

무요소법 프로그래밍에 관한 연구

김학수 · 배동명

부경대학교
(2002년 3월 22일 접수)

A Study of Meshless Method Programming

Hag-Soo, KIM and Dong-Myung, BAE

Pukyong National University
(Received March 22, 2002)

Abstract

The element free Galerkin method has been suggested by Belyschko, etc. it is applied for linear elastic analysis of solid problems and its convergence characteristics and stability are shown according to the weight function, influence domain and scattered points. The various numerical examples are performed to check the efficiency of 1D EFG and 2D EFG program by changing factors. As a result it have the best results when it used the cubic spline weight function and the scaling parameter $d_{max}=2$.

These programs were developed by mixed language programming method using Visual Basic and the C language. so it is fast and efficient. and visually shown the result.

서론

유한요소법은 구조해석, 열해석, 유동해석등 대표적인 공학해석에 있어서 편미분 방정식의 해법으로 널리 사용되고 있는 강력한 수치해석 기법이다. 그러나 이러한 유한요소법도 몇 가지 문제점을 안고 있다. 그 중 가장 대표적인 것이 유한요소분할에 따른 시간과 노력의 낭비문제이다. 이러한 요소분할 문제를 해결하기 위한 방법으로 자동 격자 분할법(auto mesh generation)이나 무요소법이 그 대안으로 등장하고 있다. 이중 자동 격자 분할법의 경우 많은 제약이나 경험적인 노하우(know how)를 필요로 하고 있다. 또 다른 대안인 무요소법(meshfree method or meshless method)의 경우는 요소를 필요로 하지 않고 절점 데이터(data)만을 이용하는 특성으로 인해 요소분할 문제를 해결할 수 있는 하나의 좋은 대안으로

떠오르고 있다. 더불어 응력 평탄화 문제도 동시에 해결할 수 있는 장점을 가진다. 특히 요소분할 과정이 없으므로 인하여 CAD 데이터의 이용이 용이하며, 요소 분할 과정이 불필요하기 때문에 적응적 방법(adaptive method)와의 양호한 정합성을 기대할 수 있다.⁴⁾ 이러한 무요소법에 의한 해석방법이 확립되면 설계 현장에 있어서 CAD작업을 통한 모델 작성에서 CAE에 이르는 모든 과정을 통합할 수 있는 통합 시스템의 개발이 가능해진다.¹⁷⁾ 따라서 본 연구의 목적은 혼합 프로그래밍 기법을 이용하여 보다 효율적으로 무요소법을 이용한 프로그램을 작성하고 무요소법이 가지는 효용성을 효과적으로 검증하는데 있다. 본 논문에서는 1차원과 2차원 무요소 프로그램을 작성하였고 이를 이용한 수치해석을 통해 무요소법의 타당성과 특징을 비교 분석하였다.

이론 해석

무요소법 중 EFG법은 u^h 를 이용한 $u(x)$ 함수를 근사하기 위하여 이동최소제곱근사법(moving least square)을 이용한다. 이러한 근사법은 각각의 절점에 대해 적당한 가중함수, 다항식을 구성하는 기저, 위치에 대한 계수등 세 가지 구성요소로 이루어진다.

1. 변위함수의 근사화

무요소에 의한 변위함수의 근사화는 다음과 같은 일반식으로 나타낼 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(x) u_I \dots\dots\dots(1)$$

여기서 u : 절점 I 에 주어진 절점값,
 NP : 전체 절점 수

2. 이동최소제곱법에 의한 형상함수의 결정

영향영역 내에서의 절점의 연결성은 그 영향영역의 기준점으로부터 떨어진 거리에 따른 가중치로 나타내며, 전체영역에서의 연속성은 수치적분을 위해 기준점이 이동함에 따라 새로이 형성되는 영향영역이 서로 중첩됨으로써 나타나는 형상함수의 중복치로 유지된다.

