

복합재료 적층 평판과 셸의 전산해석 기법에 관한 소고

조 명 호*

1. 서 론

복합재료 적층 구조물은 점차 2차구조물에서 1차구조물로 그 사용 범위가 확장되고 있다. 1차 구조물은 직접하중을 지지하는 구조물로 항공기, 잠수함, 장갑차등과 같은 수송체의 1차 구조물은 통상 매우 두꺼운 복합재료 적층구조물로 되어 있어 적층수가 수십장에서 수백장에 이르고 있다. 고성능복합재료는 이방성과 불균일성의 특징으로 인해서 그 해석과 설계가 통상의 등방성 금속재료에 비해 복잡하다.

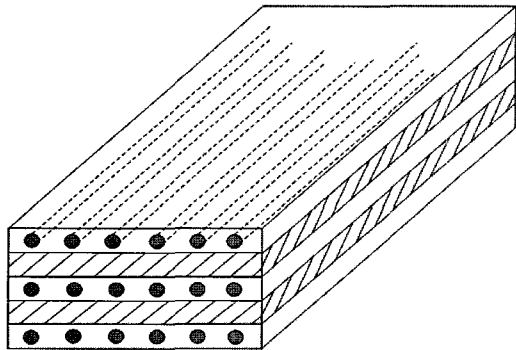
복합재료의 거동은 섬유와 모재의 미세구조의 스케일과 적층구조물의 층 단위 스케일, 전체 적층구조물의 거시 스케일 등 세 가지 스케일에서 해석할 수 있다. 스케일에 대한 개략적인 모식도는 그림 1에 주어져 있다. 각각의 경우에 대해 적용 범위와 모델의 적합성에 따라 서로 다른 스케일을 적용하여 해석과 설계, 평가를 수행하게 된다. 필연적으로 작은 스케일의 현상들은 그 보다 큰 스케일의 거동에 영향을 미치게 되어 큰 스케일의 인자들은 작은 스케일에서의 물리현상에 의해 좌우되는 경우가 빈번하다. 최근에는 이러한 점을 고

려하여 보다 정확히 물리현상을 모델링하고 재료 및 구조물의 거동을 상세히 모사하기 위해서 다중 스케일의 전산해석에 관한 관심이 증대되고 있다.

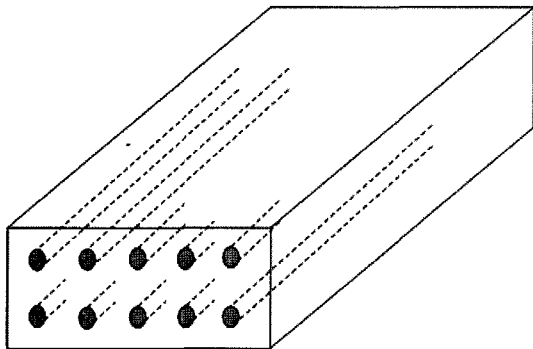
다중 스케일의 관점에서는 적층구조물의 해석을 효율적으로 수행하는 것은 간단한 문제가 아니다. 그러므로 본 기사에서는 복합재료 적층구조물의 강성과 강도, 좌굴/후좌굴 등의 해석과 최적 설계의 관점에서 층단위의 스케일 모델링 기법에 초점을 맞춘다. 복합재료 적층구조물의 거동 파악을 위해 필요한 정밀도는 층단위 스케일의 모델링이며 이에 대한 구조해석 기법이 전산역학의 입장에서 많은 연구가 진행되어 왔고 최근까지도 중요한 연구 테마가 되고 있다.

복합재료 적층구조물은 면내 방향의 강성과 비교하여 수직방향의 강성이 상대적으로 작아서 횡전단변형과 횡수직 변형효과가 중요하게 고려되어야 전체 거동을 정확히 예측할 수 있으며 면내 섬유 방향에 비해 적층면의 횡방향 강도가 상대적으로 매우 작기 때문에 횡전단응력과 횡수직응력의 정확한 예측은 복합재료 적층구조물의 강도 평가에 중요하다. 그러나 일반적으로 횡전단응력과 횡수직응력은 면내 응력과 비교하여 크기가 매우 작

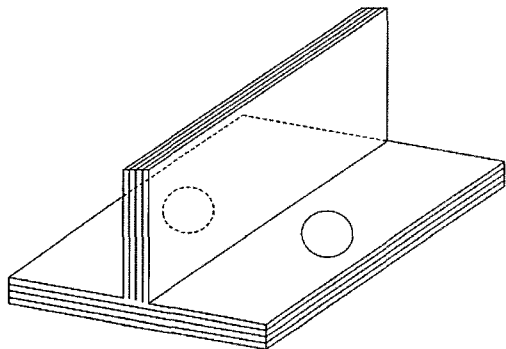
* 서울대학교 기계항공공학부 부교수



(a) 적층구조물의 층 단위 스케일



(b) 섬유와 모재의 미세구조의 스케일



(c) 전체 적층구조물의 거시 스케일

그림 1 스케일에 대한 대략적인 모식도

아서 횡방향응력을 정확히 예측하는 것은 간단한 문제가 아니다. 20년전부터 최근까지 횡방향응력과 변형거동을 정확히 예측하려는 시도가 매우 활발히 진행되어 왔고, 전산 구조해석의 입장에서 효율적이면서 신뢰도 높은 변형, 응력 해석을 수행할 수 있는 전산해석 기법의 개발이 주된 관심사였다. 본 기사에서는 지금까지 개발되어 온 복합재료 적

층구조물의 해석 기법을 살펴보고, 전산 해석기법의 관점에서 장단점을 고찰하고 개발된 해석 기법의 적용 범위에 대해 살펴보기로 한다. 본 기사에서 다루는 내용에 관해 출간된 논문은 이미 지난 20여년간 수백편에 달하고 그 내용을 일일이 다 열거하는 것은 가능하지도 않고 큰 의미도 없을 것이다. 본 연구자는 이 분야에서 지난 15년간 연구를 수행하여 왔기 때문에 이 분야의 연구 추이에 대해서는 대략을 파악하고 있다. 그러나 본 연구자가 열거하는 인용문헌은 본인의 연구 결과를 포함하며, 지면 관계상 수십편으로 제한하였기 때문에 경우에 따라서는 본 연구자의 선호도에 따라 중요한 논문이 모두 다 열거되지는 않았을 수도 있을 것이므로 이 점은 독자들이 양해해 주기를 바란다. 또한 본 기사는 형식에 구애받지 않고 편안히 이야기 하듯이 서술해 보았다. 공학적으로 정형화된 기술양식에 익숙해서 이러한 형식에 거부감을 가지는 독자들에게는 미안하지만, 재미있게 서술해 보고자 하는 시도로 생각하고 양해를 구한다. 참고로 이 분야를 개관하는 리뷰 논문들은 Kapania,^{1,2)} Noor,³⁾ Reddy^{4,5)} 등에 의해서 보고되었고 최근에는 Carrera에 의한 논문⁶⁾이 있다.

2. 복합재료 적층 판/셸 구조물의 해석기법에 관한 고찰

복합재료 적층 판과 셸의 해석 기법은 변위장 가정하는 방법과 변위와 응력을 동시에 가정하는 방법으로 크게 나눌 수 있다. 이 두가지 방법에 의한 분류는 표 1에 제시되어 있다.

