

## 일정피치 추진기의 최적화 연구에 관하여

장택수\* · 홍사영\*

\*한국해양연구원 해양개발시스템안전연구소

## A Study on an Optimized Constant Pitch Propeller

TAEK-SOO JANG\* AND SA-YOUNG HONG\*

\*Korea Research Institute of Ships and Ocean Engineering, Deajeon, Korea

**KEY WORDS:** Infinite Dimensional Optimization 무한차원 최적화, Hilbert Space Theory 힐버트 공간이론, Mathematical Uniqueness 수학적 유일성

**ABSTRACT:** Optimization of marine propellers of constant pitch is studied, with the help of the infinite dimensional optimization (Jang and Kinoshita, 2000a), which is based on the Hilbert space theory. As a numerical example, the MAU type propeller is considered and used as the initial guess for the optimization method. The numerical computations for an optimal marine propeller are performed for the constant pitch distribution. In addition, a new optimization is suggested with the constraint of constant pitch during optimization.

### 1. 서 론

지금까지의 최적화기법은 parameter study 등을 통한 설계변수의 유한차원에서 수행되어왔다. 즉 설계변수의 유한성의 한계로 복잡한 기하학적 형상의 최적목적대상을 수학적 표현의 어려움이 있었다. 이에 대해 힐버트공간에서 무한차원을 고려한 최적화기법의 개발에 따라 임의의 기하학적 형태를 갖는 물체의 모양을 최적정식화에 고려할 수 있게 되었다 (Jang and Kinoshita, 2000a).

본 연구에서는 균일입사류속에 회전하는 최적효율을 갖는 추진기의 일정피치분포를 생각한다.

일반적으로 추진기의 끝단(tip)에서의 유기속도(induced velocity)에 의한 3차원 효과는 추진기의 복잡한 기하학적 형상 때문에 무척 복잡하다고 알려져 있다. 이러한 3차원 효과를 최적설계차원의 효과적인 고려를 위해 본 연구에서는 추진기의 피치분포를 설계변수로 하여 힐버트공간이론(Hilbert Space theory)에 근거한 무한차원의 최적화기법의 이론을 도입한다.

계산에 사용한 유동은 비압축성 포텐셜유동이며 공동현상(cavitation)은 없다고 가정하여 최적 피치분포를 수치계산을 통하여 수행하였고 본 연구의 수치결과로부터 프로펠러 단독 효율곡선(open-water characteristic curve) 성능이 우수한 최적 피치분포를 구할 수 있었다. 그리고 서로 다른 두 개의 피치분포의 추진기를 최적화를 통해 수치적으로 서로 근사한 단독효율곡선을 확인하였다.

### 2. 수학적 정식화

직경  $d$ , 그리고 회전수  $n$ 의 프로펠러가 일정한 전진속도  $U$ 로 전진하고 있다. 그리고 전진비(advance ratio)  $J = U/dn$ 가 일정하다고 가정하면 추력  $T$ 와 토크  $Q$ 는 프로펠러형상의 범함수(functional)가 된다. 즉, 피치분포를  $p(r)$ 라고 하면, 추력  $T$ 와 토크  $Q$ 는

$$T = T(p) \quad (1)$$

$$Q = Q(p) \quad (2)$$

식(1)과 식(2)에 의해서 프로펠러 효율 또한 아래의 범함수로 표현 가능하다.

$$\eta_p = \frac{JK_r(p)}{2\pi K_\varphi(p)} = \eta_p(p)$$

여기서  $K_r$ ,  $K_\varphi$  는 각각 추력 및 토크계수이다.

