한국산업정보학회논문지 제7권 제1호 (2002. 3)

최적해를 이루는 기저벡터가 변화를 초래하지 않는 목적함수계수의 변화 †

(Coefficient change of objective function not change to the basic vector make a optimum solution)

송 필준*, 김 정숙**
(Phil-Jun Song Jung-Suk Kim)

요 약 정수계획법모형에서 목적함수와 선형 제약조건식에 만족하는 최적해를 유도할 때, 선형 제약조건식으로 이루어지는 모든 가능해의 Convex set K에서 정수인 extreme point 또는 수정된 정수인 extreme point를 유도하여 목적함수 Z의 최적해로 결정한다. 본 논문에서는 기저변수 벡터 X_B의 성분이 정수가 아닐 때 Branch & Bound 방법을 확장하여 X_B가 정수가 되도록 한다. 그리고 목적함수의 계수 C_j의 변동에 의하여 단계적으로 변하는 최적화를 유도함을 목적으로 한다.

Abstract When we estimate the optimal solution satisfy the objective function and subjective equation in the integer programming, The optimal solution of the objective function Z is decided by the positive integer at extreme point or revised extreme point in the convex set. The convex set is made up the linear subjective equation. The purpose of the paper is thus to establish a stepwise optimization in the integer programming model by estimating the variation $\triangle c_j$ of the constant term c_j in the linear objective function, after an application of the modified Branch & Bound method.

1. 서 론

정수계획법모형에서 목적함수와 선형 제약조건식에 만족하는 최적해를 유도할 때, 선형 제약조건식으로 이루어지는 모든 가능해의 Convex set K에서 정수인 extreme point 또는 수정된 정수인 extreme point를 유도하여 목적함수 Z의 최적해로 결정한다.

정수계획법모형을 simplex 방법으로 계산한 결과 기저변수 벡터 X_B의 성분이 정수가 아닌 경우가 있다. 이때 기저변수 벡터 X_B의 성분이 정수가 되도록 Branch & Bound 방법을 이용하여 정리한다.

모형을 Simplex 방법으로 계산한 결과 기저변수 벡터 X_B의 정수 변수를 x_{i0} 라 할 때 정수변수의 값 b_{i0} ($\neq [b_{i0}]$) 근방에 있는 정수 중에서 정수 $[b_{i0}]$를 포함하는 새로운 Convex set K_1과 정수 $[b_{i0}]+1$을 포함하는 새로운 Convex set K_2를 유도한다.

즉, $K = \{X \mid AX = b,\ X \geq 0] \}$

$$K_1 = \{X \mid AX = b,\ X \geq 0,\ x_i \leq [\ b_i^0]\ \}$$

† 본 연구는 대구대학교 2000년 학술연구비의 지원에 의해 수행되었습니다.
*. 대구대학교 통계학과 교수
**. 동국대학교(서울) 시간강사 송필준 : pjsong@taegu.ac.kr

$K_2 = \{X \mid AX = b,\ X \geq 0,\ x_i \geq [\,b_i^0\,]+1\}$

기저변수 x_i의 값이 정수로 나타날 때까지 Convex set K_1, K_2를 단계적으로 정리하면 기저변수 x_i의 정수값은 서로 다른 여러 종류로 나타날 수 있다.

여기서는 목적함수의 계수 C_j가 변동할 때 제약조건식으로 구성되어지는 Convex Set에서 정수해가 단계적으로 변동하여 얻어지는 최적해(하한값과 상한값)을 유도하도록 한다.

2. 전 개

모든 변수(x_i)의 값을 음이 아닌 정수로 제한하는 정수계획법모형의 일반형은 다음과 같다.

목적함수 : $Max\ \ Z = C^t X$

제약조건 : $AX \leq b$

$X \geq 0$

x_i : 음이 아닌 정수,

$i = 1, 2, \cdots, n$

이때 $X^t = (\,x_1\ x_2\ \cdots x_n\,)$,

$C^t = (\,c_1\ c_2\ \cdots\ c_n\,)$,

$b^t = (\,b_1\ b_2 \cdots\ b_m\,)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \text{이다.}$$

그리고 정수계획법모형을 slack변수 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots x_{n+m}$을 사용하여 표준형으로 정리하면 다음과 같다.