변위장을 가정하는 방법은 변분법이나 가상일의 원리를 적용하여 유한요소로 구현하는데도 상대적으로 번거로움이 적어서 선호되는 방법이다. 그러나 복합재료 적층구조물의 특성상 적층되는 접합면에서 횡전단, 횡수직응력이 연속으로 변해야 하는 층간응력 연속조건을 만족시키기 위해서 Reissner가 1984년에 제안한 부분혼합 변분법을 이용하면 효과적으로 층간응력이 연속으로 변하는 변위장과 응력장을 가정할 수 있다.⁷⁾ 이 부분 혼합 변분법을 사용하여 최초로 적층평판을 모델링한 사람은 UC, San Diego에서 Reissner와 가까이 있었던 Murakami

표 1 변위장에 기초한 방법 & 변위와 응력을 동시에 가정하는 방법

		변위에 기초한 방법
다항식의 차수에 따라	고전 평판 이론	$u_\alpha = u_\alpha^0(x, y, t) - z w_{0,\alpha}$ $w = w_0(x, y, t)$
	1차 전단 변형이론	$u_\alpha = u_\alpha^0(x, y, t) + z \theta_\alpha$ $w = w_0(x, y, t)$
	3차 전단 변형이론	$u_\alpha = u_\alpha^0(x, y, t) + z \theta_\alpha + z^2 \phi_\alpha + z^3 \psi_\alpha$ $w = w_0(x, y, t) + z r_1 + z^2 r_2$
변위(Cubic)에 기초를 둔 다항식 변위에 Zig-Zag 이론 증첩		$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^0(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \zeta_\alpha(x_\beta)z^2$ $+ \phi_\alpha(x_\beta)z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z - z_k)H(z - z_k)$ $w = w_0(x, y, t)$
층마다 독립된 자유도를 부과하는 Layerwise 이론		$u_\alpha = \sum_I^N U_I(x, y, t) \Phi^I(z)$ $w = \sum_I^N W_I(x, y, t) \Psi^I(z)$

이다. Murakami는 복합재료 적층 평판에 대해 cylindrical bending문제에 대해 혼합변분법을 사용하여 모델링을 수행하고 해석적인 방법을 사용하여 해석의 정확도를 보였다.^{8)~10)} 이 방법은 그 성능의 탁월성에도 불구하고 상대적으로 변위장에 기초한 이론보다는 주목을 덜 받았다. 그 이유는 변위장에 기초한 방법보다는 이론 전개식이 더 지저분하고 복잡하여 선호되지 못했던 것으로 판단된다. 그러나 최근 1996년 이후부터 DiScuiva의 제자인 Carrera가 이 부분 혼합 변분법에 기초한 모델링기법을 다시 끄집어내서 변위장의 차수와 층간 응력장의 차수를 계층적으로 증가시켜서 1차에서 4차까지 변할 수 있는 모델링을 수행하였고 유한요소 정식화를 수행하였다. Carrera는 정적, 동적 문제, 열하중 문제를 평판과 셸에 적용하여 해석해와 유한요소 수치해를 번갈아 제시하여 일련의 논문을 발표하였다.^{11)~15)} 그는 가뜩이나 복잡한 문제를 더욱 복잡한 방법으로 다루는 데는 재능을 발휘하고 있는 것 같다. 하지만 이 분야에서 연구를 수행하고 있는 연구자들에게는 다소간 공통적으로 적용될 수 있는 평가이기도 하다.

물론 응력과 변위를 동시에 가정하는 방법이 변위장만 가정하는 방법보다 해석의 정밀도와 신뢰

도가 증가하는 것이 사실이다. 그러나 그 정밀도의 향상은 그리 크지 않으며 단순지지 경계에서 두께와 면내 길이비가 1 : 4 이상이 되는 경우에는 그 차이가 1~2% 이내로 매우 적다. 그러므로 실제 두꺼운 복합재료 적층구조물의 해석에서 해석 효율과 정확성을 고려할 때는 변위에 기초한 모델링 방법이 추천할 만한 방법으로 사료된다.

Reddy가 분류한 바와 같이 변위장에 기초한 적층이론은 등가 단층이론과 층별 다층이론으로 변위에 기초한 방법을 분류할 수 있다. 정적 변형, 자유진동, 좌굴 등과 같은 구조물의 전체 거동을 예측할 때에는 여러 가지 모델 중에서 일차 전단 변형이론이 가장 효율적인 이론으로 판단된다. 그 이유는 주 변수들이 물리적, 기하학적으로 정확한 의미를 가지고 최소한의 변수로 구성되어 있으며 전단수정 계수를 적절히 산출할 경우 상당히 정확한 전체 거동을 예측하기 때문이다. 또한 유한요소로 구현할 때도 기저함수의 조건이 C0 연속조건만 요구되므로 등매개 요소와 등매개 사상을 주로 사용하는 상용 유한요소 코드에서도 잘 적용될 수 있는 방법이라서 선호된다.

한편, 부드럽게 변하는 3차 다항식으로 면내 변위를 표시한 후 평판과 셸의 윗면과 아랫면에서

횡전단응력이 0이 되는 조건을 부가하게 되면 1차 전단 변형이론과 같은 수의 주 자유도를 가지는 이론을 만들 수 있는데 이 이론을 Levinson 이론¹⁶⁾이라고 부른다. 이 이론은 일차전단 변형이론과 같은 수의 주변수를 가지는 반면, 두께 방향으로 2차 식으로 변하는 포물선형태의 횡전단응력을 가정하게 되어서 전단수정계수를 도입할 필요가 없고 당시 논문들이 발표될 때 사용한 benchmark 해들이 일차 전단변형이론보다 우수한 결과를 제공하여서 상당히 주목을 받았다. 그러나 Levinson 이론은 변위장과 평형 방정식이 서로 변분적으로 불일치하는 단점을 가지고 있다. 즉 Levinson이 제안한 변위장으로부터 가상일의 원리나 변분법을 사용하여 평형 방정식을 구하면 Levinson이 제시한 평형 방정식과는 다른 평형 방정식을 도출하게 된다. 즉 고차 합응력과 합모멘트가 평형방정식에 나타나게 된다. 본 저자가 일전에 Levinson을 만났을 때 물어 보았더니 본인도 변분법에 의해 평형방정식을 유도해 보았고 그 결과 평형방정식이 지지분한 형태로 주어지는 것을 알았고 그 변분적으로 일치하는 8차 방정식보다는 1차전단 변형이론에 입각한 6차 평형방정식이 더 좋다고 판단해서 그 방정식을 사용해서 논문을 완성했다고 했다. 그 후 Reddy가 Levinson에게 편지로 그러한 사실을 언급하고 Reddy가 변분적으로 일치하는 평형방정식으로 해를 구하는 것을 논문으로 써도 좋겠냐고 허락을 구해왔고 Levinson은 상관없다고 회신을 했다고 했다. 결국 Levinson의 아이디어는 원조격이나 본인의 이론을 복합재료판에 적용하지는 않았고 변분적으로 일치하는 이론은 Reddy에 의해서 발표되어서 그 이론은 Reddy의 이론으로 이 분야에 널리 알려지게 되었다.¹⁷⁾ 이 이론이 발표된 당시에는 많은 주목을 받았으나 실제 여러 가지 적층배열에 대해서는 결코 전단수정계수를 적절히 산출한 일차전단 변형이론보다 더 좋은 결과를 제공하지 않는다는 것이 본 저자의 판단이며 Levinson/Reddy 이론은 유한요소로 구현할 때 C1 기저함수(기울기가 요소의 경계에서 연속으로 변하는 함수)를 요구하기 때문에 불편하다. 특히 K.C.Park은 C0 기저함수로 되어있지 않은 요소는 실제로 상용유한요소 코드에서는 사용될 수 없으므로 별로 유용하지 않다는

의견을 사적으로 표시하기도 하였고, 그 외 많은 연구자들도 유사한 의견을 가지고 있을 것으로 짐작되므로 이런 두가지 이유 때문에 이 이론은 그 자리를 점점 잃어가고 있는 것 같다.

