Technical Tips

블럭 쌓기와 푸리에 급수

최 규 하
(건국대학교 전기공학과 교수)

과거 전기에서 흔히 볼 수 있었던 파형들이 일정직류파 또는 정현파, 더 복잡하게는 첨두파 등과 같은 정도가 대부분이었다. 그 당시에는 파형의 모양을 따지기는 커녕 그저 전기를 얻어 쓸 수 있는 것만으로도 엄청난 행운(?)이었을 게다. 따라서 이러한 시절에는 파형을 분석하거나 합성 또는 재현하는 것은 생각하지도 못했고 혹여 있었다 하더라도 몇몇 수학자들의 연구놀이에 불과했다. 이제 세월은 흘러 반도체가 생겨나고 발전을 거듭한 결과 우리의 "전력전자"의 시대에까지 오게 되었다. 전기를 단순히 쓰기만 하던 단계를 훨씬 뛰어넘어 "변환과 제어"를 자유롭게 할 수 있게 되었다. 더구나 탁월한 마이크로프로세서까지 개발되었으니 과거에는 상상도 못할 수준의 고속, 고성능 및 고정밀도 제어가 가능해 졌다.

반도체의 발전에 따라 많은 연구분야들이 새롭게 생겨났고 그 중에서도 스위칭에 의한 '괴짜파형'들이 출현되면서 전원측이나 부하측에 맥동 또는 고조파가 나타나게 되었다. 이미 잘 알고 있는 많은 문제들로는 출력변동, 제어불안정, 통신선로 유도장애, 역률보정용 콘덴서 손상 및 파괴, 발전기 과열, 전동기 토크맥동, 케이블 절연파괴, 각종 제어기 및 계기류의 오동작 등등을 들 수 있겠다. 이러한 문제점을 분석하기 위해 주로 사용되는 수학적 도구중 하나가 바로 푸리에급수(Fourier series)이었다. 이제 전력전자의 회로 및 해석에 많이 쓰이는 푸리에급수의 기본 개념을 살펴보자.

1. 블럭쌓기

지금 그림 1과 같은 정삼각형을 만들어 보자. 보통은 종이를 자와 칼로써 잘라내면 아주 쉽게 삼각형의 모양을 만들어 낼 수 있다. 그런데 여기서 삼각형을 만들어 내되 반드시 '원(circle)' 만을 쓰도록 조건을 부여해 보자. 대신에 원을 사용하되 그 모양과 개수에는 제한을 두지 않다면 예컨대, 그림 1의 내부에 그려진 것처럼 일정반경의 한 가지 원만을 사용해서 대충 삼각형 모양을 만들어 낼 수 있을 것이다. 이 경우 사용된 원의 수는 전부 15개이고 마치 포켓볼 당구에서 당구공을 삼각대내에 배열한 것과 같아 보인다. 그러나 이러한 모양은 '완전한 삼각형의 재현' 이라는 관점에서 볼 때 정삼각형과는 거리가 멀다.