함수 $u(x)$ 에 대한 근사화 $u^h(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^h(x) = a_0(x) + a_1(x)x \dots\dots\dots(\text{선형 기저})$$

$$u^h(x) = a_0(x) + a_1(x)x + a_2(x)x^2 \dots\dots(2\text{차 기저})$$

부분적인 근사화는 다음과 같이 주어진다.

$$u_I^h(x, x) = \sum_{j=0}^m p_j(x) a_j(\bar{x}) = p^T(x) a(\bar{x}) \dots\dots(2)$$

여기서, $p(x)$ 는 m 차의 완전 다항식

$$p^T(x) = [1 \ x \ x^2, \ \dots \ x^m] \dots\dots\dots(3)$$

임의의 주어진 점에서의 미지의 인자 $a_j(x)$ 는 해당 점에서의 부분 근사화와 절점인자 u_I 사이의 차를 최소화하는 것으로 결정된다. $a(x)$ 를 결정하기 위해 $a(x)$ 에 대한 관련을 최소화한다. 가

중 이산 L_2 norm은 다음과 같이 주어진다.

$$J = \sum_{I=1}^{n_{sq}} W(x-x_I) [u_I^h(x_I) - u_{II}]^2 \\ = \sum_{I=1}^{n_{sq}} W(x-x_I) [p^T(x_I) a_i(x) - u_{II}]^2 \dots(4)$$

여기서 u_{II} : $x=x_I$ 에서 i 성분의 절점변위
 $W(x-x_I)$: 기준점으로부터 떨어진 x_I 의 가중치
 n_{sq} : x 를 중심으로 영향영역 내에 포함되는 절점수

J 의 최소화는 결과적으로 다음의 선형방정식들이 된다.

$$A(x)a(x) = B(x)u \dots\dots\dots(5)$$

$$A(x) = \sum_{I=1}^n w(x-x_I) p(x_I) p^T(x_I) \dots\dots(6)$$

$$B(x) = [w(x-x_1)p(x_1), w(x-x_2)p(x_2), \dots, w(x-x_n)p(x_n)] \dots(7)$$

(2)식과 (5)식의 관계에서 이동최소제곱(MLS) 근사화는 다음과 같이 정의된다.

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(x) u_I = \Phi(x) u \dots\dots\dots(8)$$

여기서, 형상함수 $\Phi_I(x)$ 와 형상함수의 도함수 $\Phi_{I,x}(x)$ 는 다음과 같다.

$$\Phi_I(x) = \sum_{j=0}^m p_j(x) (A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T A^{-1} B_I \dots(9)$$

$$\Phi_{I,x}(x) = (p^T A^{-1} B_I)_{,x} \\ = p_{,x}^T A^{-1} B_I + p^T (A^{-1})_{,x} B_I + p^T A^{-1} B_{I,x} \dots\dots\dots(10)$$

ELG₁ 형상함수는 Kronecker Delta법칙을 만족하지 않는다. ($u^h(x_I) \neq u_I$) 따라서 유한요소를 이용하는 것보다 복잡한 필수경계조건을 부여한다. 본 논문에서는 필수경계조건을 강화하기 위하여 Lagrange 승수법을 사용하였다.

3. 영향영역

영향영역이란 어떤 기준점 x 를 중심으로 일정 거리에 있는 영역을 말하며, 2차원 문제의 경우 원의 형태를, 3차원 문제의 경우는 구의 형태를 취한다. 영향영역의 반경 d_{ml} 는 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$d_{ml} = d_{\max} c_I \quad \dots\dots\dots(11)$$

여기서 d_{\max} : 비례계수(정적해석 2.0~4.0)

$$c_I = \max \|x - x_I\|$$

4. 가중함수 (Weighting function)

무요소 형상함수의 형태는 가중함수에 의해서 결정되며, 주로 사용되고 있는 가중함수는 다음과 같다.

① 지수형태의 가중함수(Exponential WF)

$$W_I(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r}{0.4}\right)^2} & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(12)$$

② 원추형 가중함수 (Conical WF)

$$W_I(r) = \begin{cases} 1 - r^2 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(13)$$

③ 3차 Spline 형태의 가중함수
(Cubic spline WF)

$$W_I(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(14)$$

④ 4차 Spline 형태의 가중함수
(quartic spline WF)

$$W_I(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(15)$$

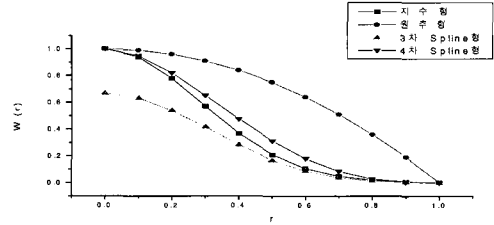


Fig. 1. Weighting Function.