이와는 별도로 Reddy가 3차 다항식을 면내 변위로 하는 논문을 발표할 즈음에 이태리의 DiSciua는 층마다 선형으로 변하고 층의 경계면에서 기울기가 불연속으로 변할 수 있는 면내 변위장으로부터 출발하는 복합적층평판/셸 이론을 발표하였다.^{18),19)} 이 이론은 층의 인접면에서 횡전단 연속조건을 미리 부가함으로써 주 변수의 수를 줄여서 Levinson/Reddy의 이론과 같은 차수의 이론을 만들 수 있었다. 다만 DiSciua의 이론은 층의 두께 방향을 따라 횡전단응력이 상수값을 가지게 되어 물리적으로 옳지 않은 결과를 제공하여 주기적인 적층배열을 가지는 직교 대칭적층판에서만 좋은 결과를 제공하는 한계가 있었다.

Reddy의 3차 면내 변위장과 DiSciua의 지그재그 선형 변위장이 모두 8차로 주어지는 평형방정식을 도출하게 되고 주 변수의 수가 같다는 점을 착안하여 본 저자와 Parmerter는 두 변위장을 중첩하고 판의 위 아래에서 횡전단력이 0이라는 조건과 층의 인접면에서 횡전단응력이 연속으로 변한다는 조건을 면내 변위장에 미리 부과함으로써 지그재그 3차이론을 제시하였다.^{20)~22)} 지그재그 이론의 면내 변위장은 그림 2에 나타내었다. 그 결과 면내 변위장은 평면응력 가정하에서 기하학적 연속 조건과 평형조건을 모두 만족할 수 있게 하며 주 변수의 수가 Reddy, DiSciua와 동일한 이론을 만들 수 있었다. 이 이론은 대칭적층배열에서 출발

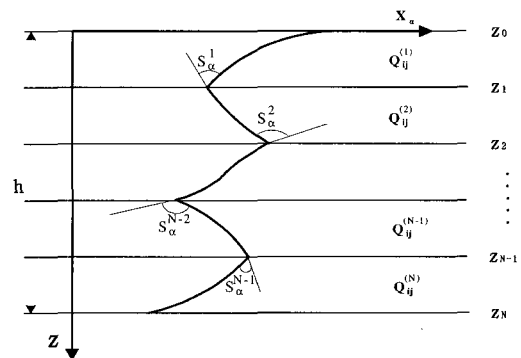


그림 2 면내 변위의 지그재그 형상

표 2 3차 지그재그 판이론

	변위와 응력을 동시에 가정하는 방법
변위와 응력을 가정하는 이론	$u = u_0 + (-1)^k \zeta_k u_z + z^r u_r, \quad r = 1, 2, \dots, N$ $\sigma_{nm}^k = F_t \sigma_{nt}^k + F_b \sigma_{nb}^k + F_r \sigma_{nr}^k$
층마다 독립된 자유도를 부과하는 Layerwise 이론	$u^k = F_t u_t^k + F_b u_b^k + F_r u_r^k$ $\sigma_{nm}^k = F_t \sigma_{nt}^k + F_b \sigma_{nb}^k + F_r \sigma_{nr}^k$

표 3 3차 지그재그 셸이론

복합재료 적층판 해석이론	$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^o(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \phi_\alpha(x_\beta)z^3$ $+ \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z - z_k)H(z - z_k)$ $u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha)$	
층간분리를 가진 복합재료 적층판 해석이론	$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^o(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \phi_\alpha(x_\beta)z^3$ $+ \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z - z_k)H(z - z_k)$ $+ \sum_{k=1}^{N-1} \bar{u}_\alpha^k(x_\beta)H(z - z_k)$ $u_3(x_\beta, z) = w(x_\beta) + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{w}^k(x_\beta)H(z - z_k)$	
판 지능구조물의 해석이론	변위장	$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^o(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \phi_\alpha(x_\beta)z^3$ $+ \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z - z_k)H(z - z_k)$
	온도장	$u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + r_1(x_\alpha)z + r_2(x_\alpha)z^2$ $\theta = \theta_0 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_3 z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} \theta^{sk}(z - z_k)H(z - z_k)$
	전기장	$\phi = \sum_{k=1}^N \{ \phi_0^{(k)} + \phi_1^{(k)}(z - z_{k-1}) \} \{ H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k) \}$

하여 일반 적층배열로 확장하였고, 평판과 셸에서 모두 그 정확도를 보였다. 또한 평판의 경우에는 유한요소로 구현하여 그 효율성과 정확성을 검증하였다.²³⁾ 평판과 셸에 대한 지그재그 3차 고차 이론의 변위장은 표 2와 표 3에 나타내었다. 그러나 이 이론도 C1지속함수를 요구하기 때문에 Reddy나 Disciuv의 이론과 같은 단점을 가지고 있다. 그러므로 유한요소 구현시 요소 강성행렬을 복잡하게 구성해야하고 C1연속조건이 필요하다는 단점을 우회하기 위해서 본 저자는 후처리기법을 제안하였다.²⁴⁾ 후처리기법은 본 해석(solver)부분은 일차 전단변형이론을 이용하고 일차 전단변형이론의 주변수의 수와 3차 지그재그 이론의 주변수의 수가 같

다는 점에 착안하여 일차 전단변형이론의 주변수들을 고차이론의 주변수로 사상시키는 방법론이다. 사상(mapping)의 주안점은 저차이론과 고차이론의 횡전단변형에너지를 등가로 가정하는 것이다. 실제 평판의 변형에너지는 굽힘에너지와 횡전단변형에너지로 크게 나눌 수 있고, 저차이론이나 고차이론이나 모두 굽힘에너지는 잘 묘사하기 때문에 해의 민감성은 횡전단 에너지를 얼마나 잘 고려하는가에 달려있다. 그러므로 일차 전단변형이론에서 횡전단에너지를 잘 고려하기 위해서 전단수정계수를 사용하고 그 다음 3차 지그재그이론의 횡전단에너지와 등가로 놓음으로써 저차 이론의 주변수들을 고차이론의 주 변수들로 다 일치 시킬 수 있게 된다.

이 방법은 평판의 2차원 문제와 유한요소²⁵⁾ 적층 쉘²⁶⁾로, 평판과 쉘의 유한요소^{27),28)}로 그리고 최근에는 일반적층 배열²⁹⁾로 확장하여 적용되었다. 이 방법론은 일차 전단변형이론의 해석만 필요하므로 Solver 부분이 매우 간단하고 CO등매개 요소만으로 해를 구할 수 있기 때문에 상용 유한요소 코드에서도 실행이 가능하다. 단지 후처리를 이용하여 주어진 해의 데이터로부터 고차의 변위장을 재구성해서 응력장과 변형장을 구하면 된다. 이 방법론은 일차 전단변형이론으로부터 어떠한 종류의 고차이론의 주변수로도 변환이 가능하기 때문에 일반적인 방법이라고 할 수 있다.³⁰⁾ 다만 matching 방법에 따라 해의 정확도는 조금씩 바뀔 수 있다. 그러나 전체적으로 저차의 모델로부터 해를 구하고 고차모델의 변위장을 재구성하는 방법은 매력적인 방법으로 생각된다.