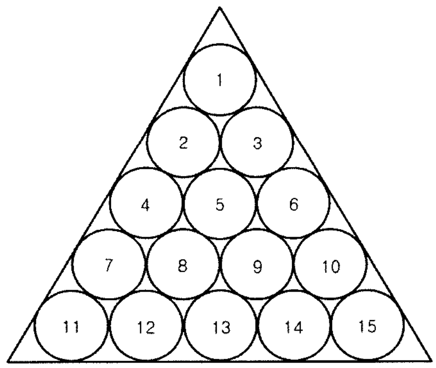


그림 1. 같은 원만으로 구현해 본 삼각형

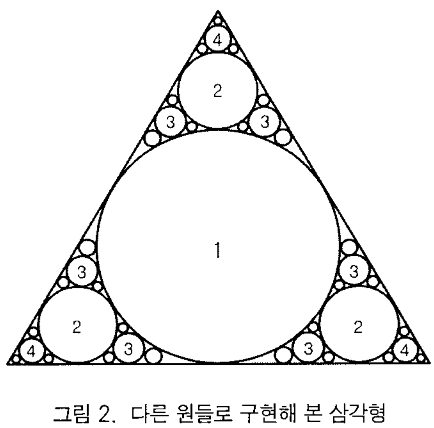


그림 2. 다른 원들로 구현해 본 삼각형

그래서 이번에는 반경이 서로 다른 원들을 사용하여 구성해 보자. 그림 2가 바로 최종적으로 구성해 본 한 예이다. 가운데 가장 큰 반경의 원 즉 내접하는 원을 하나 위치시키고 나머지 여백에는 거기에 맞는 내접원들로 채워 나가보자. 최종적인 모양을 보면 그림1과는 달리 사용한 원의 크기가 다양해 졌고 각 원들의 사용개수도 달라졌다. 그림에는 나타내지 못했으나 남은 모든 여백을 내접하는 원으로 계속 채워나가면 나중에 가서는 '가루원(powdered circle)' 까지 필요하게 될 것이다. 이렇게 무한히 채워 나가면 완벽한 정삼각형이 만들어진다. 이때 사용된 원의 반경과 개수를 나열해 보면 다음과 같다. 즉,

- 1번째 원 : 반경 r_1 개수 N_1 (1개)
- 2번째 원 : 반경 r_2 개수 N_2 (3개)
- 3번째 원 : 반경 r_3 개수 N_3 (6개)
- 4번째 원 : 반경 r_4 개수 N_4 (3개)

.. .. ..

.. .. ..

- k번째 원 : 반경 r_k 개수 N_k

.. .. ..

.. .. ..

- n번째 원 : 반경 r_n 개수 N_n

.. .. ..

.. .. ..

.. .. ..

- ∞번째 원 : 반경 r_∞ 개수 N_∞

와 같이 정리되는데 다시 말하자면 위에 나열한 '원(circle)' 재료를 가지고 잘 배열하면 정확하게 정삼각형을 구성할 수 있을 것이다. 이처럼 '원' 만을 재료로 써서 어떤 도형을 만들어 나가고 그때 필요한 원의 개수나 반경을 조사하면 그 도형의 모양, 특징 또는 성분을 분석해 볼 수 있다. 앞의 과정을 정삼각형과 같은 도형 대신 전기적 신호의 경우로 바꿔 생각하면 바로 푸리에급수가 여기에 해당된다.

푸리에 급수에서는 어떤 주기적인 신호를 분석 또는 재현하기 위해 '정현파를 기본재료' 로 하되 그 크기와 주파수를 다양하게 선택할 수 있다. 이 두 값들은 각각 앞의 원의 반경과 개수의 값에 각각 해당된다. 이러한 기본개념으로 써서 주기를 갖는 임의의 교류파형을 들어본다면 어떠한 또는 얼마만큼의 정현파들이 필요할까. 앞의 경우와 유사하게 다음과 같이 일반적으로 나타내 보자.

- 1번째 정현파 : 주파수 $f_1 = f(60Hz)$ 크기 V_1
- 2번째 정현파 : 주파수 $f_2 = 2f$ 크기 V_2
- 3번째 정현파 : 주파수 $f_3 = 3f$ 크기 V_3

.. .. ..

.. .. ..

- k번째 정현파 : 주파수 $f_k = kf$ 크기 V_k

.. .. ..

.. .. ..

- n번째 정현파 : 주파수 $f_n = nf$ 크기 V_n

.. .. ..

.. .. ..

.. .. ..

- ∞번째 정현파 : 주파수 f_∞ 크기 V_∞

와 같이 60Hz를 기본주파수로 할 때 1차, 즉 기본파 성분 V_1의 크기를 갖는, V_2의 크기와 기본주파수의 2배 주파수를 갖는 정현파 즉 2차 고조파성분을 더하고, 또 여기에 V_3의 크기와 3배 주파수의 정현파 즉 3차 고조파성분을 더해 나가는 과정을 반복하면 원하는 교류파형을 재현 또는 분석할 수 있다.