5. 전체시스템 방정식

전체 시스템 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^{ext} \\ q \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(16)$$

여기서,

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \phi_I N_K d\Gamma \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \bar{b} d\Omega \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K \bar{u} d\Gamma \quad \dots\dots\dots(20)$$

무요소 프로그래밍

본 논문에서 사용된 무요소 프로그램은 프로그램 제작 시간의 단축과 효율적인 프로그래밍을 위해 Visual Basic과 C언어의 혼합 프로그래밍 기법을 사용하여 제작되었다. 프로그램의 알고리즘은 'John Dolbow'의 알고리즘⁴⁾을 참고하였으며 다양한 조건을 부과하여 여러 가지 결과들을 쉽게 알 수 있게 하였다.

1. 혼합 프로그래밍

Visual Basic이나 Delphi 같은 RAD(Rapidly Application Development) Tool은 사용자 인터페이스(User Interface)의 작성이 매우 편리하고 배우기가 쉬우며 매우 적은 양의 코드로도 프로그램을 작성할 수 있다는 이점을 가지고 있다. 그러나 세밀한 제어가 어렵고 속도가 느리다는 것이 단점으로 지적된다. 따라서 이러한 단점을 극복할

수 있는 혼합 프로그래밍방식을 이용하게 된다. 이러한 혼합 프로그래밍은 DLL이나 OCX등의 Dynamic Library를 이용하는 방법을 말한다. 즉, 속도가 요구되는 핵심적인 루틴(routine)은 C++ 등의 기존 언어를 사용하여 작성하고 사용자 인터페이스(User Interface)부분 등을 RAD Tool을 사용하여 작성하면 보다 빠르고 편리하게 프로그램을 작성할 수 있다.¹²⁾

2. 프로그램 구성

본 논문에서 작성된 2차원 EFG 프로그램을 간단히 소개하면 다음과 같다.

EFG 프로그램을 실행하게 되면 EFG 해석을 위한 기본적인 인자를 설정하기 위해 다음과 같은 창이 뜨게 된다. 여기서 절점 수, d_{max} , 탄성계수, 가로 및 세로방향 길이, 포와송비, 하중, 절점 수 등 기본사항들을 입력하고 Gauss quadrature, 가중함수 및 그래프 종류를 선택할 수 있다. 그리고 정해진 항목을 체크하게 되면 정해 값과 해석 값을 그래프에 동시 나타낼 수 있다. 가중함수보기를 선택하면 가중함수의 모양을 직접 확인하면서 가중함수를 선택할 수 있다. 가중함수는 지수형, 원추형, 3차 Spline형 및 4차 Spline형의 4가지가 있으며 해당 항목을 선택하면 된다.

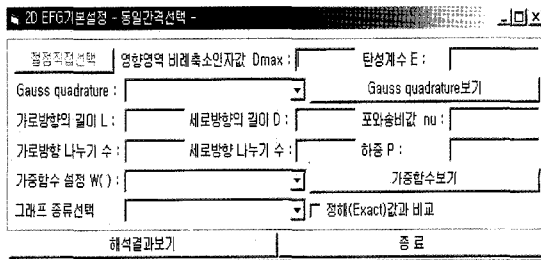


Fig. 2. Input window.

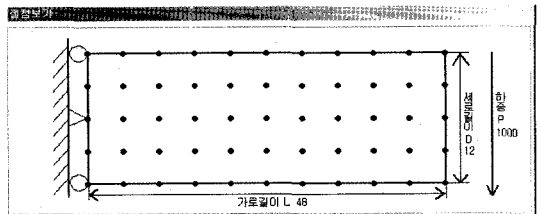


Fig. 3. Arrangement of nodes.

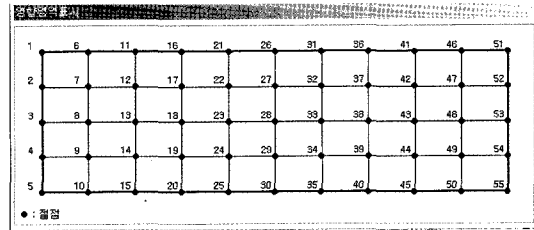


Fig. 4. Node No.

