  $t_1$ 까지 제어입력으로서 정현파를 가해 로봇의 중심이 수평면위로 이동될 수 있도록 한다 : (a)~(b)

- 2단계제어 : 중심이 수평면보다 위에 이동된 (b)의 시점에서 각 운동량과 모멘트가 영이 되도록 피드백제어를 행한다. 이것으로부터 로봇전체의 중심을 각 운동량이 영이 되는 위치 즉, O점의 수직선상에 이동시킨다. 이때의 평형상태는 불변 매니폴드(invariant manifold)를 구성하게 된다 : (b)~(c)

3단계제어 : 시스템의 상태가 불변매니폴드에 도달하면 현재의 중심위치보다 조금위의 중심위치를 목표점으로 하고 그 목표점 근방에서 선형근사를 행하여 중심을 조금씩 상승시킨다. 이 방법을 반복하여 최종적으로 (e)와 같이 도립자세를 실현시키는 것이다. : (c)~(e)

각 제어단계에서의 제어에 관해서 부가적인 설명을 하고자 한다. 우선 1단계 ( $0 \leq t < t_1$ )에서는 정

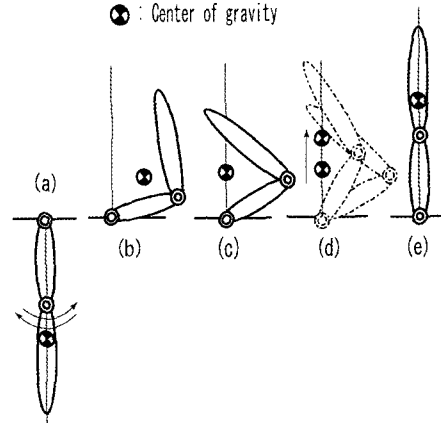


Fig. 3 Control procedure of swing-up motion

현파의 제어입력을 이용함으로써 전체의 중심을 수평선위에 올리는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 달성시키는 진폭과 주파수는 약간의 시행착오를 거쳐서 구할 수가 있다.

다음으로 2단계 ( $t_1 \leq t < t_2$ )에서는 각운동량  $P$ 와 그 미분  $\dot{P}$  즉, 모멘트를

$$\ddot{P} + k_d \dot{P} + k_p P = 0 \tag{13}$$

와 같은 미분 방정식의 해로서 안정화시킨다. 여기에서  $k_p > 0, k_d > 0$ 은 상수게인을 나타낸다. (13)식을 실현시키기 위해 (10)식을 미분해서 얻어지는

$$\ddot{P} = (k_1 \sin\theta + k_2 \sin(\psi + \theta))\theta + k_2 \sin(\psi + \theta) \dot{\psi} \tag{14}$$

와 (9)식을 이용하여 제어입력  $u$ 를 구하면

$$u = \frac{N}{D}$$

$$N = (k_p m_{11} + (k_1 \sin\theta + k_2 \sin(\psi + \theta)))P - k_d m_{11} (k_1 \cos\theta + k_2 \cos(\psi + \theta))$$

$$D = k_2 (m_{12} - m_{11}) \sin(\psi + \theta) + k_1 m_{12} \sin\theta \tag{15}$$

가 얻어진다.

단,  $m_{11} = a + \gamma + 2\beta \cos\psi, m_{12} = \gamma + \beta \cos\psi$ 이다. (13)식을 실현시키는 (15)식의 제어입력에

0). 회전축을 기준으로 한 각 운동량이 영이 됨으로서 로봇은 O점 수직선상에 중심(重心)이 있는 위치에 정지한다. 왜냐하면 (10)식의 중력항은 로봇전체의 중심(重心)위치의 x성분

$$X_g = \frac{(m_1 a_1 + m_2 l_1) \cos \theta + m_2 a_2 \cos(\psi + \theta)}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

에  $(m_1 + m_2)g$ 를 곱한 값이 되기 때문이다. 그리고 회전축 기준의 각 운동량  $P=0, \dot{P}=0$ 이 되었을 때의  $\psi-\theta$ 는 Fig. 4와 같은 불변 매니폴드(invariant manifold)를 구성한다. Fig. 4의 별표는 로봇이 도립했을 때의 상태변수의 값을 나타내고 있다. 즉, 반시계방향의 스윙에 의한 도립( $\psi=0, \theta=\pi/2$ ) 그리고 시계방향의 스윙에 의한 도립( $\psi=0, \theta=-3\pi/2$ )을 의미한다.

