

람버트 W 함수를 사용한 라플라스 신호의 최소 평균제곱오차 양자화

정회원 송현정*, 나상신**

The Lambert W Function in the Design of Minimum Mean Square-Error Quantizers for a Laplacian Source

Hyun-jung Song*, Sangsin Na** *Regular Members*

요 약

이 논문은, 람버트 W 함수가 라플라스 신호원에 대한 최적 (최소평균제곱오차) 양자기의 비반복적 설계에 응용될 수 있다는 사실을 보고한다. 구체적으로, 라플라스 신호원에 최적인 양자기의 비반복적 설계법을 고찰하며, 설계에 필수적인 비선형 방정식의 점화식의 풀이가 람버트 W 함수를 사용한 닫힌 식으로 표현된다는 것을 발견하였고, 또 이 논문에서는 이 설계법이 지수함수 형태나 라플라스 확률밀도함수 형태를 갖는 신호원에만 적용된다는 것을 증명하였다. 이 논문의 기여점은, 양자기의 설계가 비반복적이며, 원하는 만큼의 정확도로 설계되기 때문에 설계에 필요한 계산 회수가 감소되고, 양자점과 경계값을 구하는데 있어 높은 정확도를 갖는다는 점이다. 또한, 수치결과를 통하여 최적 양자 왜곡이 팬터-다이트 상수에 단조 증가적으로 수렴하는 과정을 관찰하였으며, 최적 양자기의 최외곽 경계값인 중요변수의 근사식을 유도하였다.

ABSTRACT

This paper reports that the Lambert W function applies to a non-iterative design of minimum mean square-error scalar quantizers for a Laplacian source. Specifically, it considers a non-iterative design algorithm for optimum quantizers for a Laplacian source; it finds that the solution of the recursive nonlinear equation in the non-iterative design is elegantly expressed in term of the principal branch of the Lambert W function in a closed form; and it proves that the non-iterative algorithm applies only to exponential or Laplacian sources. The contribution of the paper is in the reduction of the time needed for the design and the increased accuracy in resulting quantization points and thresholds, because the algorithm is non-iterative and the Lambert W function can be evaluated as accurately as desired. Also, numerical results show how optimal quantization distortion converges monotonically to the Panter-Dite constant and help derive an approximation formula for the key parameters of optimum quantizers.

I. 서론

람버트 W 함수는 $f(x) = xe^x$ 의 역함수로 정의된다^[1]. 따라서, 이 정의에 의하면, $xe^x = a$ 의 해는, $x = W(a)$ 이다. 그런데, 실제로 $f(x) = xe^x$ 는 함수

값이 음일 때, 즉 x 값이 음일 경우에는 다대일 함수이므로, 엄밀한 의미에서의 역함수는 존재하지 않는다. 따라서, 이 논문에서는 x 값이 $[-1, \infty)$ 로 한정된 경우의 $f(x) = xe^x$ 의 역함수를 람버트 W 함수로 정의하기로 한다. 이 경우의 람버트 W 함수를,

* 아주대학교 전자공학과 부호화 연구실(bananapi@hanmail.net),

** 아주대학교 전자공학과

논문번호: k01147-0616, 접수일자: 2001년 6월 16일

※ 본 연구는 한국연구재단 논문연구과제(95-0100-23-04-3) 지원 및 한국대학교 논문연구소 관리로 수행되었습니다.

흔히 램버트 W 함수의 주가지(principal branch)라 한다^[1]. 그림1에 이 램버트 W 함수를 도시하였다. 이 함수의 정의역은 $[-e^{-1}, \infty)$ 이며, 연속인 함수이다. 또, 이 램버트 W 함수는 0에서 해석적이고, 따라서 급수로 표현 가능하다. 구체적인 급수 표현식은 다음과 같다.

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n, \quad |x| < \frac{1}{e}.$$

램버트 W 함수는 Matlab이나 Maple같은 소프트웨어로 구현되어 있어서, 쉽게 계산될 수 있다.

램버트 W 함수는 참고문헌 [1]에 제시된 것처럼 다양한 분야에 응용되고 있다. 이 가운데 다음과 같은 초월함수를 포함하는 비선형 방정식의 풀이에 사용될 수 있다.

$$a^x = x + b. \tag{1}$$

방정식의 풀이는 다음과 같이 램버트 W 함수로 나타내어진다.

$$x = -b - \frac{1}{\ln a} W\left(-\frac{\ln a}{a^b}\right). \tag{2}$$

식 (2)가 방정식 (1)의 해가 되는 것은, 식 (1)에 대입하여 알 수 있다.

이 논문에서는 램버트 W 함수가 식 (2)의 형태로 라플라스 신호원(Laplacian source)에 최소 평균 제곱오차를 갖는 양자기 설계에 쓰인다는 사실을 발견하여 보고하는 한편, 더 나아가 이를 사용하여 평균제곱오차의 의미에서 이 신호원에 최적인 양자기를 설계하는 법을 다룬다.