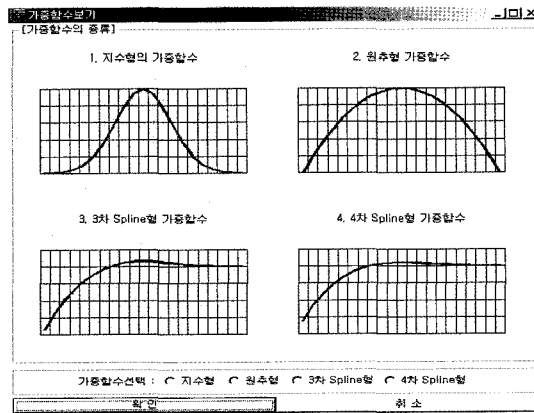


Fig. 5. Weighting functions on window.

모든 입력이 완료되고 해석 결과보기를 선택하면 Fig. 6 및 Fig. 7과 같은 표 출력창과 그래프 출력창이 나타나게 된다.

노드	절점 좌표	변위	회전각	인장응력	전단응력	1차 변위	2차 변위	3차 변위
1	-1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-0.800000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	-0.600000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	-0.400000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
5	-0.200000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	0.200000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
8	0.400000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
9	0.600000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
10	0.800000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
11	1.000000E+00	-0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
13	-0.800000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
14	-0.600000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
15	-0.400000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
16	-0.200000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
17	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
18	0.200000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
19	0.400000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
20	0.600000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
21	0.800000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
23	-1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
24	-0.800000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
25	-0.600000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Fig. 6. Result table on window.

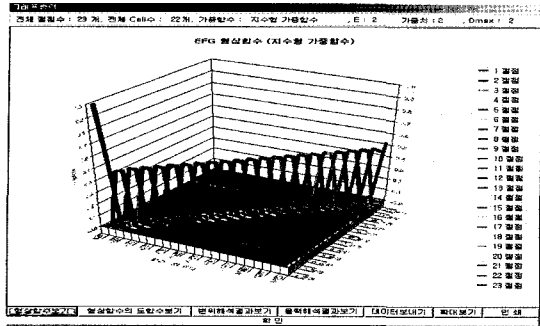


Fig. 7. Result graph on window.

3. 프로그램의 구조

EFG법의 수치해석 문제를 해결하기 위해 만들어진 본 프로그램은 Visual Basic과 C++의 혼합 프로그래밍 방식으로 만들어진 Windows 응용프로그램이다. 절점을 균일하게 분포시키거나 임의로 지정할 수 있으며, 해석결과를 2차원 또는 3차원으로 나타내면서 가중함수와 영향인자 등 여러 인자들을 변화시켜 볼 수 있다. 그리고 정해 값과 수렴정도를 비교할 수 있어 무요소법의 특징을 쉽게 파악할 수 있다.

1차원 EFG 프로그램의 구조 :

1단계 : 초기값 설정

- 1.1 보의 절점 좌표, 적분 셀의 수 및 탄성계수 설정
- 1.2 각 절점에 대한 영향영역 크기 d_{mi} 결정
- 1.3 Jacobian 설정. 절대좌표로 변환
- 1.4 각 셀에 대한 Gauss 적분점을 설정하고 초기화
- 1.5 경계조건 적용하고, Gauss 적분점의 필수경계조건을 강화
- 1.6 가중치를 설정
- 1.7 물성치 K, F, G 를 초기화