그림 3의 구형파(square wave)와 같은 구체적인 예를 들어보자. 구형파를 재현하는 방법중 하나로 그림 4와 같이 60Hz의 기본파, 3차 고조파, 5차 고조파 등등의 성분을 차례대로 더해 나가면 되고, 그림4는 그 과정을 보이고 있다. 여기서 2차, 4차 등등의 짝수 성분들은 존재하지 않는데, 푸리에급수 표현에서 파형의 모양에 따라, 즉 반파대칭(half-wave symmetry)이냐 또는 사분파대칭(quarter-wave symmetry)이냐에 따라, 존재하는 성분들이 달라지기 때문이다.

그런데 예컨대 그림 4에서 나타낸 기본파와 3차 고조파 성분이 각각 크기가 서로 다르거나 극성 또는 위상이 서로 달라지면 그림 5와 같이 전혀 엉뚱한 결과를 얻을 수 있다. 즉 정현파의 크기, 주파수 뿐만 아니라 위상까지 잘 선정되어야 하는데, 보다 정확한 것은 다음의 수식적 표현에서 정해진다.

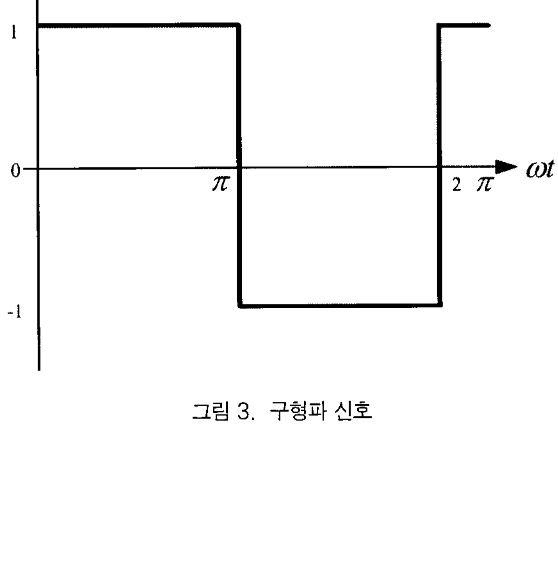
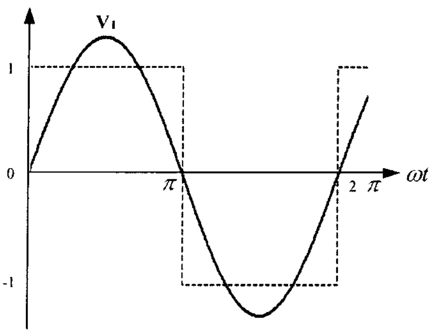
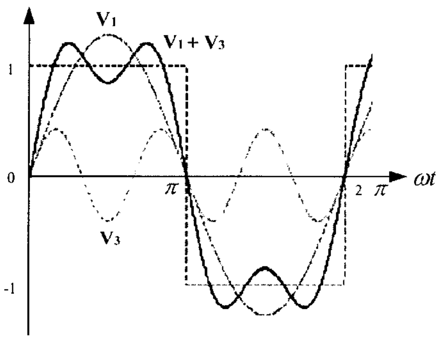