목적함수 : $Max\ \ Z = C^t X$

제약조건 : $AX = b$

$X \geq 0$

$X^t = (\,x_1\ x_2\ \cdots\ x_n\ x_{n+1}\ x_{n+2}\ \cdots\ x_{n+m}\,) \geq 0$

x_i : 음이 아닌 정수,

선형 제약조건식을 만족하는 벡터들의 집합 $K = \{X \mid AX = b,\ x \geq 0\}$는 Convex set가 된다. 그러므로 집합 K는 유한개의 extreme point를 갖는다. 이때 목적함수의 최대값은 extreme point중에서 최대값을 얻는다.

표준형 모형을 Simplex방법으로 정리하면 초기화된 표(1)와 마지막 표(2)를 얻는다.

표(1)

X_B	[A]	x_{n+1} x_{n+2} $\cdots$ x_{n+m}	R. H. S
	[B]	0 0 $\cdots$ 0	0
x_{n+1} x_{n+2} $\vdots$ x_{n+m}	[C]	1 0 $\cdots$ 0 0 1 $\cdots$ 0 $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ 0 0 $\cdots$ 1	b_1 b_2 $\vdots$ b_m

여기서 $[A] \equiv x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n$

$[B] \equiv -c_1\quad -c_2\quad \cdots\quad -c_n$

$$[C] \equiv \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

표(2)

X_B	[A]	[D]	R. H. S
	[B]	[E]	z_0
x_1^0 x_2^0 $\vdots$ x_m^0	[C]	[F]	b_1^0 b_2^0 $\vdots$ b_m^0

여기서 $[A] \equiv x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n$

$[B] \equiv z_1 - c_1\quad z_2 - c_2\quad \cdots\quad z_n - c_n$

$$[C] \equiv \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

$[D] \equiv x_{n+1}\quad x_{n+2}\quad \cdots\quad x_{n+m}$

$[E] \equiv z_{n+1} - c_{n+1}\quad z_{n+2} - c_{n+2}\quad \cdots\quad z_{n+m} - c_{n+m}$

$$[F] \equiv \begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mm} \end{matrix}$$

표(2)에서 기저변수 X_B는 정수와 정수가 아닌 경우로

나타난다.

즉, $b_i^0 = [\, b_i^0 \,]$와 $b_i^0 \neq [\, b_i^0 \,]$인 경우가 있다.

$(i = 1, 2, 3, \cdots m,).$

2.1 $b_i^0 = [\, b_i^0 \,]$인 경우

표(2)에서 유도된 해는 정수($b_i^0 = [\, b_i^0 \,]$)이므로 모형의 최적해를 만족한다. 그러므로 Convex set K와 Convex set K_I는 서로 같은 기저변수 값이므로 동일한 Convex set이다.

즉, $K = \{ X \mid AX = b,\ x \geq 0 \}$

$K_I = \{ X \mid AX = b,\ x \geq 0,$

x_i : 음이 아닌 정수 $\}$

이면 $K = K_1$이다.

기저변수 벡터 X_B가 변하지 않는 범위에서 계수 C_j값이 변동할 수 있는 범위를 유도하자.

목적함수의 계수 $Z_j - C_j$에서 slack 변수로 얻어지는 $C_B B^{-1} N - C_N$와 기저변수 벡터 X_B의 값 $B^{-1}b$는 0보다 큰 값이 되므로 다음 식이 된다.

$$\begin{cases} C_B B^{-1} N - C_N \geq 0 \\ B^{-1} b \geq 0 \end{cases}$$

$\triangle C_j$의 범위는 둘째 식과는 관계가 없으므로

$(C + \triangle C)_B B^{-1} N - (C + \triangle C)_N \geq 0$ 을 만족하는

$\triangle C_j$를 유도하면 된다.