2단계 : 적분점 전체에 대하여 반복 계산

- 2.1 절점과 Gauss 적분점 사이의 거리 계산
- 2.2 각 절점에 대해 가중치 w 와 이의 도함수 dw 계산

$$2.3 \quad r = \frac{\|x - x_i\|}{d_{mi}} \text{ 계산}$$

2.4 가중함수 (4가지 중 하나) 선택 및 적용

- ① 지수형태의 가중함수
- ② 원추형 가중함수
- ③ 3차 Spline 형태의 가중함수
- ④ 4차 Spline 형태의 가중함수

2.5 형상함수와 도함수를 설정

2.5.1 선형다항식 기저 계산 $p^T = [1, x]$

2.5.2 변수 B 에 저장 : $B(x)$

$$2.5.3 \quad p^T, A(x) \text{ 및 } A_{,x} = \frac{dA}{dx} \text{ 계산}$$

$$2.5.4 \quad A^{-1}(x), \Phi \text{ 및 } B_{I,x} = \frac{dB}{dx} \text{ 계산}$$

2.5.5 형상함수의 도함수 $\Phi_{I,x}$ 계산

3단계 : 이산방정식 조립

3.1 G 배열 생성

3.2 강성행렬 K 조립

$$K_{IJ} = \int_0^1 \Phi_{I,x}^T E \Phi_{J,x} dx$$

3.3 힘벡터를 F 조립

$$f_I = \Phi_{I,x} | \Gamma_t + \int_0^1 \Phi_x b dx$$

4단계 : Lagrange 승수를 이용한 경계조건

$$4.1 \quad Q = -\bar{u}_k$$

$$4.2 \quad \begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \text{ 행렬 구성.}$$

5단계 : 절점인자 u 에 대하여 해 결정

$$5.1 \quad \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ Q \end{Bmatrix}$$

$$5.2 \quad \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1차원 EFG 프로그램의 전반적인 흐름을 순서대로 나타내면 Fig. 8과 같다.

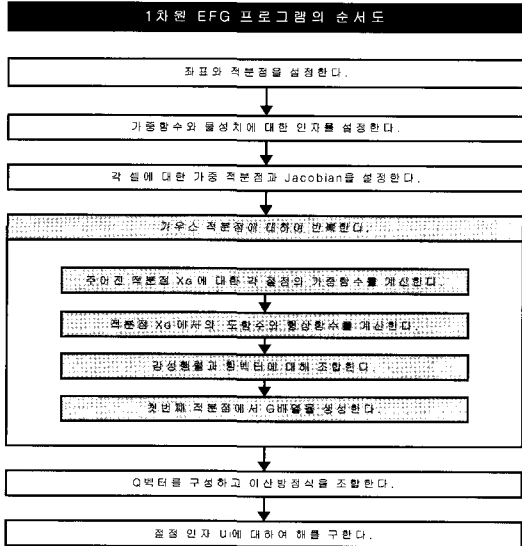


Fig. 8. Flow chart of 1D EFG program.

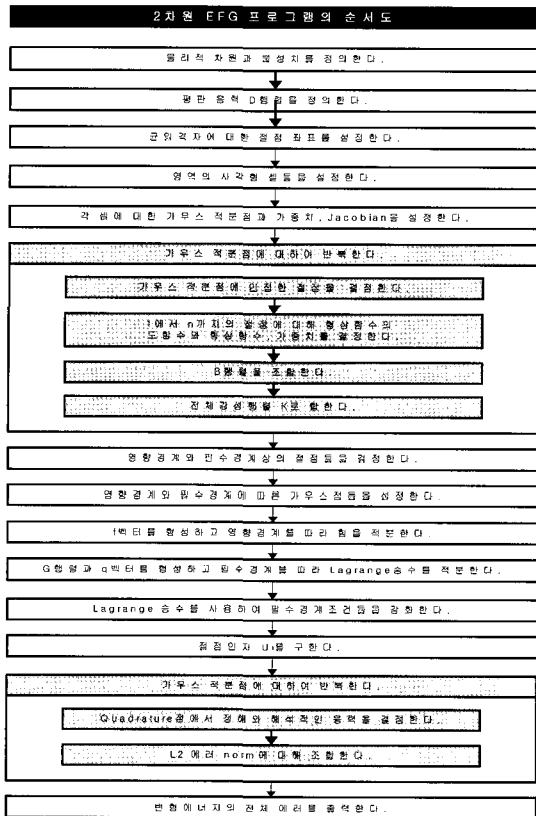


Fig. 9. Flow chart of 2D EFG program.

수치 해석 예

1. 1차원 문제

좌단 고정 우단 자유의 경계 조건을 가지고 Fig. 10에서와 같이 선형 물체력이 가해지는 길이 L인 1차원 보 문제의 경우로서, 이 문제에 대한 평형방정식, 경계조건 및 정해는 다음의 식 (21) ~ (23)과 같이 주어진다.