$h = h(r)$ 를 피치분포의 미소변분(small variation)이라 하고 작은 크기(norm)을 갖는다고 가정하자.

$$\|h\|_X = \left( \int_{RB}^{RO} |h(r)|^2 dr \right)^{1/2} = O(\varepsilon) \quad (3)$$

여기서  $\varepsilon \ll 1$  그리고  $\|\cdot\|_X$ 는 힐버트공간  $X$ 에서의 크기이다 (Roman, 1975). 즉 임의의 함수에 대해

$$\|w\|_X = \left( \int_{RB}^{RO} |w(r)|^2 dr \right)^{1/2}$$

으로 정의되고 다음의 성질들을 만족한다.

$$\|w\|_X \geq 0$$

(4a)

$$\|w\|_X = 0 \Leftrightarrow w = 0$$

(4b)

$$\|\alpha w\|_X = |\alpha| \|w\|_X$$

(4c)

$$\|w+z\|_X \leq \|w\|_X + \|z\|_X$$

(4d)

식(4)에서 RB와 RO는 프로펠러 축(radius of boss)과 끝(radius of propeller)을 각각 나타낸다. 그러면 프로펠러 효율의 변화(perturbation)는 다음과 같이 표현된다 (Jang and Kinoshita, 2000a).

$$\eta_p(p+h) - \eta_p(p) = A(h) + E(h) \quad (5)$$

여기서 E는 비선형 연산자(nonlinear operator)이고 A는 선형 연산자(linear operator)로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A(h) = \langle h, G \rangle = \int_{RB}^{RO} h(r)G(r)dr \quad (6)$$

식(4)에서 변분  $h$ 가 작은 크기와 정규성(regularity)을 가지면 식(5)를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\eta_p(p+h) \approx \eta_p(p) + \langle h, G \rangle \quad (7)$$

변분과 G는 단위직교함수(orthonormal functions)  $e_i$ 를 이용하여 다음으로 표현할 수 있다 (Jang and Kinoshita, 2000b).

$$h^k(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h^k, e_i \rangle e_i(r), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

여기서  $\langle h^k, e_i \rangle = \int_{RB}^{RO} h^k(r)e_i(r)dr$  이고  $h^k$ 는 k번째의 변분을 나타낸다.

$$G(r) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e_i(r) \quad (9)$$

식(8)을 식(7)에 대입하면 다음의 대수방정식을 구할 수 있다.

$$\eta_p^k = \sum_{i=1}^{\infty} A_{k,i} g_i \quad (10)$$

여기서

$$\eta_p^k = \eta_p(p+h^k) - \eta_p(p)$$

$$A_{k,i} = \langle h^k, e_i \rangle = \int_{RB}^{RO} h^k(r)e_i(r)dr$$

식(9)를 통해서 G를 찾으면 최적피치분포는 다음의 점화식(iterated equation)으로 주어진다.

$$p_{new}(r) = p_0(r) + h_{max}(r) \quad (11)$$

여기서

$$h_{max}(r) = aG(r) \quad (12)$$

$a$ 는 양의 실수이고  $p_0(r)$ 은 초기 피치분포이다. 점화식(11)의 반복수행을 통하여 최적의 피치분포를 구할 수 있다. 본 연구에서의 제약조건(constraint)으로 다음의 부등식을 도입한다. 즉 본 연구에서 사용하는 Koyama(1980)의 code 가 비점성계산을 하고 cavitation을 고려못하는 점을 감안해서 국부피치의 변화량이 20% 미만이 되게 한다.

$$\left| \frac{p_{opti}(r)}{p_0(r)} \right| < 1.2, \quad RB < r < RO \quad (13)$$

### 3. 해의 유일성

먼저 두 개의 다른 점화식(11)을 만족하는 수렴함수열(convergent function sequence)을 도입한다. 즉 서로 다른 초기치를 만족하는 두 개의 피치분포의 함수열  $f_n$ 과  $g_n$ 을 고려한다.

$$f_n(r) \rightarrow f(r) \quad (14)$$

$$g_n(r) \rightarrow g(r) \quad (15)$$

그러면 그들의 차(difference)는

$$f_n(r) - g_n(r) \rightarrow f(r) - g(r) \quad (16)$$

이 된다. 그리고 식(7)로부터 두 개의 함수열(function sequence)은 다음을 만족한다.

$$\eta_p(f_n + \delta f_n) = \eta_p(f_n) + \langle \delta f_n, F_n \rangle \quad (17)$$

$$\eta_p(g_n + \delta g_n) = \eta_p(g_n) + \langle \delta g_n, G_n \rangle \quad (18)$$