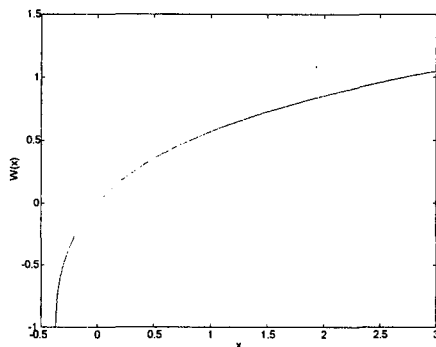


그림 1. 램버트 W 함수의 주가지

N-점 홀양자기(scalar quantizer) Q_N 은 N 개의 양자점 y_1, y_2, \dots, y_N 과 N+1 개의 경계값 x_1, x_2, \dots

x_{N+1} , 그리고 다대일 함수인 양자함수 $Q_N(\cdot)$ 로 표현할 수 있다. 일반적으로, 경계값은 $x_1 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$ 이며, $x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N$ 이 되도록 배열한다. 양자점 y_i 는 구간 $(x_i, x_{i+1}]$ 에 위치하는 대표값이다. 또, 이들과 양자함수의 상호관계는 $x_i < x_{i+1}$ 이면, $Q_N(x) = y_i$ 로 나타낼 수 있다. 제 i 번째 양자 구간의 크기는 그 양자구간의 크기(step size)이고, 이를 Δ_i 로 표시하면, $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ 이다.

신호원의 확률밀도함수가 $p(x)$ 일 때, 이 신호원의 N-점 최적 홀양자기 Q_N^* 은 아래 식으로 주어지는 평균제곱오차를 최소화시키는 양자기 Q_N 이다.

$$D(Q_N) = E_N\{(X - Q_N(x))^2\} = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx.$$

어떤 홀양자기가 최적 양자기가 되기 위해서는 중점 조건과 무게중심 조건을 만족해야 한다. 중점 조건은, 각 경계값이 인접한 두 양자점의 중점이 되어야 한다는 것이고, 무게중심 조건은, 각 양자점이 경계값으로 주어지는 해당 양자구간의 $p(x)$ 에 대한 무게중심이 되어야 한다는 것이다.

신호원의 확률밀도함수에 대한 N-점 최적 홀양자기는 이 두 최적조건에 의해 설계되며, 이러한 조건을 만족시키기 위해서 일반적으로 점화적이며, 반복적인 설계방식을 사용해야 한다. 예를 들어, 이미 잘 알려진 로이드-맥스 (Lloyd-Max) 설계법[3,4]은 최외곽 양자점 y_1 이나 y_N 을 임의의 초기값으로 선택하여 이 두 필요 조건을 만족하도록 반복적이며 점화적으로 인접하는 경계값과 양자점을 결정함으로써 양자기를 설계한다. 다시 말해, 로이드-맥스와 같은 반복적 설계법에서는 초기값의 설정이 매우 중요한데, 잘 선택되어진 임의의 최외곽 양자점을 시작으로 양자기가 설계되면 일단 그 양자기가 최적인지 아닌지를 확인하게 된다. 만약 최적 양자기가 아니라면, 초기값을 적절히 보정한 후 다시 설계를 시작하여야 한다. 이렇게 하여 원하는 만큼의 정확도를 갖는 양자기를 얻을 때까지 이 과정을 반복하게 된다. 이것은 최적 조건에 의한 설계를 한다 하더라도 단 한 번의 설계로 최적 양자기가 되는 것이 아님을 의미한다. 실제 설계의 경우에 $N=256$ 정도일 때, 최소 5~6 회의 반복과정이 요구된다.

또한, 초기값 설정 이후, 양자점과 경계값을 구하는 과정에서 각 경계값을 구할 때마다 비선형 방정

식을 풀어야 한다. 이것은 양자기가 대칭임을 고려할 때, 총 $N/2$ 개의 비선형 방정식을 풀어야 한다는 결론이 나온다. 즉, 로이드-맥스 설계법은 매우 복잡하고 계산량이 많이 요구되는 방법이며, 또 N 이 커지는 경우에도 수치 오차의 누적으로 인하여 정확한 설계를 위해서는 보다 높은 정확도를 필요로 한다.

신호원의 분포가 라플라스 확률밀도함수인 경우에는 일반적인 경우와 달리, 비반복적 설계가 가능하다^{5,6,7}. 따라서, 라플라스 신호원에 대한 최적 양자기는 설계상의 비반복적 성질 때문에 보다 빠르게 설계될 수 있다. 이것은, 이 설계법은 초기값의 설정이 불필요하여, 이를 부적절하게 설정했을 때 수행해야 하는 반복과정이 필요없기 때문이다. 이러한 비반복적 설계방법을 이 논문에서 재고찰하였다. 이 논문의 주된 독창적인 결과는 다음과 같다. 첫째, 최적 양자기의 양자점과 해당 양자구간의 크기는 램버트 W 함수를 사용한 닫힌 식으로 표현된다는 것을 보였다. 따라서, 이 설계법에서는 로이드-맥스 방법에서처럼 비선형 방정식을 풀어야 하는 것이 아니고, 단지 램버트 W 함수를 계산함으로써 설계하게 된다. 둘째, 램버트 W 함수를 사용하게 되면, 이 함수값을 계산할 때 원하는 정확도로 계산함으로써, 설계된 양자점과 경계값의 정확도를 원하는 만큼 증가시킬 수 있다. 셋째, 이러한 비반복적 방법은 라플라스 확률밀도함수의 특성을 직접적으로 사용하였기 때문에 다른 확률밀도함수에 대해서는 적용되지 않는다는 사실을 엄정하게 증명하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제II절에서는 라플라스 신호원에 대한 최적 양자기를 설계할 때, 램버트 W 함수가 어떻게 적용되며, 실제로 어떻게 사용되는지를 보이고, 제III절은 비반복적 설계법이 적용되는 신호는 지수확률분포와 라플라스 확률분포만이라는 점을 증명하였다. 그리고, 제IV절은 설계된 양자기의 수치결과를 다루었으며, 제V절은 요약과 결론을 제시한다.