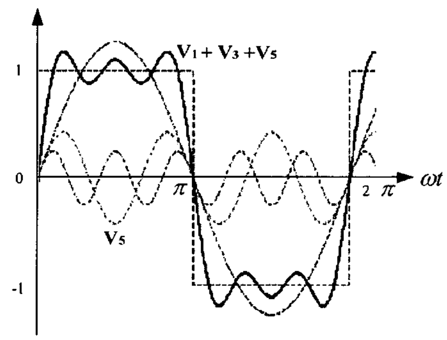
그림 3. 구형파 신호



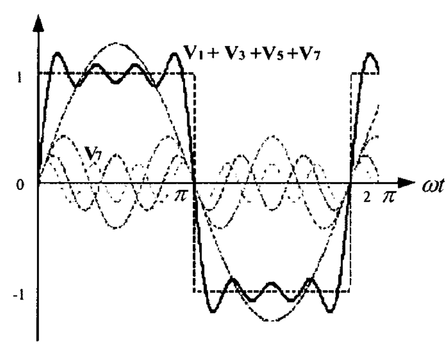
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 4. 다양한 정현파에 의한 구형파형의 재현

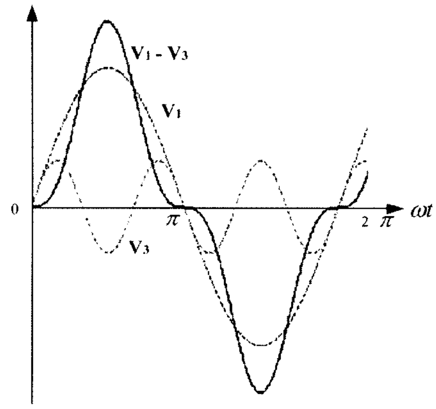


그림 5. V_3 의 위상 또는 극성이 달라진 경우 합성된 파형 (그림 4(b)와 비교)

2. 푸리에 급수의 수식적 표현

지금 주기 T를 갖는 어떤 함수 $f(t)$가 주어져 있을 때 이 함수에 대한 푸리에급수는

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) \tag{1}$$

로 표현되고 그 계수들은 다음으로 주어진다.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \sin\ n\omega t\ \ dt \tag{2a}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \cos\ n\omega t\ \ dt \tag{2b}$$

$$\frac{b_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \ dt \tag{2c}$$

그리고 위의 계수들에 대한 표현은 $\omega T = 2\pi$인 조건을 사용하여 다음과 같이 다시 나타내기도 한다.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \sin\ n\omega t\ \ d\omega t \tag{3a}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \cos\ n\omega t\ \ d\omega t \tag{3b}$$

$$\frac{b_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \ d\omega t \tag{3c}$$

여기에 반파대칭(half-wave symmetry) 또는 사분파대칭(quarter-wave symmetry)의 조건이 주어지는 특수한 파형에서는 그 표현이 보다 더 간단하게 표현될 수 있다.

① 반파대칭 : 양의 반파를 반주기 이동하고 부호를 반대로 취하면 음의 반파와 일치하는 경우로 양, 음의 양 반파가 같으므로 평균치가 존재하지 않는다.($b_0 = 0$) 또한, $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ 의 조건식을 만족하므로 모든 짝수 n에 대한 계수 $a_n = 0,\ b_n = 0$ 로 되어 다음과 같이 간단하게 표현된다.

모든 홀수 n에 대한 계수의 표현은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega t)\ \sin\ n\omega t\ \ d\omega t$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega t)\ \cos\ n\omega t\ \ d\omega t \qquad (4)$$

$$\therefore f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t\}\ \ (n = 1,3,5,\mathrm{L}\ ) \qquad (5)$$

② 사분파대칭 : 양 또는 음의 반파가 $\omega t = 90^{\circ}$ 즉 주기의 4분의 1에 대해 대칭이 되는 경우로, 그 평균치는 0으로 된다. $f(\omega t) = f(\pi - \omega t)$ 을 만족하므로 계수 b_n은 모든 정수 n에 대해 항상 0으로 되고, 계수 a_n은 모든 짝수 n에 대해 0으로 되므로, 남는 항 즉 모든 홀수 n에 대한 계수 a_n의 표현은 다음과 같다.

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega t)\ \sin\ n\omega t\ \ d\omega t \qquad (6)$$

이처럼 사분파 대칭이 되면 $f(\omega t)$의 푸리에급수는 가장 간단한 형태로 바뀐다.