그러면 식(12)로부터

$$\delta f_n = aF_n, \delta g_n = bG_n$$

인 상수  $a$  와  $b$  가 존재한다. 그런데  $a$  는 최적화의 step size 이고, 원하는 만큼 작게 잡을 수 있으므로 언제든지  $a$  는  $b$  와 같게 할 수 있다.

$$\delta f_n = aF_n, \delta g_n = aG_n \quad (19)$$

이 되며, 따라서 함수열의 차는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f_{n+1} - f_n = aF_n \quad (20)$$

$$g_{n+1} - g_n = aG_n \quad (21)$$

식(20)에 식(21)을 빼면 식(22)로 표현 된다.

$$(f_{n+1} - g_{n+1}) - (f_n - g_n) = a(F_n - G_n) \quad (22)$$

삼각부등식(triangle inequality, Rudin, 1991)을 식(22)에 적용하고  $\|f_n - g_n\|_X$  로 양변을 나누면

$$\frac{\|f_{n+1} - g_{n+1}\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} + 1 \geq \frac{\|a(F_n - G_n)\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \quad (23)$$

가정에 의해 식(14) 과 식(15)은 수렴하기 때문에 식(20), (21)은 0 (zero) 함수로 수렴해야 한다.

$$\|F_n\|_X \rightarrow 0, \|G_n\|_X \rightarrow 0 \quad (24)$$

그런데, 삼각부등식에 의해

$$\|F_n\|_X + \|G_n\|_X \geq \|F_n - G_n\|_X \quad (25)$$

이 되고 식(30), (31)로부터

$$\|F_n\|_X + \|G_n\|_X \geq \|F_n - G_n\|_X \rightarrow 0 \quad (26)$$

그리고 식(26)에 의해 식(22)의  $(f_n - g_n)$ 는 Cauchy sequences (Kolmogorov and Fomin, 1970)가 되어 아래와 같이 수렴한다.

$$\frac{\|f_{n+1} - g_{n+1}\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \rightarrow 1$$

따라서 식(23)는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$2 \geq \frac{\|a(F_n - G_n)\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \quad (27)$$

식(4a)에 의해 함수의 크기(norm)는 항상 영(zero)이거나 양수 이므로

$$2/a \geq \frac{\|F_n - G_n\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \geq 0 \quad (28)$$

식(28)에서 식(4c)를 이용하였다. 식(32)에 의해

$$\frac{\|F_n - G_n\|_X}{\|f_n - g_n\|_X}$$

이 존재하기 위해서는

$$\|f_n - g_n\|_X \rightarrow 0 \quad (29)$$

따라서 식(4b)를 이용하면

$$f(r) = g(r) \quad (30)$$

식(30)에 의해 서로 다른 초기조건에서 출발한 최적화는 동일한 하나의 최적피치분포를 준다.

#### 4. MAU 탑입 추진기의 피치분포

해석의 편의상 유체를 비점성, 비압축성 그리고 유동은 비회전성이라고 가정하여 속도포텐셜을 도입한다. 날개단면은 절다고 가정하여 날개의 평균단면을 보오텍스 면(vortex sheet)으로 생각한다. 본 연구에서는 날개면의 유체력을 구하기 위해 Kernel function 전개방법과 Koyama(1980)의 code를 사용하였다. 그리고 초기모델 프로펠러를 MAU 탑입의 프로펠러를 도입한다. Fig. 1에 MAU 프로펠러의 단독효율곡선이 나타나 있다. 여기서의 프로펠러는 다음의 일정한 피치분포를,

$$P_0 = 171.44(\text{mm}) \quad (31)$$

그리고 다음의 전진비에서 추진효율 0.6635의 피크를 가진다.

$$J_{\max} = 0.7494 \quad (32)$$

식(31)로 주어진 일정피치분포의 MAU 탑입의 프로펠러를 식(32)의 전진비에 대하여 최적화를 수행한다. 본 연구에서 날개의 변분을 일반화함수이론(theory of generalized functions, Gelfand and Shilov, 1964)의 시험함수(test function, Stakgold,