II. 라플라스 신호원에 대한 최적 양자기의 설계

그림2(a)에 임의의 양자구간 $(v, v+\Delta)$ 을 도시하였다. 편의상, $v \geq 0$ 인 영역만을 가정하면, x 로 표시된 양자점 y 는 확률밀도함수 $p(x)$ 에 대하여 그 해당 양자구간의 무게중심이 되는 점이다. 또, 양자구간의 크기 Δ 는 하위 구간의 크기 Δ_l 과 상위 구간의 크기 Δ_u 로 구분하여 나타내었다. 무게중심 조건에

의하면, y 와 v 의 관계는 다음과 같다.

$$y = \frac{\int_v^{v+\Delta} xp(x)dx}{\int_v^{v+\Delta} p(x)dx}$$

여기에서, 분산이 1인 라플라스 확률밀도함수 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}$ 가 주어지면, 위 식으로부터 직접적인 계산에 의해 좀 더 구체적인 식을 얻을 수 있다. 즉,

$$y = v + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta e^{-\sqrt{2}\Delta}}{1 - e^{-\sqrt{2}\Delta}} \tag{3}$$

그림2(a)에서 $\Delta_u = \Delta - \Delta_l$ 이고, $\Delta_l = y - v$ 이므로, 상위 구간의 크기 $\Delta_u = \Delta - (y - v)$ 이며, 여기에 식 (3)을 대입하여 풀면, 다음 식을 얻는다.

$$\Delta_u = \frac{\Delta}{1 - e^{-\sqrt{2}\Delta}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

또는, Δ 에 대하여 정리하여,

$$\Delta = (\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - e^{-\sqrt{2}\Delta}) \tag{4}$$

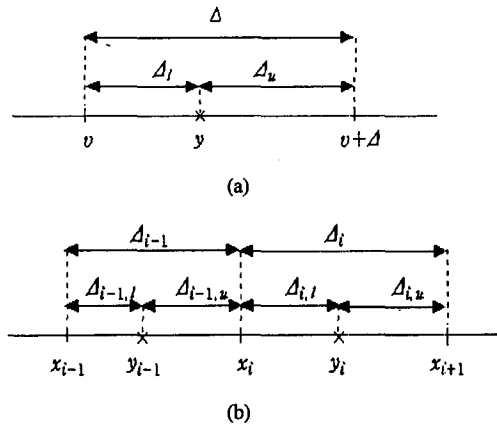


그림 2. 양자구간 (a) 최적 양자구간의 크기 (b) 두 인접한 양자구간의 크기

이제 방정식 (4)를 Δ 에 대하여 풀이하여 궁극적으로 Δ_l 을 Δ_u 로 표현하고자 한다. 즉, Δ_u 가 알려지는 경우에 Δ_l 이 계산되는 식을 구하는 것이다. 다시 말하면, 상위 구간의 크기 Δ_u 를 사용하여 하위 구간의 크기 Δ_l 을 나타냄으로써 Δ_u 와 Δ_l 의 관계식을 유도해 내하고자 하는 것이다. 이를 위해, 식 (4)를 다음과 같이 정리하여 보자.

$$(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})e^{-\sqrt{2}\Delta} = -\Delta + (\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}}). \quad (5)$$

식 (5)에서 왼변의 $(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})$ 는 $e^{\ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})}$ 이므로, 지수함수의 지수로 올리고, 오른변에서는 $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})$ 를 더하고 빼줌으로써 다음과 같은 식을 얻는다

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{2}\Delta - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ = -[\Delta - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned} \quad (6)$$

이제 식 (6)의 각 항을 다음과 같이 치환한다.

$$\begin{aligned} a &= e^{\sqrt{2}}, \\ t &= -(\Delta - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})), \\ b &= (\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}})). \end{aligned}$$

그러면, 식 (6)은 $a^t = t + b$ 의 형태가 되고, 이는 곧 식 (1)과 같은 형태이다. 따라서, 식 (6)의 해는 식 (2)에 의해서, $t = -b - \frac{1}{\ln a} W(-\frac{\ln a}{a^b})$ 가 되고, 이를 계산하여 정리하면, 최종적으로 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta_u + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} W[-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)e^{-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)}] \\ \text{또는, } \Delta = \Delta_u + \Delta_l \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\Delta_l = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} W[-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)e^{-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)}]. \quad (8)$$

이 식은 또한, [5]의 식 (27)과 [7]의 식 (2)에서도 유도될 수 있다. 참고문헌 [7]의 식 (2)에서는 다음과 같은 관계식이 제시되어 있다.

$$(1 - \sqrt{2}\Delta_l)e^{\sqrt{2}\Delta_l} = (1 + \sqrt{2}\Delta_u)e^{-\sqrt{2}\Delta_u}. \quad (9)$$

식 (9)의 양변에 $-e^{-1}$ 을 곱하면,

$$(\sqrt{2}\Delta_l - 1)e^{(\sqrt{2}\Delta_l - 1)} = -(1 + \sqrt{2}\Delta_u)e^{-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)}. \quad (10)$$

여기서도 마찬가지로, 각각 $c = (\sqrt{2}\Delta_l - 1)$, $d = -(1 + \sqrt{2}\Delta_u)e^{-\sqrt{2}\Delta_u + 1}$ 로 치환하면, $ce^c = d$ 의 형

태를 얻고, 램버트 W 함수의 정의에 의해, $xe^x = a$ 에 대한 해는, $x = W(a)$ 이므로, 식 (10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sqrt{2}\Delta_l - 1 = W[-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)e^{-(\sqrt{2}\Delta_u + 1)}]. \quad (11)$$

이제 식 (11)에서 양변에 1을 더하고, $\sqrt{2}$ 로 나누면 식 (8)을 얻는다.