Reddy는 이와 별도로 1987년 경에 나중에 layerwise theory라고 명명한 복합적층평판을 해석하기 위한 모델을 발표하였다.³¹⁾ 이 모델은 기본적으로는 선형으로 변하는 지그재그 변위장으로부터 출발한다. 물론 계층적인 모델로 일반화하기 위해서 2차 또는 3차의 변위장을 층마다 가정할 수 있다. 이 모델은 층마다 자유도를 가정하기 때문에 컴퓨터 자원과 연산시간을 과도하게 요구하는 단점은 있으나 유한요소로 구현하기가 쉽고 CO기저함수만 요구하기 때문에 상용 코드에 구현하기도 용이하다. 또한 많은 수의 자유도를 기본적으로 가지고 있기 때문에 해석의 정확도도 보장되는 이론이라고 할 수 있다. 이 모델은 Reddy가 처음 발표한 것은 아니고 Srinivas³²⁾가 처음 발표한 모델이다. 그러나 Srinivas가 처음 발표했을 때는 당시 컴퓨터의 성능이 Reddy가 발표했을 당시보다 훨씬 미흡하여 모델링 자체가 현실적으로 적용할만 하지 않은 때였고 Reddy가 발표할 당시는 그 모델을 사용하는데 필요한 컴퓨터의 기억용량과 연산시간등의 성능이 그 모델을 유용한 것으로 만들어 줄 수 있었다.

그러므로 사실 Reddy의 이 분야에서의 주요 업적인 2개의 아이디어는 이미 존재하는 아이디어를 다시 조명한 것이라고 할 수 있다. 다만 논문이 발표된 적절한 시기 선정과 적용 예가 그의 논문들을 중요하게 평가하게 된 것이라고 할 수 있다.

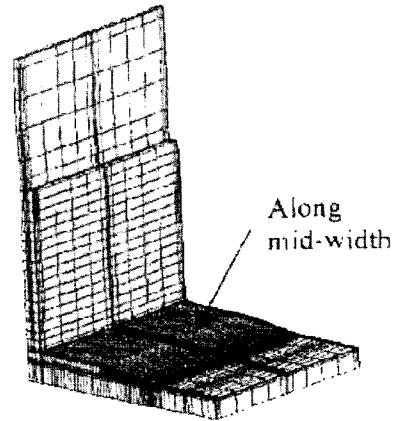


그림 3 Averill의 T-joint

이 분야의 연구는 초기의 Reissner,³³⁾ Mindlin,³⁴⁾ Hildebrand,³⁵⁾ Lo, Christensen, Wu³⁶⁾ 등의 연구를 기저로 Stavsky, Reddy, Bert, Noor, Yu, Librescu 등의 2세대를 거쳐 지금은 Di Sciuva, Chattopadhyay, Averill, Carrera, Cheng 등의 3세대들에 의해 연구가 진행 중이다.

이 중 Averill의 연구^{37),38)}는 특별히 언급되어야 할 이유가 있다고 생각된다. 최근 3년간 Reddy의 제자였던 Averill은 Reddy의 layerwise 모델에 층간 응력의 연속조건과 위, 아래면의 전단응력 조건등을 미리 부가하여 자유도 수를 줄이면서 CO로 구성되는 기저함수를 도출하여 유한요소 정식화를 수행할 수 있었다. 그의 일련의 논문은 sublaminat 개념을 이용함으로써 더욱 자유도를 줄일 수 있는 계층적인 모델의 특성도 가지고 있다. CO의 특징은 그의 요소가 상용화될 수 있다는 가능성을 보여주고 있고 Composite Affordability Initiative Program을 통하여 미 육군, 공군, NASA등의 협력과제에서 상당히 완성도있는 상업화할 수 있는 프로그램을 제시하였다.³⁹⁾ 결국 지그재그 모델이 복합재료 전산 구조역학에 유용한 역할은 이와 같은 방법에 의한 것이라는 생각이 든다. Averill은 실제적으로 사용되고 있는 항공기의 복합재 동체의 substructure를 완전히 지그재그 모델(그림 2 참조)을 사용하여 모델링하였고 30-40장에 달하는 적층수를 가지는 구조물을 약 7-10만개의 자유도를 사용하여 성공적으로 해석할 수 있었다.(그림 3 참조) 앞으로 보강재로 보강된 복합재료 구조물의 해석에도 지그재

그 모델이 널리 쓰일 것으로 예상된다.

3. 연구 동기와 좌절 : 층간응력

복합재료 적층구조물의 해석을 위해 제시된 다양한 고차이론은 어떤 형태이든지 층간응력의 예측 결과를 보여준다. 어떤 이론은 보다 더 정확한 결과를 보여주어 어떤 모델은 그렇지 못한 결과를 보여준다. 중요한 점은 모델의 층간 응력이 구성 방정식으로부터 산출되었는가, 그렇지 않으면 3차원 응력평형 방정식의 적분을 통해 산출되었는가 하는 점이다. 변위장에 기초한 고차이론의 경우 단순지지 경계의 경우 분포하중이 작용하는 굽힘문제에서 1 : 4의 두께 비에서 3차원 탄성해와 거동이 비슷한 횡전단응력을 구성방정식으로 구해내기 위해서는 두께 방향으로 4차 이상의 다항식 전개가 필요한 것으로 보고되었다.⁴⁰⁾ 또한 고차이론은 고정경계 조건을 기술하는 방법이 여러 가지가 되는데 이 경우 층간응력을 구성방정식만으로 정확히 산출하기에는 어려움이 많다. 원통셸의 경우에는 셸이 얇아짐에 따라 원통의 길이 방향으로 전단응력이 두께를 통해 선형적으로 지그재그 형태로 변화하게 된다.²⁸⁾ 이는 횡전단응력이 두께방향으로 2차식의 형태로 변할 것이라는 일차원 보와 이차원 평판에서의 기대를 완전히 깨뜨려버리는 결과이다. 이 경우, 우리는 어쩔 수 없이 두께 방향으로 평형방정식을 적분하여 층간응력을 산출해야만 한다.

평형방정식을 적분해서 층간응력을 산출하는데 발생하는 어려운 점은 첫째, 유한요소의 후처리기로 층간응력을 산출할 때 주 변수의 고차 미분이 요구된다는 것이다. 등매개 유한요소로 구현했을 경우(C0요소)에는 선형함수 또는 2차함수의 형상함수를 사용하는데 횡전단응력을 산출할 때 2차 미분이 필요하고 횡수직응력을 계산할 때는 3차 미분값이 요구된다. C1요소의 경우에는 사정이 더욱 나빠 횡전단응력을 산출할 때는 처짐에 대한 3차 미분값이 필요하고 횡수직응력을 산출할 때는 처짐에 대한 4차미분 값이 필요하다. 고차 미분값을 계산하기 위해서는 여러개의 절점이 필요하므로 1개의 요소안에서 필요로하는 모든 고차 미분값을 도출할 수 없다. 그러므로 관심이 있는 절점

에서의 고차미분 값의 도출을 위해서는 인접해 있는 요소의 절점 또는 가우스점에서의 정보를 이용해야하는 번거로움이 있다. 또한 층간응력이 최대가 되는 지역은 경계에 가까운 지역인데 이 지역에서 고차 미분값을 정확히 산출하기가 까다롭다.