1967)을 도입하여 식(8)의  $h^k$ 를 생성한다 (Jang, Kinoshita and Hino, 2001);

$$h^k(r) = \begin{cases} \varepsilon \cdot \exp\left[\frac{\delta^2}{(r - b_k)^2 - \delta^2}\right], & |r - b_k| < \delta \\ 0 & |r - b_k| > \delta \end{cases} \quad (33)$$

여기서

$$\delta, b_k \in (RB, RO)$$

그리고

$$RB < b_k \pm \delta < RO$$

그러면 식(10)의 선형연립방정식의 해로서 Fourier 계수  $g_i$ 를 구할 수 있으며, 따라서 식(12)를 통하여 변분  $h_{\max}$ 를 구할 수 있다. 점화식(11)을 통한 반복연산을 수행함으로써 최적연산을 하였다. 본 연구에서는 Koyama(1980)의 code에서 날개길이방향으로 8개 분할로 유체력 계산을 수행하였다.

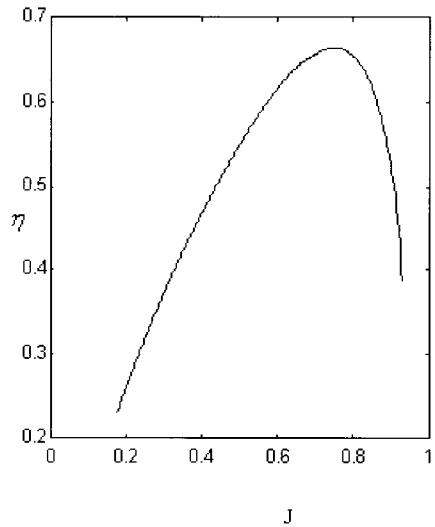


Fig. 1 Propeller open-water characteristic curve for the MAU type in Equation (31)

Fig. 2에서 실선은 식(13)의 제약조건을 만족하면서 구해진 최적피치분포를 나타낸다. 또 다른 하나의 일정피치 프로펠러를 생각한다. (즉 다음의 식을 만족하는 식(35)로 주어진 일정피치분포의 프로펠러)

$$\inf_{p_i \in X} d(p_{opt}, p_i) = \inf_{p_i \in X} \langle p_{opt}, p_i \rangle^{1/2} \quad (34)$$

여기서 Fig. 2의 실선의 피치를  $p_{opt}$ 라고 한다. 식(34)를 계산하여

$$p_i = 182.315(\text{mm}) \quad (35)$$

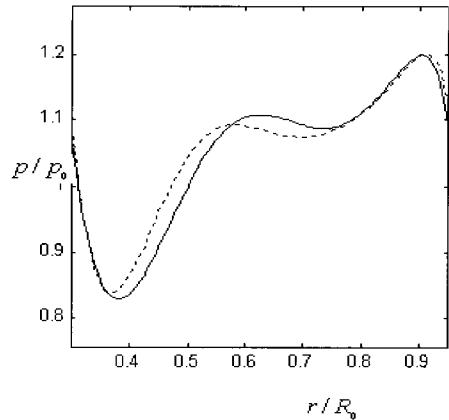


Fig. 2 Comparison of two optimized pitch distributions (solid and dotted lines for Po and P1 propellers, respectively)

으로 나타났다. Fig. 2의 점선은 식(35)의 일정피치 프로펠러의 최적 피치분포를 나타내고 있다.

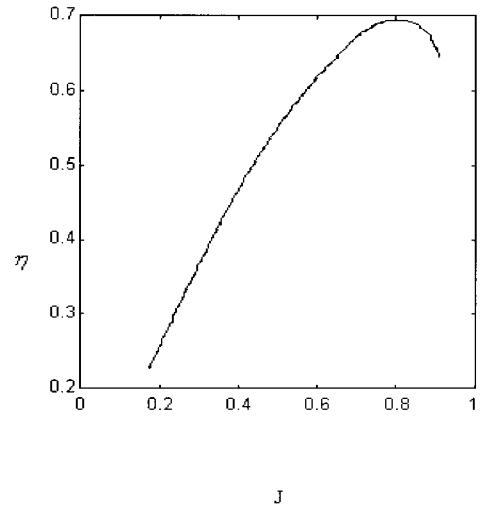


Fig. 3 Comparison of propeller open-water characteristics for two different optimized propellers (solid and dotted lines for Po and P1 propellers, respectively)