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \ \sin\ n\omega t \quad (n = 1,3,5,\mathrm{L}\ ) \qquad (7)$$

이상과 같이 요약해 본 내용이 흔히 우리가 책을 통해 이미 알고 있는 부분이다.

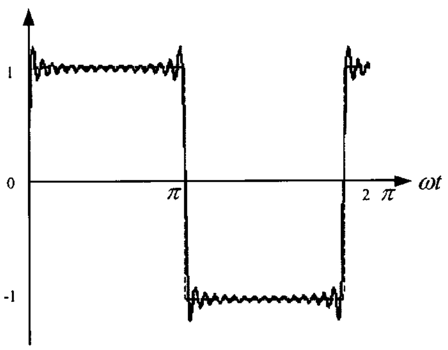
앞에서 수식을 전개한 것 같이 지금 어떤 주기함수 $f(t)$가 주어져 있고 그 함수에 대한 푸리에급수를 구한다는 것은 그 함수꼴을 구성하고 있는 다양한 "정현파" 재료를 주파수대로 분리해 낸다는 말이다. 이를 이론적으로는 분석(analysis)이라고한다. 이것은 크기 및 주파수가 다른 정현파 재료를 섞어 만드는 과정 즉 합성(synthesis)과는 반대되는 개념이다.

푸리에급수를 비유하여 표현해 보면, 햇빛이 프리즘을 통과하여 7가지색으로 분리되는 것과 같이 푸리에급수는 주기함수의 성분을 분리해 내는 바로 전기적 프리즘(electric prism)인 것이다.

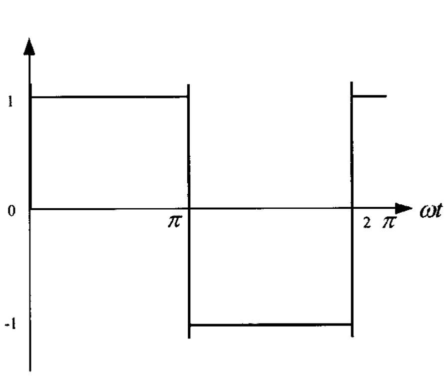
3. 푸리에 급수의 헛점

그림 4와 같이 구형파를 정현파만으로 합성해 나가면 그 합성된 파형은 불연속점 즉 반주기 및 1주기시점에서 원래의 파형과 조금 달라짐을 알 수 있다. 그림 6(a)는 15차 성분까지 합성해 본 파형으로 거의 구형파 모양을 취한다. 그러나 불연속시점부근에서의 파형은 이와 달라 오버슛트의 형태가 나타나고, 무한대 성분까지 계속 더해 나가면 그림 (b)와 같이 두개의 뿔을 갖는 모양으로 되는데 이것이 바로 푸리에급수의 헛점이라 할 수 있다.

이론적으로 그 뿔은 구형파 크기의 약 9%정도의 값을 가지며 이러한 현상을 깁스현상(Gibbs′ phenomenon)이라고 한다. 즉 그림 3의 구형파는 반주기 및 1주기 시점에서 불연속점을 각각 갖는데 (+)에서 (-)로 또는 그 반대로 (-)에서 (+)로 급격히 변하는 부분으로 그 시점에서는 무한대의 주파수가 된다. 즉 정현파가 구형파처럼 급격히 변하기 위해서는 무한대의 주파수를 가져야 한다는 말이다. 다시 말하자면 깁스현상은 무한대 주파수를 가질 수 없는 연속적인 정현파만으로 불연속적인 구형파를 재현할 때 생기는 '한계성'인 셈이다.