이 논문의 주 결과물인, 식 (8)은 하위 구간의 크기 이 상위 구간의 크기 Δ_u 와 어떠한 관계를 가지고 있는지를 보여준다. 바로 이 식과 중점 조건에 의하여 최적 라플라스 양자기의 양자구간의 크기를 발생해 낸다. 그림2(b)에 최적 라플라스 양자기의 서로 인접한 두 양자영역을 도시하였다.

중점 최적조건에 의해, 각 $i=2, \dots, N$ 에 대해서 $\Delta_{i-1, u} = \Delta_{i, l}$ 이다. 따라서, 일단 $\Delta_{N, u}$ 가 주어지면, 식 (8)에 의해 $\Delta_{N, l}$ 값을 구할 수 있고, 중점 조건에 의해 $\Delta_{N-1, u} = \Delta_{N, l}$ 이며, 식 (8)에 의해 다시 $\Delta_{N-1, l}$ 을 얻는다. 이러한 점화적인 방법으로 모든 양자구간의 크기를 구함으로써, 최적 양자기를 설계한다. 이에 대한 좀 더 구체적인 절차를 아래에 제시하였다.

최적 양자구간 크기의 발생 라플라스 확률밀도함수에 대하여 최적 양자기가 대칭이라는 것은 참고 문헌 [8]에 제시되었다. 따라서, N -점 최적 라플라스 양자기는 음이 아닌 양자점과 경계점만으로 표현할 수 있다. 이제 식 (8)과 중점-경계조건을 이용하여 0에서부터 오른쪽 영역에 대한 최적 양자기가 설계되는 과정을 보이고자 한다.

분산이 1인 라플라스 신호원에 대한 N 이 짝수인 최적 양자기 Q_N^* 를 설계하기로 한다.

(a) $\Delta_{N, u} = \infty$. 그리고, $W(0) = 0$ 이므로, 식 (8)에

$$\text{의하여, } \Delta_{N, l} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(b) 중점 조건에 의해 $\Delta_{N-1, u} = \Delta_{N, l}$ 이므로,

$$\Delta_{N-1, u} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

이제 식 (8)에 Δ_u 대신 $\Delta_{N-1, u}$ 를 대입하면,

$$\begin{aligned} \Delta_{N-1, l} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} W(-2e^{-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (-0.40637573995996) \\ &= 0.41975573975116. \end{aligned}$$

따라서, $(N-1)$ 번째 최적 양자구간의 크기는

$$\Delta_{N-1} = \Delta_{N-1,u} + \Delta_{N-1,b} \quad \text{즉,}$$

$$0.41975573975116 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.12686252093771.$$

(c) 위 과정(b)를 필요한 횟수만큼 반복하여 $\frac{N}{2}$ 개의 양자구간의 크기를 구한다. ■

표1에 몇 개의 최적 양자구간의 크기를 제시하였다. 이 값들은 [5,7]의 결과와 같을 뿐 아니라, 훨씬 높은 정확도를 갖는다. 여기서 특기할 것은, N 값에 상관없이 최적 양자구간의 크기 $\Delta_{N,u} = \infty$, $\Delta_{N,l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 따라서 $\Delta_{N-1,u} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이며 즉, $\Delta_{N-1,l} = 0.41975573975116$ 이라는 결론을 보인다는 것이다. 이것은, N 값에 상관없이 최적 양자구간의 크기 $\Delta_N, \Delta_{N-1}, \dots$ 은 변하지 않고 일정한 값을 갖게 된다는 것을 의미한다. 이 점을 고려하면, 표1에서의 양자구간의 크기 값들은 32-점 최적 양자기의 양의 영역, 즉 $\Delta_{32}, \Delta_{31}, \dots, \Delta_{17}$ 인 16 개의 양자구간의 크기 값들을 나타낸 것인데, 이 값들은 64-점 최적 양자기에서 양의 영역 중 가장 오른쪽의 16 개의 양자구간의 크기 값들과 같다. 또, 10-점 양자기의 가장 오른쪽 5 개의 양자구간의 크기 값들은 표 1에서 위에서부터 5 개의 값과 같다.

표 1. 최적 양자구간의 크기

Δ_N	∞
Δ_{N-1}	1.12686252093771
Δ_{N-2}	0.71953616958801
Δ_{N-3}	0.53318134653160
Δ_{N-4}	0.42456777908559
Δ_{N-5}	0.35307242353883
Δ_{N-6}	0.30233217484595
Δ_{N-7}	0.26441260911626
Δ_{N-8}	0.23498129646259
Δ_{N-9}	0.21146616090649
Δ_{N-10}	0.19224162077278
Δ_{N-11}	0.17622896631271
Δ_{N-12}	0.16268380620794
Δ_{N-13}	0.15107565602583
Δ_{N-14}	0.14101614453744
Δ_{N-15}	0.13221435227304

최적 라플라스 양자기의 생성 편의상, 짝수인 N 에 대해 고찰해 보자. 먼저 몇 개의 양자구간의 크

기를 구할 것인지를 결정하고, 0에서부터 첫 번째 양자구간의 크기를 $\Delta_{\frac{N}{2}+1}$ 로 시작하여, $\Delta_{\frac{N}{2}+2}, \Delta_{\frac{N}{2}+3}, \dots$ 과 같이 오른쪽으로 연속적으로 나열함으로써 양자기의 양의 영역을 만들어 낸다. 음의 영역은 대칭성으로부터 구한다.