두 개의 최적피치분포의 단독효율곡선을 조사하면 Fig. 3에 도시한 것과 같이 수치적으로 거의 일치하는 효율곡선을 얻을 수 있다. 본 연구에 의한 최적피치분포를 가진 프로펠러의 효율증가를 조사하였다. 먼저 Fig. 3에서의 단독효율곡선을  $\eta_{p_{new}}(J)$ 라고 정의하면 효율이득(gain of efficiency)은 다음으로 표시된다.

$$\eta_{p_{new}}(J) - \eta_p(J) \quad (36)$$

여기서  $\eta_p(J)$ 는 Fig. 1의 단독효율이다. Fig. 4에 보인 바와 같이 전진비가 1/2 이상일 때 높은 효율이득을 볼 수 있다.

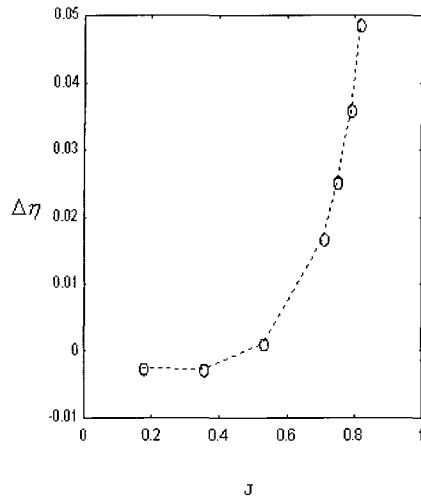


Fig. 4 Gain of the propeller efficiency

## 5. MAU 탑입 추진기의 일정피치분포

일정피치분포를 가지면서 최적의 효율을 주는 프로펠러를 생각한다. 만약 어떤 힘수공간(function space)에서 식(34)의  $P_{opt}$ 에 가장 가까운 일정함수(constant function)가 존재한다면 그것은 수학적으로 최적피치 프로펠러  $P_{opt}$ 에 가장 근접한 것이 된다. 따라서 식(35)은 일정한 피치분포를 가지는 최적 프로펠러를 의미한다.  $\eta_{pc}(J)$ 를 식(35)로 주어진 일정피치 프로펠러의 효율이라 하면 효율이득은 다음과 같이 정의된다.

$$\eta_{pc}(J) - \eta_p(J) \quad (37)$$

초기효율곡선  $\eta_p(J)$ 으로 정규화(normalization)하면 효율이득은 (38)식으로 표현할 수 있다.

$$[\eta_{pc}(J) - \eta_p(J)] / \eta_p(J) \quad (38)$$

식(37)과 (38)의 효율이득을 Fig. 6과 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 5와 비교하면 전진비가 1/2 부근에서 성능이 떨어지는 것을 알 수 있다. 하지만 높은 전진비에서는 Fig. 5와 Fig. 6처럼 우수한 성능을 보여준다.

## 5. 일정피치분포에 관한 다른 최적화기법의 제안

일정피치분포를 가정하고 있으므로 식(10)에서 구한  $G$ 에 대해 가장 가까운 일정함수  $h_i$ 를 찾을 수 있다. (즉, 다음 식(39)를 만족하는  $h_i$ )

$$\inf_{h_i \in \mathcal{X}} d(G, h_i) = \inf_{h_i \in \mathcal{X}} \langle G, h_i \rangle^{1/2} \quad (39)$$