3단계의 제어( $t \geq t_2$ )에서는 회전축 O근방의 각 운동량이 영이 되는 자세로부터 도립자세에 이르기까지의 제어를 행하고 있다. 즉 평형점  $x_r$ 로부터 현재 상태와의 오차를  $x^* = x - x_r$ 로 하면

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_r} x^* + \left. \frac{\partial g(x)}{\partial u} \right|_{x=x_r} u \\ &= A_0 x^* + b_0 u \end{aligned} \quad (17)$$

(17)와 같이 선형화가 가능하다. 단, 목표치인  $x_r$ 은 Fig. 4의 곡선상의 값을 취하게 된다. 그리고 이 시스템은 평형점 근방(도립상태)에서 상태 피드백에 의해 안정화 제어가 가능하다. 선형 근사된 시

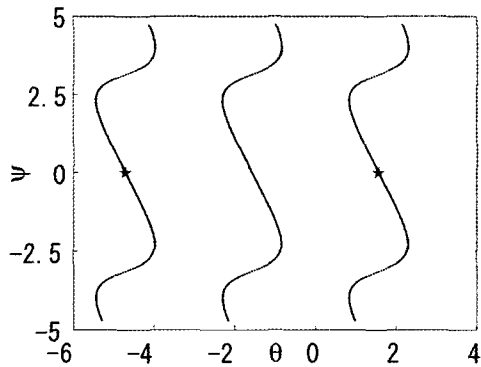


Fig. 4 Equilibrium points of acrobat robot

스템의 안정화방법에 있어서는 레귤레이터 혹은 극 지정 방법을 이용하면 된다. 하지만 각 운동량이 영이 되는 자세로부터 도립자세까지의 상태의 오차가 큰 경우 선형 근사에 의한 제어는 한계가 있으므로 현재의 중심(重心)위치보다 조금위의 목표중심위치 근방에서 선형화를 행하고 그 목표중심위치를 조금씩 상승시켜 최종적으로는 도립자세를 실현하게 된다.

#### 4.2 시뮬레이션

위에서 제안한 제어방법에 따라 임의의 초기자세로부터 도립자세까지의 시뮬레이션을 행했다. 초기자세로부터 3단계에 걸친 제어기법을 적용하였고 그 결과를 Fig. 5에 나타낸다. 시뮬레이션상의 파라메타는  $m_1 = 1 (kg), m_2 = 1(kg), l_1 = 1(m), l_2 = 2(m), g=9.8 (m/s^2), J_1 = 0.0833 (kg \cdot m^2), J_2 = 0.3333(kg \cdot m^2)$ 로 하였다. 상태변수의 초기치와 목표치는  $x(0)=(0-0.5\pi \ 0)^T, x_r = (0, -3\pi/2, 0)^T$ 로 하고<sup>2)</sup> 제1단계에서의 제어입력을  $u=4\sin(3t)$ 로 하였다. 제2단계와 제3단계제어입력의 스위칭시간은 각각  $t_1 = 2.55sec, t_2 = 5sec$ 이다. 제3단계제어( $t \geq 6$ )의 선형 근사화 시스템의 제어로서는 LQ제어를 이용하였고 3단계의 초기치로부터 목표치까지는 5구간으로 나누어 제어를 행하였다.

Fig. 5의 (a)는 상태변수의 시간에 따른 변화량을 (b)는 제어입력을 나타내고 있다. Fig. 6은 Fig. 5의 시뮬레이션 결과를 동화(動畫)로 나타낸 것이고 그림상에서 작은 동그라미는 로봇전체의 중심을 나타낸다. 그 결과를 살펴보면 정현파의 제어입력에 의해 철봉의 차오르기와 같은 동작이 이루어지고 이 동작에 의해 로봇의 중심이 수평선위로 이동되는 것을 알 수 있다. 중심을 수평선위로 이동시킨 후 각 운동량을 안정화시키는 제어에 의해 로봇의 중심이 O점의 수직선상에 위치하게 된다. 최종적으로 평형 매니폴드(equilibrium manifold)상의 평형점을 목표로 하는 선형화제어(LQ제어)에 의해 도립자세를 달성하게 된다. Fig. 5과 Fig. 6의 결과로부터 제안한 제어기법의 유용성을 확인할 수 있었다. Fig. 7은 스윙업 동작시 로봇의 중심(重心)궤적을 나타내고 있다.

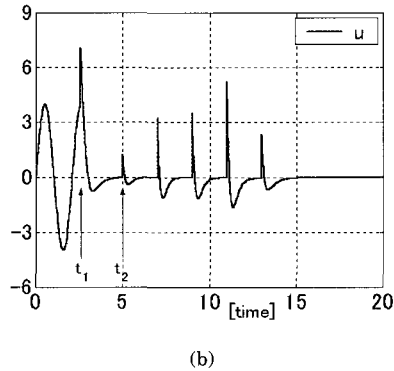
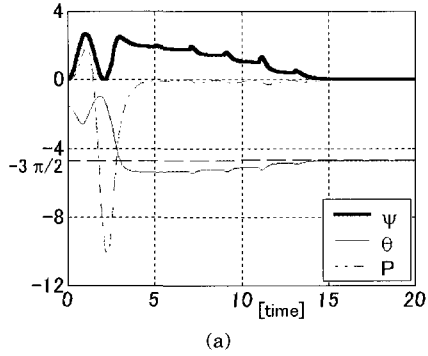