2.2 $b_i^0 \neq [\, b_i^0 \,]$인 경우

Branch & Bound 방법을 이용하여 기저변수 벡터 X_B의 값이 모두 정수가 되도록 한다.

2.3 계수 C_j의 변동

최적해를 만족하는 여러종류의 유형에서 기저변수 벡터 X_B를 고정하고 계수 C_j가 변동할 수 있는 범위를 구하자. 그리고 계수 C_j의 하한값과 상한값 변동에 따른 목적함수 Z의 하한값 과 상한값을 유도할 수 있다.

표준형에서 계수 C_j를 $\triangle C_j$만큼 변동시키면 다음과 같다.

목적함수 : $Max\ \ Z = (C + \triangle C)^t X$

제약조건 : $AX = b$

$X \geq 0$

$X^t = (x_1\ x_2 \cdots x_n\ x_{n+1}\ x_{n+2} \cdots x_{n+m}) \geq 0$

x_i : 음이 아닌 정수,

모형에서 변수 X^t의 성분은 모두 음이 아닌 정수를 요구하므로 표준형으로 계산하면 표(3)이 된다.

표(3)

X_B	[A]	[B]	[C]	R.H.S.
	0 0 ⋯0 0⋯ 0	[D]	[E]	z_0^*
$(x_1^{(h)})^*$				b_1^*
$(x_2^{(h)})^*$				b_2^*
⋮				⋮
$(x_{k+0}^{(h)})^*$	I	[F]	[G]	b_{k+0}^*
$(x_{k+1}^{(h)})^*$				b_{k+1}^*
⋮				⋮
$(x_{k+p}^{(h)})^*$				b_{k+p}^*

여기서 [A] $\equiv x_1\ \ x_2\ \cdots\ x_{k+0}\ \ x_{k+1}\ \cdots\ x_{k+p}$

[B] $\equiv x_{k+p+1}\ \ x_{k+p+2}\ \cdots\ x_n$,

[C] $\equiv x_{n+1}\ \ x_{n+2}\ \cdots\ x_{n+m}$

[D] $\equiv c^*_{k+p+1}\ \ c^*_{k+p+2}\ \cdots\ c^*_n$,

[E] $\equiv c^*_{n+1}\ \ c^*_{n+2}\ \cdots\ c^*_{n+m}$

$$[F] \equiv \begin{array}{ccc} s_{1k+p+1} & s_{1k+p+2} \cdots & s_{1n} \\ s_{2k+p+1} & s_{2k+p+2} \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{k+0k+p+1} & s_{k+0k+p+2} \cdots & s_{k+0n} \\ s_{k+1k+p+1} & s_{k+1k+p+2} \cdots & s_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{k+pk+p+1} & s_{k+pk+p+2} \cdots & s_{k+pn} \end{array}$$

$$[G] \equiv \begin{array}{ccc} y_{11} & y_{12} \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k+01} & y_{k+02} \cdots & y_{k+0m} \\ y_{k+11} & y_{k+12} \cdots & y_{k+1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$y_{k+p1} \quad y_{k+p2} \quad \cdots \quad y_{k+pm}$

그리고 $k+p=m$ 을 만족하는 조건에서 $k=1, 2, \cdots, m$, 이고 $p=0, 1, 2, \cdots, m-k$, 이다.

그리고 h 는 기저변수가 정수해로 나타날 때까지 반복하는 단계의 변화회수이다. ($h=1, 2, \cdots$)

표(3)에서 모형의 최적해는 아래와 같다.

$$(x_{k+p}^{(h)})^* = b_{k+p}^*$$

$$Z = Z_0^* + \sum_{j=1}^{K+P} b_j^* \triangle C_j$$

표(3)에서 유도된 기저변수의 개수가 r개일 때 r의 값에 따라 $\triangle C_j$ 값을 결정할 수 있다.