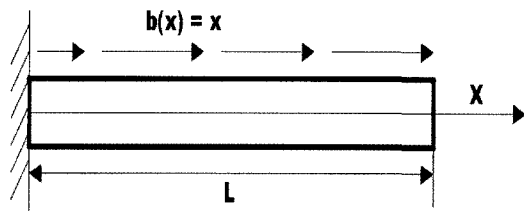


Fig. 10. Ex. of 1D problem

$$Eu_{,xx} + x = 0, \quad 0 < x < 1 \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$u(0) = 0, \quad u_{,x}(1) = 0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$u(x) = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} x - \frac{x^3}{6} \right] \quad \dots\dots\dots(23)$$

해의 정도에 영향을 미치는 선택인자들은 절점이 균일 분포되는 경우와 임의 분포되는 경우로 나누고, 균일 분포시킬 경우의 절점의 수, d_{max} 값의 변화, 가중함수의 선택 등이 있다. 절점이 임의 분포될 경우, 불규칙하게 배열될 경우와 비교적 균일하게 분포될 경우에 따라서도 해의 정도에 영향을 미친다. 본 절에서는 20개의 절점이 균일 분포된 경우에 대해서 해석해 본다.

Table 1. Input data on 1D problem of 20 nodes

Node No.	cell No.	WF	W.F	E	d_{max}
20	19	3rd Spline type	2	2	2

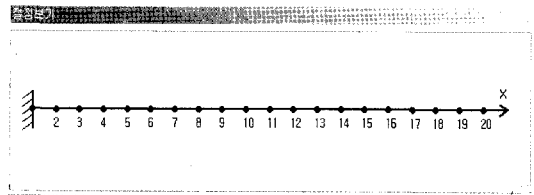


Fig. 11. Arrangement of nodes.

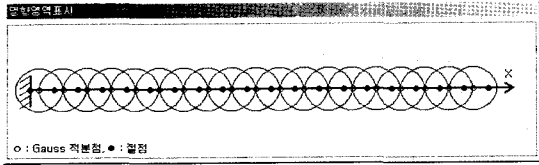


Fig. 12. Domains of influence.

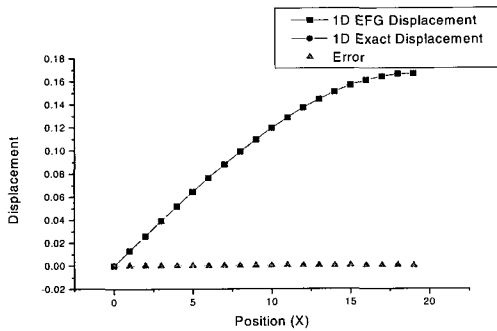


Fig. 13. Result of displacement analysis.

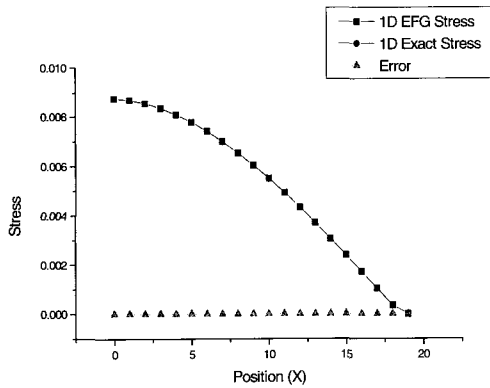


Fig. 14. Result of stress analysis.

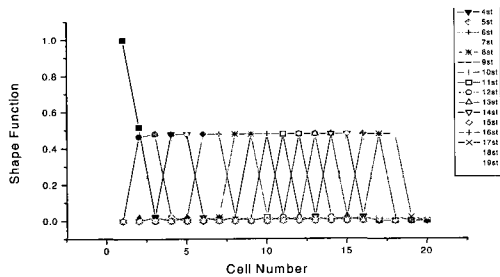


Fig. 15. Shape function.

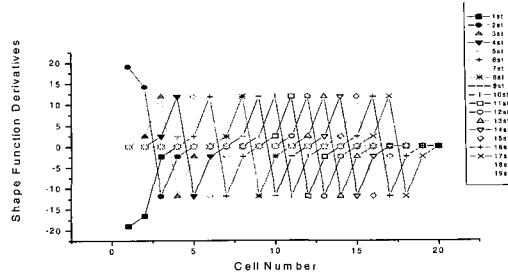


Fig. 16. Derivatives of shape function.