부록 I의 프로그램은 Matlab을 사용하여 N -점 양자기를 구현한 것이다. Matlab에는 프로그램에서 보인 바와 같이 lambertw(·)로 램버트 W 함수를 제공하고 있다.

양자점이 홀수개인 경우 양자점의 개수 N 이 홀수인 경우에는, 약간의 수정이 필요하다. 우선, 식 (8)로부터 가장 오른쪽의 양자영역 $\Delta_{\frac{(N+1)}{2},u}$ 으로부터 시작하는 $\frac{N-1}{2}$ 개의 양자구간의 크기를 반복적으로 발생시킨다. 그리고, $\Delta_{\frac{(N+1)}{2},u}$ 과 발생시킨 양자구간의 크기 값들을 우측으로 연속적으로 배열하는데, 0에서 양자점 $y_{\frac{N+1}{2}}$ 이 되도록 $\Delta_{\frac{(N+1)}{2},u}$ 로 시작한다. 이러한 배열은 양자기의 0을 포함한 오른쪽의 영역이며, 마찬가지로 왼쪽 영역은 대칭성으로부터 구한다.

III. Nitadori의 비반복적 설계법의 적용 범위

이 절에서는, Nitadori의 설계법이 구체적으로 지수 확률밀도함수(exponential density function)와 라플라스 확률밀도함수에만 적용된다는 것을 증명한다.

분산이 1인 라플라스 확률밀도 함수는 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}$ 과 같이 주어진다. 그런데, 앞서 보인 설계를 통하여, $\Delta_{N,l} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 이것은 최적 양자구간의 크기 $\Delta_N, \Delta_{N-1}, \dots$ 가 N 값에 상관없이 일정한 값을 갖게 된다는 것을 의미하였다. 다시 말하여, 라플라스 신호원에 있어서는 가장 오른쪽의 첫 번째 하위구간의 크기는 N 에 상관없이 항상 상수가 된다는 것이다. 이 성질은 바로 지수 확률밀도 함수나 라플라스 확률밀도함수만이 갖는 특성이다. 아래에 이에 대한 증명이 제시되었다.

정리1 지수 확률밀도함수 $f(x) = ke^{-kx}u(x)$ 임의의 양수 v 에 대하여, 다음 식이 성립한다.

$$E[X | X > v] - v = \frac{1}{k}, \quad v > 0.$$

증명.

여기에서, $E[X | X > v] = \frac{\int_v^\infty xp(x)dx}{\int_v^\infty p(x)dx}$ 이므로, 주어진

지수함수 $p(x)$ 를 직접 대입하여 적분식을 풀면,

$$E[X | X > v] = \frac{\int_v^\infty xp(x)dx}{\int_v^\infty p(x)dx} = \frac{\int_v^\infty kxe^{-kx}dx}{\int_v^\infty ke^{-kx}dx} = v + \frac{1}{k}.$$

따라서,

$$E[X | X > v] - v = v + \frac{1}{k} - v = \frac{1}{k}. \quad \blacksquare$$

정리 1은, 확률밀도함수가 지수 감소하면, 그것에 최적인 양자기의 가장 오른쪽 하위구간의 크기가 상수임을 뜻한다. 그리고, 라플라스의 경우에도 이 사실이 적용되는데, 라플라스 신호원의 양의 반쪽은 바로 지수 감소하기 때문이다.

정리2 확률밀도함수 $p(x)$ 에 최적인 양자기의 가장 오른쪽 양자구간을 (v, ∞) 라 하자. 여기서 $v > 0$. 이것의 하위구간의 크기가 v 에 대해 상수이면, $p(x)$ 는 반드시 지수 감소함수 이어야 한다.

증명. 확률밀도함수 $p(x)$ 에 최적인 양자기의 가장 오른쪽 양자구간 (v, ∞) 에서의 최적 양자점을 y^* 이라고 하면,

$$y^* = E[X | X > v] = \frac{\int_v^\infty xp(x)dx}{\int_v^\infty p(x)dx}, \quad v > 0.$$

따라서, 이것의 하위구간의 크기는 $y^* - v$ 이며, 정리의 가정에 의해, 이것이 v 의 값에 상관없는 상수 c 라면, 다음을 얻는다.

$$y^* - v = \frac{\int_v^\infty xp(x)dx}{\int_v^\infty p(x)dx} - v = c.$$

이로부터 이 식의 각 항에 $\int_v^\infty p(x)$ 를 곱하여 통분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_v^\infty xp(x)dx - v \int_v^\infty p(x)dx = c \int_v^\infty p(x)dx.$$

이제 각 항을 v 에 대하여 미분하면,

$$\int_v^\infty p(x)dx = cp(x).$$

그리고, 이 식을 v 에 관하여 한 번 더 미분하면 다음과 같은 형태의 식을 얻을 수 있다.

$$p(v) = -c \frac{dp(v)}{dv}, \quad v > 0.$$

즉, $y^* - v = c$ 의 관계를 만족하는 확률밀도함수 $p(v)$ 가 있다면, 이 확률밀도함수는 반드시 위 미분 방정식을 만족하여야 한다. 이 미분 방정식을 풀면 다음 해를 얻는다.

$$p(v) = \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{c}v}, \quad v > 0.$$

즉, $v > 0$ 인 영역에서, 지수 형태로 감소하는 확률 밀도함수를 얻는다. 따라서, 가장 오른쪽 하위 양자구간의 크기가 상수인 확률밀도함수는 반드시 지수 확률밀도함수여야 한다. \blacksquare

정리 2의 지수 확률밀도함수를 양방향으로 확장하면, 라플라스 확률밀도함수가 된다.