특히 아직까지 만족스럽게 해결되지 않은 문제들은 첫째, 단순지지 경계에서 각적층(angle-ply) 배열을 가지는 평판의 층간응력해석이다. 전단응력의 표현식에 양방향의 면내 회전 변위가 연성되므로 평판이론으로는 고정밀도의 해석을 하기가 용이하지 않다.²⁹⁾ 이 어려움은 지그재그이론이나 layerwise 이론 모두에 해당된다. 두 번째는 열하중이나 전기하중하에서의 층간응력해석이다. 열하중이나 전기하중은 두께 방향의 변형을 야기하기 때문에 두께방향의 변형을 고려하여야 신뢰도 높은 해석 결과를 제공할 수 있다. 평면응력 가정은 이 경우 상당한 오차를 수반하게 된다. 3차원탄성해를 도출할 때도 이와 같이 두께 방향의 변형을 무시하면 얇은 평판의 경우에도 응력과 변형의 거동은 매우 큰 오차를 수반하게 된다.^{41),42)} 그러므로 이 두께 방향의 변형은 기계하중이 작용할 때는 무시하여도 해의 신뢰도를 떨어뜨리지 않으나 전기하중이나 열하중이 작용하고 있을 때는 무시할 수 없다.⁴³⁾ 그러나 열하중이 작용하는 경우에는 두께 방향으로 면내 변위가 3차로 변하고 처짐이 2차로 변하는 지그재그 이론을 사용하여도 대칭 직교차적층배열(symmetric cross-ply)의 경우에는 횡수직 응력을 정확히 예측할 수 없다. 그 이유는 횡전단응력 σ_{xz} 과 σ_{yz} 의 부호가 서로 반대이기 때문에 횡수직응력 σ_{zz} 는 그 크기가 매우 작아져서 제대로 예측되지 않기 때문이다. 횡수직응력을 열하중하에서 정확히 산출하려면 면내 변위를 최소한 5차 이상으로 전개해야하고 평형방정식을 두께 방향으로 적분하여야만 된다고 최근 보고되고 있다.⁴⁴⁾

네 번째는 저차의 유한요소를 사용했을 때 고차의 미분 값을 산출하는 방법에 관한 것이다. 통상 미분값은 차분을 이용해서 계산하게 되는데 메쉬가 일정한 형태로 주어지게 되면 x방향과 y방향으로 각각 차분을 이용해서 미분을 구하면 오차가 크지 않게 된다. 그러나 곡선 경계 즉 경계가 직선이 아닌 경우 또는 원공주변의 응력을 산출할 경

우에는 횡전단, 횡수직 응력을 구하는데 어려움이 있다. 또한 절점의 배치가 불규칙할 때 요소의 뒤 틀림이 심해서 층간응력을 정확히 복원하기가 어려워진다.

층간응력의 도출은 실제 복합재료 적층 판과 쉘의 굽힘문제에서보다 자유단이 있거나 접합부가 있는 문제에서 더 심각하게 고려되어야 할 문제이다. 그 이유는 판, 쉘의 굽힘문제에서도 층간응력이 강도에 중요하기는 하나 비교적 작은 크기(아무리 커도 면내 응력보다 더 크지는 않은)의 응력이기 때문에⁴⁵⁾ 실제 정적하중에서의 파괴를 유발하는 응력은 면내 응력들이다. 저속충격과 같은 동적인 문제에서는 층간분리를 야기시키는 횡전단응력과 횡수직응력이 매우 중요한 응력 성분이 된다.⁴⁶⁾ 그러나 자유단 근처에서 층간응력은 극심할 정도로 큰 값을 가지게 되어 파괴는 층간응력에 의해 시작되므로 층간응력의 정확한 해석이 더욱 중요하게 된다. 그러므로 복합재료 적층 구조물을 2차원 또는 준 3차원으로 모델링할 때 어떤 모델이 자유단의 응력 분포를 정확히 묘사할 수 있는지를 아는 것이 중요하다. layerwise 모델, Averill의 모델, Carrera의 모델들은 자유단에서의 층간응력을 묘사할 수 있는 모델들이다.^{12),31),47)} 실제 자유단의 층간 응력을 해석하는 문제는 3차원 문제이므로 2차원모델들, 특히, 평면 응력상태로 가정된 구성 방정식을 사용하는 모델들은 자유단 부근의 응력을 잘 나타낼 수 없다. 특히 자유도를 줄인 구속 조건을 사용하는 지그재그 모델들은 이런 실제 삼차원 문제에 사용하기에는 적합하지 않다. 그러나 layerwise 모델도 적층배열에 따라 삼차원 층간응력 효과를 나타내는 국지적인 지역(경계층)의 두께가 심하게 달라지므로 국지지역과 전체지역의 메쉬를 적절히 나누는 방법을 전략적으로 잘 수행해야만 한다. 그렇지 않으면 극심하게 변하는 층간응력의 구배를 잘 묘사할 수 없게 된다. 이런 점을 극복하기 위해서 적층평판의 경우 열하중, 인장, 굽힘, 비틀림하중에 대해 자유단의 응력을 정확히 예측할 수 있는 해석적인 반복기법이 개발되었다.^{48),49)} 여러 가지 다양한 기하학적인 조건과 경계조건을 다루기에는 유한요소법이 좋은 방법이나 단순한 평판의 기하학적 조건과 기본적인 하중조건에 대해서는

여러 가지 적층 배열에 대해 초기 설계단계에서의 최적화,⁵⁰⁾ 강도 평가⁵¹⁾ 등에는 해석적인 접근 방법이 추천될 만하다고 하겠다.

4. 적용 예

지금까지는 복합재료 적층 구조물에 대한 고차 이론/모델링들과 층간응력의 계산 방법과 문제점들을 살펴보았다. 현재 이런 모델링 또는 이론들이 어떤 문제들에 적용되고 있으며 이 분야의 연구 추세는 어떤 방향으로 나아가고 있는지를 살펴 보도록 하겠다.

4.1 층간 접합부의 모델링

1996년 경에 Cheng은 변위장에 기초한 지그재그 고차이론에 복합재 층사이에 발생할 수 있는 접합계면의 접합 불완전성을 거시적으로 모델링하여 접합 불완전성이 정적인 변형, 진동, 안정성 등에 미치는 영향을 보고하였다.⁵²⁾ 사실 완전 접합이란 현상학적으로는 존재할 수 없기 때문에 이러한 고려는 당연한 연구 방향 중의 하나일 것이다. 복합재 층의 경계면에서의 미끄러짐(interface slip)으로 알려진 이 현상은 이미 Murakami가 그의 부분 혼합 변분법에 입각한 혼합 변위, 응력장에 기초한 평판이론을 발표한 바로 직후 고려해왔던 것이다.⁵³⁾ 그러나 그 당시 이 논문은 주목을 받지 못하여 연구가 그 방향으로 계속 진행되는 탄력을 받지 못하였다. 그러나 Cheng이 지그재그 변위장에 기초한 모델에 이런 불완전한 접합 효과를 고려하기 시작한 후 DiSciuva, Librescu⁵⁴⁾ 등이 유사한 주제에 대한 논문을 발표하면서부터 적지 않은 연구가 진행되어 왔다. 본 저자는 Murakami가 시작한 후 10년간 이 연구가 진행되지 않고 있다가 다시 연구가 전체적으로 재개되고 있는 정확한 이유를 알 수가 없을 뿐만 아니라 연구 주제가 연구자의 흥미를 자극하는 동기가 무엇인지도 정확히 알 길이 없다. 짐작하건데 외부에서 제공되는 연구비가 주어지는지 그렇지 않은지에 달려있는 문제인 것 같기도 하다.