Fig. 5 Simulation result of swing up control

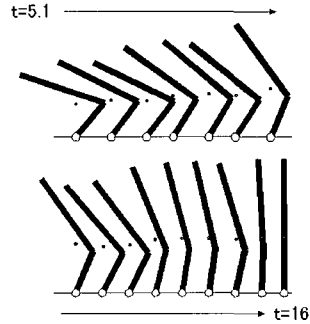
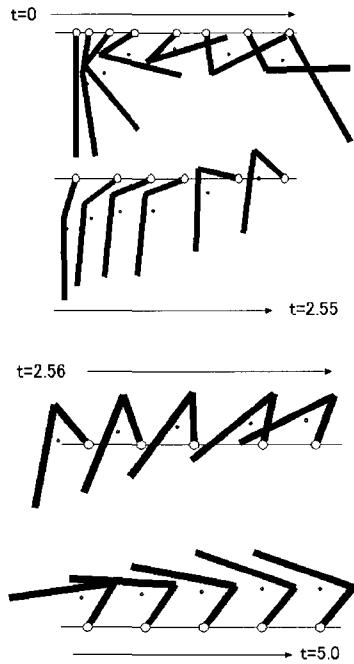


Fig. 6 Animation of swing-up control

Fig. 7 Trajectory of CG(center of gravity) during swing up control

### 5. 결 론

본 논문에서는 가속도의 구속조건과 제1관절의 회전속을 기준으로 한 각 운동량의 관계로부터 1계 미분방정식으로 표현되는 2링크 열구동시스템 (underactuated system)의 정준형을 제안했다. 이 정준형은 부유로봇이나 수평면상의 매니퓰레이터에도 적용이 가능하며 그 적용범위가 넓다. 아울러 제안한 모델에 대해 임의의 초기자세로부터 도립자세까지의 제어법칙을 제안하고 시뮬레이션을 통해 제안한 제어기의 유용성을 검증하였다.

### 참 고 문 헌

1. I.Kolmannovskiy, N.H.McClamroch, " Developments in nonholonomic control problems ", IEEE control systems, pp. 20-36, 1995.
2. 미니特集 [ 非ホロノミック系の制御 ], 計測と制御,

- vol.36, no.6, pp. 384-416, 1997.
3. M.W.Spong, "The swing-up control problem for the acrobot", IEEE control systems, pp. 49-55, 1995.
  4. K.S.Lee, S.Coates, V.C-carroll, "Variable structure control applied to underactuated robots", Robotica, vol.15, pp. 313-318, 1997.
  5. J.Hauser, R.M.Murray, " Nonlinear controllers for non-integrable systems : the Acrobot example", Proc. of American control conference, pp. 669-671, 1990.
  6. M.D.Berkemeier, R.S.Fearing, " Sliding and hopping gaits for the underactuated acrobot", IEEE Trans. on robotics and automation, vol.14, no.4, pp. 630-634, 1998.
  7. 梶原秀一, 橋本幸男, 松田敏彦, 土谷武士, "鐵棒ロボットの數理解析と運動制御", 日本ロボット學會誌, Vol.18, No.4, pp.515-520, 2000.
  8. T.Mita, S-H Hyon, T-K Nam, " Analytical time optimal control solution for a two link planar acrobot with initial angular momentum", IEEE Transactions on robotics and automation, Vol.17, No.3, pp. 361-366, 2001.
  9. L.E.Lamos, B.Castello-Toledo, J.Alvarez, " Nonlinear regulation of an underactuated system", IEEE Conf. on robotics and automation, pp. 3288-3291, 1997.
  10. G Oriolo, Y. Nakamura : Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints, Proc. of IEEE CDC, pp.2398~2403, 1991.

## 저 자 소 개



### 남택근(南澤權)

1968년 10월생. 1990년 한국해양대학교 졸업. 1996년 한국해양대학교 대학원 졸업(공학석사). 2001년 일본동경공업대학교 대학원 졸업(공학박사). 현재 한국전기연구원 기기제어응용그룹 선임연구원.



### 소명옥(蘇明玉)

1958년, 5월생. 1980년 한국해양대학교 기관공학과 졸업. 1987년 동 대학원 기관공학과 졸업(석사). 1997년 동 대학원 기관공학과 졸업(박사). 현재 한국해양대학교 기관시스템공학부 부교수.



### 박진길(朴進吉)

1939년, 1월 1일생. 1963년 한국해양대학교 기관학과 졸업. 1975년 동 대학원 기관학과 수료(공학석사). 1982년 동 대학원 기관학과 수료(공학박사). 1963년 2월~1972년 11월 한국전력공사. 1972년 11월~현재 한국해양대학교 기관시스템공학부 교수.