이제 정리 1과 2를 종합하면, 최적 양자기의 가장 오른쪽 하위 구간의 크기가 N 값에 상관없는 상수라는 필요·충분 조건은 지수 감소 확률밀도함수이거나, 이것이 양방향으로 확장된 라플라스 확률 밀도함수라는 사실을 얻는다. 따라서, Nitadori의 비 반복적 설계법은 지수 확률밀도함수와 라플라스 확률 밀도함수에만 적용된다는 결론을 얻는다.

IV. 수치결과

지금까지 램버트 W 함수를 사용하여 라플라스 신호원에 최적인 양자기의 설계과정을 보였다. 이 설계법으로 실제 N 이 2^{16} 일 때의 양자기를 설계하였고, 설계하는데 어려움이 없이 단순한 계산만을 반복함으로써 정확하면서도 빠른 양자기 설계가 가능하였다. 이는 양자점과 경계값을 구하는데에 있어서, 비선형 방정식을 직접 풀지 않고, 램버트 W 함수를 사용하여 얻은 Δ_u 와 Δ_l 과의 관계식만으로 구간의 크기 값을 단순히 연산만 함으로써 오차는 줄이고, 속도는 빠르게 설계된 것이다. 이 설계법은 시간적인 제약만 없다면, N 이 아주 큰 값으로 주어진다 하더라도 정확한 최적 양자기의 설계가 가능하다. 즉, 램버트 W 함수를 사용하는 경우에 설계상의 아무런 문제점이 없다.

이제 이렇게 설계된 양자기에 대해서 몇 가지 특성을 수치적으로 고찰해 보고자 한다.

양자기의 왜곡 평가 신호원의 분포가 라플라스 확률밀도함수인 경우의 왜곡 $D(Q_N^*)$ 은, 0으로부터 오른쪽으로 첫번째 하위구간 크기의 제곱, 즉 이 논문에서의 표기한대로 표현하면, $\Delta_{\frac{N}{2}+1,i}^2$ 로 알려져 있다⁵⁾. 또, 일반적인 신호원에서 최적 양자기는 왜곡 $D(Q_N^*)$ 과 N^2 의 곱, 즉 $N^2D(Q_N^*)$ 의 값이 팬터다이트 (Panter-Dite) 상수 C_{PD} 로 수렴한다는 사실이 알려져 있다¹⁰⁾. 분산이 1인 라플라스 신호의 경우 팬터다이트 상수 C_{PD} 는 다음과 같다.

$$C_{PD} = \frac{1}{12} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right]^3 = \frac{9}{2}.$$

설계된 양자기의 왜곡을 평가하기 위해서, $\Delta_{\frac{N}{2}+1,i}$ 와 그 제곱값 $\Delta_{\frac{N}{2}+1,i}^2$ 을 표2에 제시하였다.

표2에서 보면, N 값이 증가할수록 $N^2D(Q_N^*)$ 의 값이 팬터다이트 상수 $C_{PD}=4.5$ 에 단조증가적으로 수렴함을 알 수 있다. 그림3에 이 수렴현상을 도시하였다. 특히, $N \geq 256$ 이상일 때의 $N^2D(Q_N^*)$ 은 C_{PD} 로부터 1% 이내에 있음을 알 수 있다. 따라서, $N \geq 256$ 일 때, 왜곡 $D(Q_N^*)$ 을 $\frac{C_{PD}}{N^2}$ 으로 근사하는 것은 대단히 정확하다고 생각한다.

중요변수의 고찰 여러 N 값에 대한 최적 양자기를 설계하였으므로, 이제 설계된 양자기의 중요변수 (key-parameter)의 수치적 고찰이 가능하다. 중요변수라 함은 최적 양자기 Q_N^* 의 가장 오른쪽 끝경계값 x_N^* 을 의미한다⁹⁾. 일반적인 양자기에서의 끝경계값은 각 양자구간 $\Delta_{\frac{N}{2}+1}, \Delta_{\frac{N}{2}+2}, \dots, \Delta_{\frac{N}{2}+N-1}$ 까지의 간단한 합으로 결정된다. 즉, 양자기의 끝경계값은 다음과 같다.

$$k(N) = \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \Delta_i$$

이 끝경계값을 $k(N) = aN + b$ 의 형태로 근사화해보기로 하자. 즉 a 의 값과 b 의 값을 최소제곱오차 추정법(least square estimation)에 의하여 유도해 낼 수 있다. 아래에 간단히 근사식 유도과정을 제시하였다. 값 a 와 b 를 구하는데 필요한 자료의 수는 16 개로 하였다.