(a) 15차까지 합성된 파형



(b) 모든 주파수성분까지의 합성된 파형

그림 6. 정현파로 합성된 구형파형(Gibbs 현상)

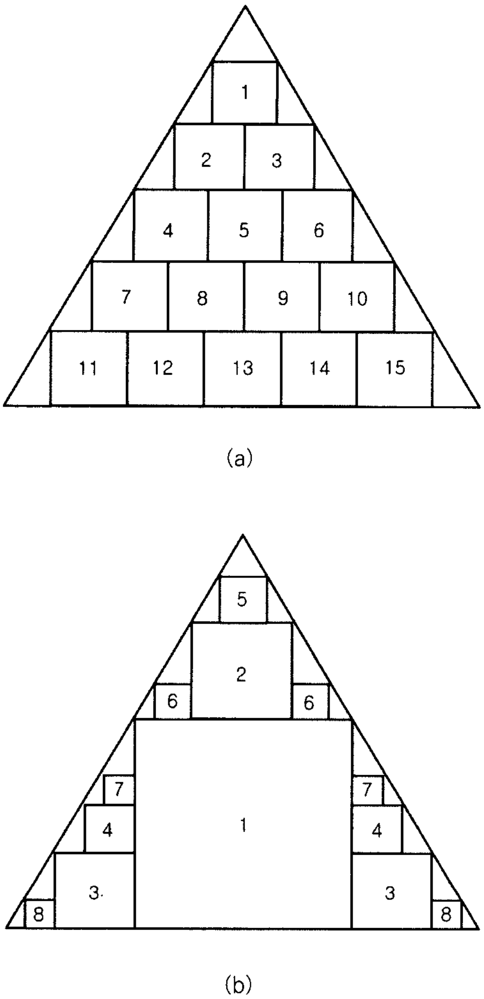


그림 7. 정사각형으로 구성해본 정삼각형

4. 또 다른 재료는?

지금까지는 '원' 이라는 재료만으로 설명해 보았다. 또 원은 정현파와 묘한 대응관계를 갖고 있어 그런대로 설명을 해 나가는 데에 일관성을 유지할 수 있었다. 여기서 우리는 이런 질문을 던져 볼 수 있다.

'정삼각형을 만드는데 있어서, 꼭 원의 재료만을 써야 하나? 원대신 네모, 세모 등 다른 재료를 쓸 수 없나?' 다시 말하자면 주기함수를 나타내는 재료로써 sin, cos 함수 외에 다른 재료가 되는 함수가 없느냐는 질문이다.

얼마든지 가능하다. 수학적으로 말하자면 '직교집합 (orthogonal set)' 의 범위에 들어 가는 함수를 쓰면 모두 가능하다. 어떤 실수함수 집합 $\{ \Phi_n(x) \}$ ($n = 1,2,L$)이 구간 (a, b)에서 다음과 같은 직교성을 가질 때 이를 직교함수집합 (orthogonal function set)이라고 한다.

$$\int_0^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = \begin{pmatrix} nonzero, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{pmatrix} \qquad (8)$$

예컨대, sin함수 사이나 cos함수 사이의 곱에 대한 적분값은 0이 아니지만 sin과 cos사이의 곱을 적분하면 항상 0으로 된다. 우리가 지금까지 즐겨 써 온 sin 및 cos 함수는 바로 직교함수 집합 범주내의 함수중 하나이다. 즉 식(8)을 만족하는 모든 직교함수는 모두 그 대상이 될 수 있다.

그림 7과 같이 정삼각형내에 일정한 변을 갖는 네모, 또는 변이 다른 네모를 써서 재현해 나갈 수 있고 이것은 앞 과정의 반복이다. 결론적으로 말하자면 다양한 네모(정사각형)를 써서 그림 7(b)와 같이 정삼각형을 구현해 나가는 것이 바로 월쉬급수(Walsh series)이다. 월쉬급수는 구형파와 같은 불연속 파형 즉 디지털 신호의 구현에 적합한 급수의 표현이 된다. 보다 자세한 내용은 다음에 언급하기로 하자.

본 내용에 관해 의문사항이 있거나 좋은 의견이 있으신 분은 학회 사무국(554-0184) 혹은 저자 (0502-724-1955)에게 문의하시기 바랍니다.