이와는 별도로 복합재적층 구조물이 저속 충격

을 받거나 생산 공정중 발생하는 불확실성으로 인해 층간 분리가 발생할 수가 있다. 이 층간 분리 현상은 20여년 전에 Chai와 Babcock, Knauss⁵⁵⁾에 의해 처음으로 연구가 개시되었고 그 이후 많은 역학전공자들에 의해 연구가 진행되어 왔다. 최근 5년전까지의 연구 성과는 Simites⁵⁶⁾의 리뷰 논문에 잘 나타나 있다. 주목할 만한 연구는 J.Lee에 의한 Reddy의 layerwise 모델에 기초한 층간분리부의 좌굴, 후좌굴, 진동해석등이다.^{57),58)} J. Lee는 Virginia Tech의 연구그룹 속에서 처음으로 Reddy의 layerwise 모델을 층간분리부가 있는 구조물의 좌굴, 후좌굴 문제에 적용하였다. 본 저자는 이 방법론이 층간분리부의 기하학적형상, 크기, 위치, 개수에 관계없이 체계적이며 CO 유한요소로 구현가능하다는 장점 때문에 분리부는 layerwise모델을 사용하고 건전부는 일차전단변형이론을 사용하여 후처리기법이 제시하는 고차모델의 변위장과 저차모델의 변위장을 서로 사상하는 방법을 이용하여 전체-국지 방법론을 제시하였다.⁵⁹⁾⁻⁶¹⁾ 이 방법은 전산자원을 크게 줄여서 해석을 수행할 수 있도록하는 장점이 있다.

한편, Arizona주립대학의 Chattopadhyay는 부드럽게 변하는 3차다항식을 층마다 가정하는 면내 변위장을 구축하여 원통 셸의 선형좌굴, 후좌굴^{62),63)} 등을 수행하였다. 효율적인 지그재그 고차이론을 이용하여 층간분리부가 있는 문제를 다루는 방법론에 관한 연구가 미흡하기 때문에 본 연구자는 최소한의 자유도를 가지고 다층간분리부를 해석할 수 있는 방법론을 모색하였다. 층간분리부의 문제는 복합재료 구조물의 적용을 항상 심각하게 고려하는 항공우주구조에서는 중요한 문제로 취급되기 때문에 최소한의 자유도로 구조물의 하중지지 능력을 파악하는 방법론의 개발은 절실한 편이라고 할 수 있겠다. 본 연구자는 1차원보,⁶⁴⁾ 2차원평판,⁶⁵⁾ 셸⁶⁶⁾ 구조물의 고차 지그재그이론을 개발하였고 유한요소로 구현하였다. 본 연구자가 제안한 방법은 고차 지그재그 이론으로는 최소한의 자유도로 층간분리부를 체계적으로 해석하는 방법이다. 그러나 혼합 좌굴모드의 경우에는 정확히 좌굴값을 제공하지 않고 있으므로 자유도를 더 추가하여 보다 정확히 좌굴을 예측할 수 있도록 할 필요가 있고 추가 연구들이 더 진행될 것으로 기대하고 있다.

층간분리부가 있는 복합재구조물의 하중지지능력에 대한 평가는 분리부의 확장에 대한 고려가 추가로 필요하다. 압축력을 받는 평판이나 셸은 좌굴을 경험하게 되나 좌굴과정중 또는 좌굴이전에 분리부가 확장될 수 있다. 이는 균열진전에 관한 해석을 수행해야 알 수 있다. 층간분리부의 위치가 서로 같은 적층배열을 가지는 접합층의 사이에서 일어나면 이는 단지 orthotropic material의 균열해석으로 볼 수 있어서 가상 균열 닫힘 방법(Virtual Crack Closure Method ; VCCM)에 의해 유한요소에서 간단히 에너지 방출율을 계산할 수 있다. 그러나 서로 적층각이 다른 복합재료의 층간 분리부에서는 균열의 진전을 예측하기 위한 에너지 방출율이 여러 가지 모드가 합성되어 있는 상태에서 선형탄성론의 견지에서보면 이중재의 계면 균열에 관한 문제는 균열 선단에서 응력장이 매우 심하게 진동하며 균열선단에서는 특이 값을 제공하므로 해석하기에 매우 까다롭다. 최근 C.T.Sun⁶⁷⁾등은 Stroh formalism에 의해 응력확대계수를 정의하여 정해진 균열길이에 대한 에너지 방출율을 계산함으로써 응력확대계수를 계산하는 방법론을 제시하였다. 그러나 균열진전의 문제는 균열진전시 필요한 물성치인 파괴 toughness의 값이 필요하게 되는데 여러 가지 적층배열에 대해서 항상 적용할 수 있는 물성치를 찾는다는 것은 계면의 마찰효과 때문에 상당히 까다로운 문제라고 할 수 있다. 이러한 난점 때문에 층간분리부가 있는 문제의 해석은 아직도 근본적인 해결을 하지 못하고 지지부지하고 있는 상태이다. 계속 꾸준히 이 문제를 연구하고 있는 연구자들은 Suemasu, Nilsson등이다.

4.2 스마트 복합재 구조물에 대한 모델링

스마트 복합재 구조물의 해석과 설계 및 제어는 최근 10여년간 비약적으로 발전되어왔다. 특히 복합재료 적층구조물과 같이 경량화와 극심한 환경조건에서 사용되어지는 구조물은 감지와 능동/수동적인 작동기의 장치를 갖추므로써 재료와 구조물 성능을 극대화할 수 있는 장점이 있다. 그러므로 고정밀의 해석과 설계를 위해 고차 이론을 사용하여 해석과 설계를 수행하는 연구의 증가는 당연한

추세라 할 수 있다. 초기의 연구는 Crawley,⁶⁸⁾ Ha⁶⁹⁾ 등에 의해 수행되었다. 특히 Ha는 일차 전단 변형이론에 기초한 유한요소를 전기하중과 기계하중이 복합되어 있는 지능 구조물에 적용한 초기의 논문으로 많이 인용되고 있다. 그 후 고정밀의 해석과 거동의 예측을 위해 고차 이론을 사용하는 연구가 진행되어 왔다. 전기-기계 거동의 연성 효과가 중요한 스마트 구조물의 작동과 감지의 모델링은 처음에는 전기 포텐셜은 층별이론을 사용하고 변형거동은 일차 전단변형이론을 사용하는 형태로 연구가 되었다. 그 후 Saravanas⁷⁰⁾ 등에 의해 전기포텐셜과 변위장이 모두 층별자유도로 표시되는 이론이 제안되었다. 그러나 이런 모델링은 너무나 과도한 자유도를 사용하게 되어서 적층수가 증가하는 경우에는 효율적인 모델링이 되지 못하는 단점 때문에 Chattopadhyay 등은 전기 포텐셜은 층별 자유도로 표시하고 변위장은 매끈하게 변하는 삼차 다항식으로 표시하는 이론을 제안하였다. 본 연구자는 열-전기-기계하중이 완전 연성된 경우에 평면 응력으로 근사하지 않고 삼차원의 구성 방정식을 그대로 사용하고 두께 방향의 변위를 2차 다항식으로 전개하여 횡수직 변형과 횡수직 응력을 모두 고려하는 효율적인 지그재그 고차이론을 제안하였다. 온도장도 지그재그로 변하는 형태 가정한 후 층의 접합면에서 온도장의 연속조건과 두께 방향으로의 열 유량의 연속 조건을 부가하여 기준면의 자유도만으로 온도장을 표시하여 온도장과 변위장의 자유도를 대폭 줄인 이론을 제안하였다. 수치예를 통해 제안한 모델의 성능을 입증하였으며⁴³⁾ 유한요소로 구현하였다.⁷¹⁾ 앞으로 셀구조물에 대한 모델링으로 이론을 확장할 것이며 층간 분리 부가 있는 스마트 구조물이 열-기계-전기 하중이 완전 연성된 경우로 모델링을 확장할 것이다. 이 연구에서 성능향상을 기하기 위해서는 두께 방향의 처짐에 대한 변위 또한 층별 자유도를 사용하는 것이 바람직할 것으로 사료되며 이에 대한 연구가 앞으로 계속 발전되어 나갈 것으로 기대된다.