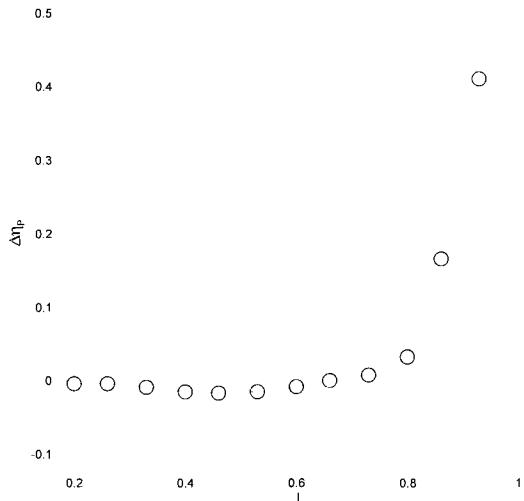


Fig. 6 Gain of the propeller efficiency for the constant pitch propeller

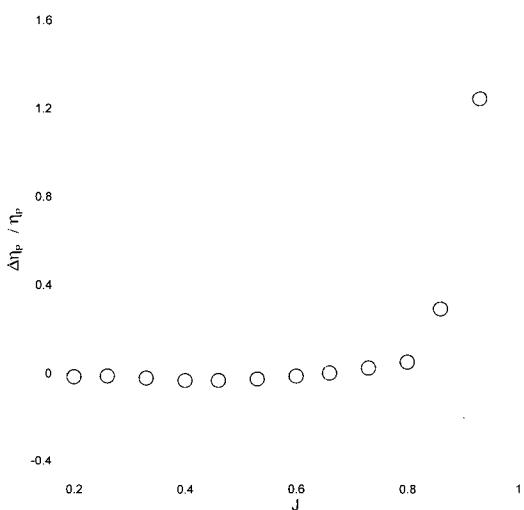


Fig. 7 Normalized gain of the propeller efficiency for the constant pitch propeller

그리면

$$h_{\max} = ah_i \quad (40)$$

으로 구해질 수 있다. 즉 식(40)으로 구한  $h_{\max}$ 를 식(11)의 점화식에 사용하면 일정피치분포를 만족하면서 최적효율을 찾는 문제를 해결할 수 있다.

## 6. 결 론

MAU 탑입의 프로펠러를 무한차원 최적화기법을 이용하여 최적의 일정피치를 구하였다. 구해진 최적분포를 통해 우수한

단독효율곡선을 얻을 수 있었다. 추진기의 유체력 수치해석의 높은 정도를 통해 수치적인 피치분포의 유일성과 수치 해의 엄밀성에 관한 앞으로의 연구가 필요하다. 그리고 새롭게 제안된 최적화기법의 수치연구를 통한 수치 수렴속도 또한 재미있는 과제이다.

### 참 고 문 헌

- Gelfand, M. and Shilov, G.E. (1964). Generalized functions, Vol 1, Academic Press, New York.
- Jang, T.S. and Kinoshita, T. (2000a). "A minimization theory in a Hilbert space and its application to two dimensional cavity flow with a numerical study", Journal of Marine Science and Technology, Vol 5, No 4, pp 176-180.
- Jang, T.S., Kinoshita, T. and Hino, T. (2001). "An optimization method based on Hilbert sapce theory for design of marine propellers and hull form", Proc. 8th International Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, Shanghai, China.
- Jang, T.S. and Kinoshita, T. (2000b). "An optimization theory and its application to CFD based design for marine propeller behind ship", Journal of Institute of Industrial Science, pp 24-27.
- Janich, K. (1980). Topology, Springer-Verlag, Berlin.
- Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1970). Introductory real analysis, Dover Publications, New York.
- Koyama, K. (1980). "On application of the lifting surface theory to marine propellers", Proceedings of 13th Symposium on Naval Hydrodynamics, Tokyo, pp 13-40.
- Roman, P. (1975). Some modern mathematics for physicists and other outsiders, Vol 1, 2, Pergamon Press Inc.
- Rudin, W. (1991). Functional analysis, McGraw-Hill, New York.
- Stakgold, I. (1967). Boundary problems for mathematical physics, The Macmillan Company, Vol 1, New York.
- Zeidler, E. (1984). Nonlinear functional analysis and its application, Springer-Verlag, Berlin.

---

2002년 4월 11일 원고 접수

2002년 6월 4일 최종 수정본 채택