2.3.1 $r = n$ 일 때

기저변수 벡터 X_B 가 변하지 않는 범위에서 계수 C_j 가 변동할 수 있는 범위를 구하여 목적함수의 최적해가 변동하는 하한값과 상한값을 구한다.

표(3)에서 $\triangle C_j$ 를 포함한 선형식은 나음과 같다.

$$Z = Z_0^* + \sum_{j=1}^{n} b_j^* \triangle C_j$$

$$C_{K+P+1}^* + \sum_{j=1}^{n} s_{jK+P+1}^* \triangle C_j \geq 0$$

$$C_{K+P+2}^* + \sum_{j=1}^{n} s_{jK+P+2}^* \triangle C_j \geq 0$$

$$\vdots$$

$$C_{n+m}^* + \sum_{j=1}^{n} s_{jm}^* \triangle C_j \geq 0$$

위의 식에서 $\triangle C_j$ 의 변동에 따라 목적함수 Z의 하한값과 상한값을 얻을 수 있다.

2.3.2 $r < n$ 일 때

기저변수 벡터 X_B 가 변하지 않는 범위에서 계수 C_j 가 변동할 수있는 범위를 구하여 목적함수의 최적해가 변동하는 하한값과 상한값을 구한다. 계수 C_j 값이 변동할 수 있는 범위를 정리하면 다음과 같다.

표(3)에서 기저변수에 대하여 정리한다.

$\triangle C_j$ 는 모든 Z_j 에 영향을 미친다.

즉, $Z_j - C_j = \sum_{i \in B} x_{ij} c_i - c_j \geq 0$ 이므로

변동 $\triangle C_k$ 를 어떤 기저변수 x_k 에서 생성되도록 두자.

그러면 아래식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i \in B} x_{ij} c_i + x_{kj} \triangle c_k - c_j \geq 0$$

혹은 $x_{kj} \triangle c_k \geq -(z_j - c_j)$

모든 $x_{kj} < 0$ 에서

$$\triangle c_k \leq \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}}$$

모든 $x_{kj} > 0$ 에서

$$\triangle c_k \geq \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}}$$

그러므로 다음 식이 된다.

$$\max_{x_{kj} > 0} \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}} \leq \triangle c_k \leq \min_{x_{kj} < 0} \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}}$$

(단, $j = 1, 2, \cdots, n$. $k = 1, 2, \cdots, m$)

만약 $x_{kj} > 0$ 이 없으면 하한치의 영역은 없다. 그리고 $x_{kj} < 0$ 이 없으면 상한치의 영역은 없다. 계수 $\triangle c_k$ 의 하한값과 상한값은 다음과 같다.

① $\triangle c_k$ 의 하한값

$$\triangle c_k \geq \max_{x_{kj} > 0} \frac{-(z_j^* - c_j^*)}{x_{kj}} \quad \text{............(1)}$$

② $\triangle c_k$ 의 상한값

$$\triangle c_k \leq \min_{x_{kj} < 0} \frac{-(z_j^* - c_j^*)}{x_{kj}} \quad \text{............(2)}$$

표(3)에서 $\triangle c_j$ 를 포함하는 식(3)은 다음과 같다.

$$Z = Z_0^* + \sum_{i=1}^{k+p} b_i^* \triangle c_i \quad \text{............(3)}$$

$$c_{k+p+1}^* + \sum_{i=1}^{k+p} s_{ik+p+1} \geq 0$$

$$c_{k+p+2}^* + \sum_{i=1}^{k+p} s_{ik+p+2} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$c_n^* + \sum_{i=1}^{k+p} s_{in} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$c_{n+1}^* + \sum_{i=1}^{k+p} y_{i1} \geq 0$$

$$c_{n+2}^* + \sum_{i=1}^{k+p} y_{i2} \geq 0$$

$$\vdots$$

$$c^{*}_{n+m} + \sum_{i=1}^{k+p} y_{im} \geq 0$$

식(3)에 식(1)의 하한값 $\triangle c_k$ 를 대입한다. 그리고 slack 변수 $(x^{(h)}_{k+0})^*$, $(x^{(h)}_{k+1})^*$, $\cdots$, $(x^{(h)}_{k+p})^*$ 에 대응하는 $\triangle C$ 의 값은 모두 0으로 취급한다.