5. 결 론

이제까지 복합재료 적층구조물의 해석을 위한

여러 가지 이론/모델을 살펴보았다. 살펴본 모델들로부터 모델들에 대한 개인적인 견해와 연구 방향에 대해 언급하는 것으로 결론을 대신하겠다.

지금까지 보고된 모델링들의 성능을 기초로 다음과 같이 요약하였다.

1. 구조물의 전체 거동을 묘사하기에는 일차 전단 변형이론이 가장 적합하다.
2. 구조물의 두께방향의 거동을 묘사하기에는 지그재그 이론이 가장 효율적이다.
3. 유한요소로 구현하기 편리한 모델은 층별이론이며, 경계 근처에서의 거동 파악에도 효과적이다.
4. 층간 응력의 복원은 평형방정식을 적분해서 얻어야만 신뢰도를 확인할 수 있다.

현재까지 개발된 모델들의 한계를 극복하기 위해서는 다음과 같은 점이 더 연구되어야 한다.

1. 기계하중하에서의 각적층배열(angle ply)에 대한 변형을 정확히 기술할 수 있는 모델 개발
2. 열/전기하중에서 정확도 높은 횡수직응력의 복원
3. 구조물의 내부해를 점근적으로 정확히 묘사하기 위한 경계조건에 대한 고찰
4. 자유단, 조인트, 컷아웃등 구조 불연속/특이 효과를 효과적으로 기술하기 위한 모델링 전략

또한 보다 근본적으로 복합재 적층구조물의 거동을 해석하기 위해서는 다중 스케일에 입각한 복합재 구조물의 모델링 기법과 전산 역학적인 구현에 대한 연구가 필요하며 앞으로 이 방향의 연구가 점차 증가할 것으로 예상된다.

References

1. Kapania, R. K. and Raciti, S., "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part I : Shear Effects and Buckling," *AIAA J*, Vol. 27, No. 7, pp.923~934, 1989
2. Kapania, R. K. and Raciti, S., "Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates, Part II : Vibration and Wave Propagation,"

- AIAA J.*, Vol. 27, No. 7, pp.935~946, 1989
3. Noor, A. K. and Burton, W. S., "Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates," Vol. 42, No. 1, pp.1~12, 1989
 4. Reddy, J. N. and Librescu, L., "A Few Remarks Concerning Several Refined Theories of Anisotropic Composite Laminated Plates," *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 27, No. 5, pp.515~527, 1989
 5. Reddy, J. N., "An Evaluation of Equivalent-Single-Layer and Layerwise Theories of Composite Laminates," *Composite Structures*, Vol. 25, pp.21~35, 1993
 6. Carrera, E., "Developments, Ideas, and Evaluations Based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the Modeling of Multilayered Plates and Shells," *ASME, Appl Mech Rev.*, Vol. 54, No. 4, pp.301~329, 2001
 7. Reissner, E., "On a Certain Mixed Variational Theorem and a Proposed Application," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 20, pp.1366~1368, 1984
 8. Murakami, H. and Toledano, A., "A High-order Laminated Plate Theory with Improved In-plane Response," *Int. J. Solids & Struc.*, Vol. 23, pp.111~131, 1987
 9. Murakami, H., "Laminated Composite Plate Theory with Improved In-plane Responses," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 53, pp.661~666, 1986
 10. Toledano, A. and Murakami, H., "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp.181~189, 1987
 11. Carrera, E., "C0 Reissner-Mindlin Multilayered Plate Element Including Zig-Zag and Interlaminar Stress Continuity," *Int. J. for Numer. Methods in Eng.*, Vol. 39, pp.1797~1820, 1996
 12. Carrera, E., "Evaluation of Layerwise Mixed Theories for Laminated Plates Analysis," *AIAA J.*, Vol. 36, No. 5, pp.830~839, 1998
 13. Carrera, E., "Transverse Normal Stress Effects in Multilayered Plates," *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol. 66, pp.1004~1012, 1999
 14. Carrera, E., "Singlevs Multilayer Plate Modeling on the Basis of Reissner's Mixed Theorem," *AIAA J.*, Vol. 38, No. 2, pp.342~352, 2000
 15. Carrera, E., "An Assessment of Mixed and Classical Theories for the Thermal stress analysis of Orthotropic Multilayered Plates," *J. of Thermal Str.*, Vol. 23, pp.797~831, 2000
 16. Levinson, M., "An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates," *Mech. Res. Comm.*, Vol. 7, pp.343~350, 1980
 17. Reddy, J. N., "A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 51, pp.745~752, 1984
 18. Disciuvia, M., "Evaluation of Some Multilayered, Shear-deformable Plate Element," *Computer & Struc.*, Vol. 24, No. 6, pp.845~854, 1986
 19. Diusiuva, M., "An Improved Shear-deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells & Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 54, pp.589~596, 1987
 20. Cho, M. and Parmerter, R. R., "Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos. Struc.*, Vol. 20, pp.113~123, 1992
 21. Cho, M. and Parmerter, R. R., "Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configuration," *AIAA J.*, Vol. 31, No. 7, pp.1299~1306, 1993
 22. Cho, M. and Kim, Ki-Ook and Kim Min-Ho, "Efficient Higher-order Shell Theory for Laminated Composites," *Composite Str.*, Vol. 34, pp.197~212, 1996
 23. Cho, M. and Kim, Ki-Ook and Kim Min-Ho, Cho, M. and Parmerter R. Reid, "Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory," *AIAA J.*, Vol. 32, No. 11, pp.2241~2248, 1994
 24. Cho, M. and Kim, J. H., "Postprocess Method Using Displacement Field of Higher Order

- Laminated Composite Plate Theory," *AIAA J.*, Vol. 34, No. 2, pp.362~368, 1996
25. Cho, M. and Kim, J. S., "Four-Noded Finite Element Post-Process Method Using a Displacement Field of Higher Order Laminated Composite Plate Theory," *Computers & Struc.*, Vol. 61, No. 2, pp.283~290, 1996
 26. Cho, M. and Kim, M. H., "A Postprocess Method Using a Displacement Field of Higher-order Shell Theory," *Composite Struc.*, Vol. 34, pp.185~196, 1996
 27. Cho, M. and Kim, J. S., "Improved Mindlin Plate Stress Analysis for Laminated Composites in Finite Element Method," *AIAA J.*, Vol. 35, No. 3, pp.587~590, 1997
 28. Cho, M. and Kim, J. S., "A Post-process Method for Laminated Shells with a Doubly Curved Nine-noded Finite Element," *Composites B-Eng.*, Vol. 31, pp.65~74, 2000
 29. Cho, M. and Choi, Y. J., "A New post-processing Method for Laminated Composites of General Lamination Configurations," *Composite Struc.*, Vol. 54, pp.397~406, 2001
 30. Kim, J. S. and Cho, M., "Matching Technique of Postprocess Method Using Displacement Fields of Higher Order Plate Theories," *Composite Struc.*, Vol. 43, pp.71~78, 1998
 31. Reddy, J. N., "A Generalization of Two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates," *Comm. Appl. Numer. Method*, Vol. 3, pp.173~180, 1987
 32. Srinivas, S., "A Refined Analysis of Composite Laminates," *J. Sound Vib.*, Vol. 30, No. 4, pp.495~507, 1973
 33. Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 12, pp.69~76, 1945
 34. Mindlin, R. D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp.1031~1036, 1951
 35. Hildebrand, F. B. and Reissner, E. and Thomas, G. B., "Notes on the Foundations of the Theory of Small Displacements of Orthotropic Shells," NACA TN-1833, Washington DC, 1938
 36. Lo, K. H. and Christensen, R. M. and Wu, E. M., "A Higher-order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp.669~676, 1977
 37. Averil, R. C., "Static and Dynamic Response of Moderately Thick Laminated Beams with Damage," *Composite Eng.*, Vol. 4, pp.381~395, 1994.
 38. Averil, R. C. and Yip, Y. C., "Development of Simple, Robust Finite Elements Based on Refined Theories for Thick Laminated Beams," *Computers & Struc.*, Vol. 59, pp.529~546, 1996
 39. Engelstad, S. P. and Averil, R. C. and Berry, O. T. and Eby, D. J., *Implementation and Application of Zig-Zag Finite Elements for Composite bounded Tee-Joint Modeling*, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Structures, 42th SDM Conference, Seattle, WA. 16-19, April, AIAA-2001-1487, 2001
 40. Li, X. and Liu, D., "Zig-zag Theory for Composite Laminates," *AIAA J.*, Vol. 33, pp.1163~1165, 1995
 41. Savoia, M. and Reddy, J. N., "Three-dimensional Thermal Analysis of Laminated Composite Plates," *Int. J. Solids Struc.*, Vol. 32, pp.593~608, 1995
 42. Cho, M. and Park, H. S., Comments on "Three-dimensional Thermal Analysis of Laminated Composite Plates," *Int. J. Solids Struc.*, Vol. 34, No. 35~36, pp.4633~4651, 1997
 43. Cho, M. and Oh, J., *Higher order zig-zag theory for fully coupled thermo-electric-mechanical smart composite plates*, AIAA/ASME/ASCE/