2. 2차원 문제

Fig. 17과 같이 자유단에서 하중이 가해지는 높이 D, 길이 L인 보의 2차원 평면 응력 문제의 경우로서 정해와 응력은 다음과 같다.

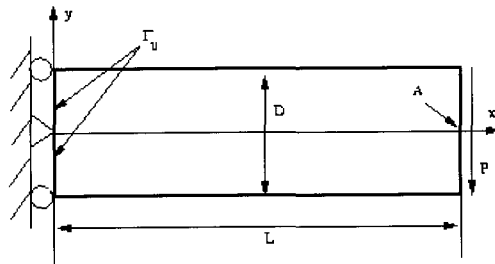


Fig. 17. Ex. of 2D problem.

$$u_x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \dots\dots\dots(24)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \dots\dots\dots(25)$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad \sigma_y(x, y) = 0 \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{Py}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \dots\dots\dots(27)$$

2차원 EFG 프로그램을 이용하여 2차원 EFG법의 특성을 알아본다. 2차원 EFG 프로그램의 결과를 비교하기 위하여 “An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method”에서 사용된 조건을 이용하여 해를 구해 보았다. 해당

조건은 다음과 같다. 가중함수의 선택에 따른 해의 정도의 차가 1차원의 경우와는 다소 다르다는 것을 알 수 있다. 1차원의 경우 원추형을 제외하고는 거의 정해에 근접하는 경향을 나타냈으나 2차원의 경우 3차 Spline형을, 이외의 다른 가중함수는 정해와 상당히 차이가 나는 것을 알 수 있다.

Table 2. Input data of 2D problem

Gauss I.P.	Load	WF	L	B
4x4	1000	3rd Spline	48	12
Div.of L	Div.of T	E	d_{max}	poisson's ratio
14	6	3E07	3.5	0.3

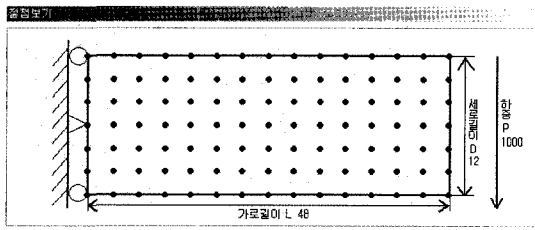


Fig. 18. Arrangement of nodes.

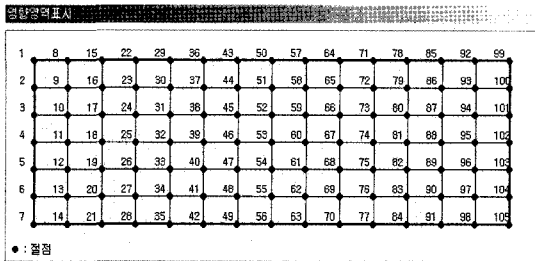


Fig. 19. No. of nodes.

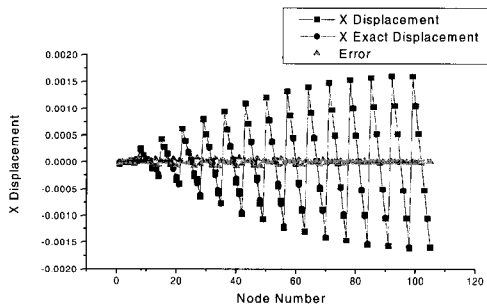


Fig. 20. Displacements of x-direction on 105 nodes.

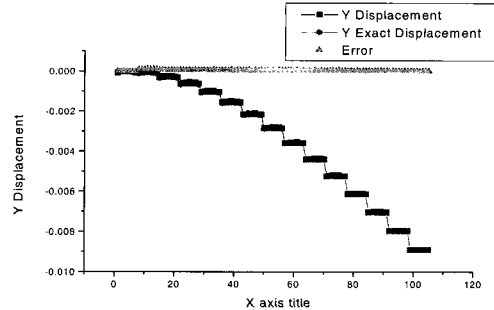


Fig. 21. Displacements of y-direction on 105 nodes.