표 2. 최적 양자기의 최소 하의 양자구간과 왜곡

N	$\Delta_{\frac{N}{2}+1,i}$	$\Delta_{\frac{N}{2}+1,i}^2$	$N^2D(Q_N^*)$
2	0.70710678118655	0.50000000000000	2.0000000000
4	0.41975573975116	0.17619488105404	2.8191180969
8	0.23340091669475	0.05447598791395	3.4864632265
16	0.12398599541831	0.01537252705986	3.9353669273
32	0.06404826295562	0.00410217998763	4.2006323073
64	0.03257226255937	0.00106095228823	4.3456605726
128	0.01642783533061	0.00026987377365	4.4216119075
256	0.00824995392001	0.00006806173968	4.4604941718
512	0.00413406403516	0.00001709048544	4.4801682170
1024	0.00206931364905	0.00000428205897	4.4900642751
2048	0.00103522847187	0.00000107169798	4.4950271619
4096	0.00051775730013	0.00000026807262	4.4975122803
8192	0.00025891442847	0.00000006703668	4.4987555264
16384	0.00012946611819	0.00000001676147	4.4993743887
32768	0.00006473515720	0.00000000419064	4.4996660576
65536	0.00003236766069	0.00000000104766	4.4998888816

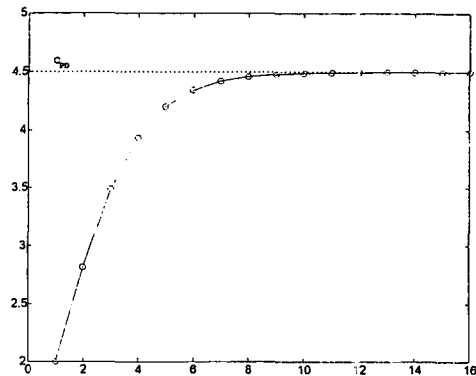


그림 3. 왜곡 $N^2D(Q_N^*)$ 의 팬터다이트 C_{PD} 로의 수렴

최소 제곱오차식에 의해, a 와 b 에 관한 함수 $f(a, b)$ 는 다음과 같다.

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{16} [k(N) - k(N)]^2 = \sum_{i=1}^{16} [(alnN + b) - k(N)]^2, N = 2^i.$$

즉, 이 함수는 근사식에 의한 끝경계값과 실제로 설계한 양자기에서의 끝경계값 사이의 총 제곱오차를 의미한다. 최소제곱오차 방법은 이 함수 $f(a, b)$ 를 최소화시키는 a 와 b 를 설정하는 방법이다. 이를 위해서, $f(a, b)$ 를 a 와 b 로 각각 편미분하여 0으로 놓아 연립방정식을 얻고, 이 연립방정식을 풀면 된다.

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0.$$

즉, 위의 식을 만족시키는 a, b 의 값을 찾으려면, 계산에 의하여 $a=2.0710925, b=-1.8860923$ 을 얻었고, 엑셀에서 제공하는 intercept, linest 함수를 사용하여 이 값이 맞는 값을 확인할 수 있다.

근사식으로 구한 끝경계값 $k(N)$ 과 설계된 양자기로부터 구한 끝경계값 $\hat{k}(N)$ 의 값을 표3에 비교·제시하였다. 표3에서 $N \leq 8$ 때까지는 근사식이 실제 값과 다소 많은 차이를 보이고 있으나, $N \geq 16$ 부터는 N 값이 증가함에 따라 점점 근사식과 실제값의 차이가 점점 작아지고 있음을 확인할 수 있다. 그리고, N 이 아주 커지는 경우 즉 $N \geq 8,192$ 인 경우는, 아주 작은 값이지만 다소 거리가 멀어짐을 알 수 있다. 따라서, 이 근사식은 $N=2^{12}$ 개일 때, 가장 정확하게 근사하고, 이 부근에 가까울수록, 근사식의 신뢰도가 높다고 할 수 있다. 따라서, 이 근사식을 사용할 경우, N 의 개수가 $N=2^{12}$ 에서 먼 값에 대해서는 이 표에 보인 차이만큼의 값을 더하거나 빼주면 실제 양자기를 설계하지 않고 정확한 중요 변수 값을 예측 할 수 있다.

표 3. 중요변수와 근사식

N	중요 변수 $k(N)$	근사식 $\hat{k}(N)$
2	0.00000000000000	-0.45052037294615
4	1.12686252093771	0.98505155410770
8	2.37958003705732	2.42062348116154
16	3.72396502364395	3.85619540821539
32	5.12587302714278	5.29176733526924
64	6.56044972900325	6.72733926232309
128	8.01250910028891	8.16291118937694
256	9.47362265931539	9.59848311643079
512	10.93934507739470	11.03405504348460
1024	12.40739283323670	12.46962697053840
2048	13.87660854498770	13.90519889759230
4096	15.34640955868830	15.34077082464610
8192	16.81650354265320	16.77634275170000
16384	18.28674390078330	18.21191467875380
32768	19.75705619625240	19.64748660580770
65536	21.22739478089340	21.08305853286150