- AHS/ASC, 42nd SDM Conference, Seattle, WA, AIAA Paper Number 2001-1403, pp.1~10. And also submitted to AIAA Journal, 2001
44. Rohwer, K. and Rolfes, R. and Sparr, H., "Higher-order Theories for Thermal Stresses in Layered Plates," *Int. J. of Solids and Struct.*, Vol. 38, pp.3673~3687, 2001
 45. Cho, M. and Yoon, J. Y., "First-ply Flexural Failure Analysis of Symmetric Cross-ply Laminates by the Postprocess Method," *Composite Struct.*, Vol. 40, No. 2, pp.115~127, 1998
 46. Wu, C. L. and Sun, C. T., "Low Velocity Impact Damage in Composite Sandwich Beams," *Composite Structures*, Vol. 34, No. 1, pp. 21~27, 1996
 47. Averill R. C. and Cheng, Y. Y. "Development of Simple, Robust Finite Elements Based on Refined Theories for Thick Laminated Beams," *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 3, pp. 529~546, 1996
 48. Cho, M. and Yoon, J. Y., "Free-edge Interlaminar Stress Analysis in Composite Laminates by the Extended Kantorovich Method," *AIAA J.*, Vol. 37, No. 5, pp.656~660, 1995
 49. Cho, M. and Kim, H. S., "Iterative Free Edge Stress Analysis of Composite Laminates under Extension, Bending, Twisting and Thermal Loadings," *Int. J. of Solids Struct.*, Vol. 37, pp.435~459, 2000
 50. Cho, M. and Rhee, S. Y., "Optimization of Laminates with Free edges under Bounded Uncertainties Subject to Extension, Bending and Twisting," AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, 43rd SDM Conference, AIAA Paper Number 2002-1637, pp.1~11. And also submitted to AIAA Journal, 2002
 51. Kim, H. S. and Cho, M. and Kim, G. I., "Free-edge Strength Analysis in Composite Laminates by the Extended Kantorovich Method," *Composite Struct.*, Vol. 49, pp.229~235, 2000
 52. Cheng, Z. Q., and Jemah, A. K., and Williams, F. W., "Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces," *J. Appl. Mech.*, Vol. 63, No. 4, pp.1019~1026, 1996
 53. Toledano, A., and Murakami, H., "Shear Deformable Two-layer Plate Theory with Interlayer Slip," *J. Eng. Mechanics*, Vol. 114, pp.604~623
 54. Di Sciuva, M. and Librescu, L. "Contribution to the Nonlinear Theory of Multilayered Composite Shells Featuring Damaged Interfaces," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 32, No. 3, pp.219~227, 2001
 55. Chai, H. and Bobcock, C. D. and Knauss, W. B., "One-Dimensional Modeling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling," *Int. J. of Solids and Struct.*, Vol. 17, No. 11, pp.1069~1083, 1981
 56. Simitse, G. J., "Delamination Buckling of Flat Laminates," *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*, G. J. Turvey and I. H. Marshall, eds., Chapman & Hall, London, pp. 299~328, 1995
 57. Lee, J. and Gurdal, Z. and Griffin, O. H., "Layer-Wise Approach for the Bifurcation Problem in Laminated Composites with Delaminations," *AIAA J.*, Vol. 31, No. 2, pp.331~338, 1993
 58. Lee, J. and Gurdal, Z. and Griffin, O. H., "Postbuckling of Laminated Composites with Delaminations," *AIAA J.*, Vol. 33, No. 10, pp.1963~1970, 1995
 59. Cho, M. and Kim, J. S., "Bifurcation Buckling Analysis of Delaminated Composites Using Global-Local Approach," *AIAA J.*, Vol. 35, No. 10, pp.1673~1676, 1997
 60. Kim, J. S. and Cho, M., "Postbuckling of Delaminated Composites Under Compressive Loads Using Global-Local Approach," *AIAA J.* Vol. 37, No. 6, pp.774~778, 1999

61. Cho, M. and Lee, S. G., "Global/Local Analysis of Laminated Composites With Multiple Delaminations of Various Shapes," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 39th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Long Beach, CA, AIAA, Reston, VA, pp.76~86, 1998
62. Gu, H. and Chattopadhyay, A., "Elasticity Solution for Delamination Buckling of Plates," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 39th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, (Salt Lake City, UT) AIAA, Washington, DC, pp.2543~2551, 1996
63. Chattopadhyay, A. and Gu, H., "New Higher Order Theory in Modeling Delamination Buckling of Composite Laminates," AIAA J., Vol. 32, No. 8, pp.1709~1716, 1994
64. Cho, M. and Kim, J. S., "Higher Order Zig-zag Composite Plate Theory with Multiple Delaminations," ASME J. of Applied Mech., Vol. 68, pp.869~877, 2001
65. Kim, J. S. and Cho, M., "Buckling Analysis for Delaminated Composites Using Plate Bending Elements Based on Higher-order Zig-zag Theory," Int. J. for Numer. Methods in Eng., 2001, accepted
66. Kim, J. S. and Cho, M., "Efficient Higher Order Shell Theory for Laminated Composites with Multiple Delaminations," AIAA J., 2001, accepted
67. Qian, W. and Sun, C. T., "Methods for Calculating Stress Intensity Factors for Interfacial Cracks between two Orthotropic solids," Int. J. Solids Struct., Vol. 35, No. 25, pp.3317~3330, 1998
68. Crawley, E. F., "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures," AIAA Journal, Vol. 25, No. 10, 1987, pp.1373~1385
69. Ha, S. K. and Keilers, C. and Chang, F., "Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators," AIAA J., Vol. 30, No. 3, 1992, pp.772~780
70. Saravanos, D.A. and Heyliger, P.R. and Hopkins, D.A., "Layerwise Mechanics and Finite Element for the Dynamic Analysis of Piezoelectric Composite Plates," Int. J. of Solids & Structures, Vol. 34, No 3, pp 359 ~ 378, 1997
71. Cho, M. and Oh, J., "A Finite Element Based on Cubic Zig-Zag Plate Theory for the prediction for Thermo-Electric-Mechanical Behaviors," AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, 43rd SDM Conference, AIAA Paper Number 2002-1664, pp. 1~11. 2002 