예상대로 절점의 수가 많을수록 보다 정해에 가까워짐을 알 수 있다. 결국 가중함수의 경우를 제외하고는 1차원 EFG 해석에서 나타난 것과 같은 결과를 나타내는 것을 알 수 있다.

결론

본 논문에서는 무요소 이론을 정식화하였고 이를 이용한 1차원 및 2차원 EFG 프로그램을 Visual Basic과 C언어를 이용하여 작성해 보았다. 그리고 각각의 EFG 수치해석의 예를 작성된 프로그램을 이용하여 해를 구하였다. 해석결과는 다른 문헌의 결과와 일치하였으며 해석결과에서 나타나듯이 무요소 해의 정도는 영향영역의 비례축 소인자 d_{max} 와 가중함수의 종류, 절점 배치형태에 의해 좌우된다는 사실을 알 수 있었다. 특히 1, 2차원 EFG 해석결과에서 가장 최적의 해를 보이며 정해(exact solution)에 가장 근접한 조건은 $d_{max} = 2$ 이고 가중함수가 3차 Spline형일 때로 나타났으며 유한요소법과 마찬가지로 절점의 수가 많을수록 그리고 절점을 균일하게 배치할수록 높은 정도를 나타내는 것을 알 수 있었다. 특히 2차원의 경우 3차 Spline형 이외의 다른 가중함수를 사용할 경우에 상당히 큰 오차를 나타내는 점은 1차원 EFG 해석의 결과와는 다른 점이었지만 그 외 대부분 같은 결과를 나타내었다.

1차원에서 절점을 임의로 배치한 경우는 비교적 균일하게 배치한 경우가 해에 근접하는 형태를 나타내었으며 절점 간격이 상대적으로 적은 곳에서 큰 오차를 나타내었다. 그리고 절점을 임의로 선택할 때 변위가 모두 '0'의 값을 가지는 경우를

볼 수 있는데, 이는 화면상의 좌표계산에서 생긴 미소한 오차가 절점들에 의해 반복됨으로서 발생하는 것으로 보인다. 또한 탄성계수 값이 클 경우 $d_{\max} = 2$ 에서 계산이 제대로 수행되지 못하는 경우가 있는데, 이는 수치가 double형의 크기를 초과하기 때문인 것으로 보인다.

결과에서 나타나듯이 무요소법에서 적당한 가중 함수와 비례축소 인자를 사용하면 정해에 가까운 우수한 해를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 비록 프로그래밍 과정이나 이론의 정식화가 유한요소법에 비해 상당히 어려운 점은 있으나 무요소법은 요소의 정보를 필요치 않으므로 사용자 입장에서는 매우 편리할 것이다. 앞으로 경계조건을 효과적으로 만족시키는 문제를 해결하고 효과적인 알고리즘이 개발된다면 실용적으로 유한요소법을 대신할 수 있는 좋은 대안이 될 수 있을 것이라 생각된다.

참 고 문 헌

- 1) 김재율 외 “기본수치계산역학”, 문운당.
- 2) 박철원 (1997) : 무요소절점법과 경계요소법의 조합에 관한 연구, 연세대학교 토목공학과.
- 3) 강용규 (1996) : 무요소절점법과 유한요소법의 조합에 관한 연구, 연세대학교 토목공학과.
- 4) Dolbow, J. and Belytschko, T. (1998) : An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method, Northwestern University.
- 5) Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D. and Fleming, M. (1996) : Meshless Methods : An Overview and Recent Developments, Northwestern University.
- 6) Belytschko, T., Y. Lu, Y. and Gu, L. (1994) : Element-Free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 37, 229~256.
- 7) 임장근 (1994) : 유한요소해의 정확도 평가와 조절법, 대한기계학회지.
- 8) 석병호 · 임장근 (1999) : 갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성, 한국전 산구조공학회지, 12(1).
- 9) 전석기 · 이상호 (1998) : 무요소법 개론, 전산구조공학회지, 11(3).
- 10) 정홍진(1998) : 무요소법에서의 적응적 해석기법, 한국전산구조공학회지, 11(3).
- 11) 전석기(1998) : 다중스케일 RKPM의 소개, 한국전산구조공학 11(3).
- 12) 이상호 · 김효진(1998) : Element-Free Galerkin Method를 이용한 균열진전해석, 한국전산구조 공학회 제11권 제 3호.