V. 결론

이 논문에서는 라플라스 신호원에 대한 최소 평균 제곱오차 양자기의 설계를 다루었다. 비반복적

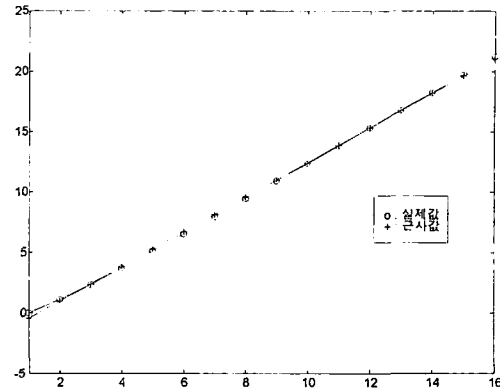


그림 4. 중요변수와 근사식

설계법은 Nitadori에 의하여 처음 발표되었다. 이 논문의 기여점은, 이 설계법에서 비선형 방정식을 풀어야하는 대신, 램버트 W 함수를 계산하여서 양자기의 설계가 가능한 것을 보인 점이다. 램버트 W 함수는 원하는 만큼의 정확도를 얻도록 계산할 수 있기 때문에, 이 식을 사용하여 설계하면 양자기의 정확도를 높일 수 있다. 또 이 논문은, Nitadori의 비반복적 설계법이 지수감소 확률밀도함수의 특성을 사용하였으므로 지수밀도함수와 라플라스 확률밀도 함수를 제외한 다른 확률밀도함수에 대해서는 적용 되지 않는다는 점도 증명하였다.

이 연구의 결과는 최적 라플라스 양자기의 여러 성질을 조명하는데 기여할 것으로 사료된다. 첫째, 양자기의 설계 측면에서는, N 이 아주 큰 경우, 예를 들면, $N=65,536$ 인 경우에도 수치적 오류를 줄인 양자기를 설계할 수 있었다. 둘째, 설계된 최적 양자기의 중요변수를 고찰하여 양자기의 중요 변수 근사식을 얻을 수 있었다. 이 근사식은 예를 들면, 양자기 불일치의 연구에도 도움이 될 수 있을 것이다.

부록 I

Matlab을 이용한 양자기(양자점·경계값) 생성 프로그램
 % 라플라스 신호원에 대한 N -점 양자기 생성.
 % 0을 중심으로 오른쪽 영역에 대한 경계값·양자점 출력.

```
clear;
N=16;
for m=1:N
    ntp=2^m;
    npoints=ntp/2; %오른쪽 영역의 양자점의 개수
    dl(npoints)=1/sqrt(2); %가장 오른쪽 양자구간의 크기
```



```

for i=npoints:-1:2 % 하위 구간의 크기
    tmp=-sqrt(2)*dl(i)+1;

dl(i-1)=sqrt(2)/2+lambertw(tmp*exp(tmp))/sqrt(2);
end
du(npoints)=Inf; % 상위 구간의 크기 발생

for i=1:(npoints-1)
    du(i)=dl(i+1); % 중첩 조건의 적용
end
d=dl+du;
x(1)=0; % 양자화와 경계값의 발생
y(1)=dl(1);

for i=2:npoints
    x(i)=sum(d(1:i-1));
    y(i)=dl(1)+2*sum(dl(2:i));
end
result=[];
result= [x ; y]

end
    
```

참 고 문 헌

[1] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffery, and D.E. Knuth, "On the Lambert W function," *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, no. 4, pp. 329-359, 1996.

[2] E.M. Lemaray, "Racines de quelques equations transcendante. Integration d'une equation aux differences meles. Racines imaginaries," *Nouvelles Annales de Mathematiques*, pp.540-546, 1897.

[3] S.P. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, pp. 129-136, Mar. 1982.

[4] J. Max, "Quantizing for minimum distortion," *IRE Trans. on Inform. Theory*, IT-6, pp. 7-12, Mar. 1960.

[5] K. Nitadori, "Statistical analysis of ΔPCM," *Electron. Commun. in Japan*, vol. 48, pp. 17-26, Feb. 1965.

[6] H. Lanfer, "Maximum signal-to-noise-ratio quantization for Laplacian-distributed signals," *Information and System Theory in Digital Communications*, NTG-Report vol. 65, VDE-

Verlag GmbH Berlin, Germany, p 52, 1978.

[7] P. Noll and Zelinski, "Comment: on 'quantizing characteristics for signals having Laplacian amplitude probability density function'," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-27, no. 8, pp. 1259-1260, Aug. 1979.

[8] P.E. Fleischer, "Sufficient conditions for achieving minimum distortion in a quantizer," *Int. Conv. Rec.*, Part 1, pp. 104-111, 1964.

[9] 구기일, 일반화된 감마 신호원의 분산 불일치된 양자화 왜곡, 아주대학교, 석사학위논문, 2001년 2월.

[10] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization Distribution in Pulse count Modulation with Nonuniform Spacing of Levels," *Proc. IRE*, pp. 44-48, January 1951.

송 현 정(Hyun-jung Song)

정회원



2000년 2월 : 홍익대학교
전기전자컴퓨터공학부
(컴퓨터 정보통신 전공)
졸업
2002년 2월 : 아주대학교
전자공학과 석사

<주관심 분야> 디지털 통신, 정보이론, 이동통신, 위성통신

나 상 신(Sangsin Na)

정회원



1982년 2월 : 서울대 전자공학과
졸업
1985년 : University of Michigan,
Ann Arbor,
전기 및 컴퓨터공학과 석사
1989년 : University of Michigan,
Ann Arbor,
전기 및 컴퓨터공학과 박사

1989~1991년 : Assistant Professor at the University of Nebraska, Lincoln.

1991.8~현재 : 아주대학교

<주관심 분야> 정보이론, 자료압축, 디지털 신호처리, 디지털통신