이때 계수 $\triangle c_j$ 와 목적함수 Z 의 하한값을 구할 수 있다.

같은 방법으로 식(3)에 식(2)의 상한값 $\triangle c_k$ 대입하여 계수 $\triangle c_j$ 와 목적함수 Z 의 상한값을 구할 수 있다. 목적함수 Z의 하한값과 상한값으로부터 최소한의 하한값과 최대의 상한값을 선택하여 모형을 분석할 수 있다.

3. 응 용

정수계획법모형을 단계적 최적화 과정으로 분석하자.

목적함수 :

$$Max \quad Z = 40x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 110x_4$$

제약조건

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 110$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 124$$

$$x_i \geq 0,\ x_i : \text{정수},\ i = 1, 2, 3, 4$$

모형을 표준형으로 수정한 후 simplex 방법에 의하여 초기 표(1)과 마지막 표(2)를 아래와 같이 얻을 수 있다.

도표(1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	-40	-50	-80	-110	0	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	0	0	16
x_6	3	5	10	15	0	1	0	110
x_7	7	5	3	2	0	0	1	124

도표(2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	0	5/3	5/6	0	45/2	35/6	0	3005/3
x_1	1	5/6	5/12	0	5/4	-1/12	0	65/6
x_4	0	1/6	7/12	1	-1/4	1/12	0	31/6
x_7	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	5/12	1	227/6

도표(2)에서 얻은 해는

x_1 = 65/6, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 31/6,
x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 227/6, Z = 3005/3 이다.

이것은 정수계획법모형을 만족하지 못한다.

($x_i \neq$ 정수)

정수계획법모형을 만족하기 위하여 변형된 Branch and bound 방법을 이용하여 실행가능한 모든 해를 정리하면 도표(3)를 얻을 수 있다.

도표(3)

도표	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Z
4	10	0	2	4	0	0	40	**1000**
5	11	0	0	5	0	2	37	990
6	10	1	0	5	0	0	39	**1000**
7	11	0	0	5	0	2	37	990
8	10	1	0	5	0	0	39	**1000**
9	10	0	2	4	0	0	40	**1000**
10	11	0	1	4	0	0	36	960
11	10	0	2	4	0	0	40	**1000**

도표(3)에서 최대값 1000을 만족하는 도표를 정리하면 다음과 같다.

1. **도표(4)**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	2	0	0	0	20	6	0	1000
x_1	2	0	0	0	0	0	0	10
x_3	-12/5	2	1	0	3	-1/5	0	2
x_4	7/5	-1	0	1	-2	1/5	0	4
x_7	-13/	1	0	0	-5	1/5	1	40

①. $x_1 \leq 10$ $\qquad x_1 = -x_1^{(1)} + 10$

2. **도표(6)**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	2	0	0	0	20	6	0	1000
x_1	2	0	0	0	0	0	0	10
x_2	7/5	1	0	1	2	-1/5	0	1
x_4	0	0	0	2	0	0	0	5
x_3	2/5	0	1	-2	-1	1/5	0	0
x_7	-6/5	0	0	-1	-7	2/5	1	39

①. $x_4 \leq 5$ $\qquad x_4 = -x_4^{(1)} + 5$

②. $x_1 \leq 10$ $\qquad x_1 = -x_1^{(2)} + 10$

3. ①. $x_4 \le 5 \quad x_4 = -x_4^{(1)} + 5$

②. $x_3 \le 0 \quad x_3 = -x_3^{(2)} + 0$

도표(8)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	0	0	5	10	25	5	0	1000
x_1	1	0	5/2	5	25/4	-1/2	0	10
x_4	0	0	0	2	0	0	0	5
x_3	0	0	2	0	0	0	0	0
x_2	0	1	-7/2	-6	-3/2	1/2	0	1
x_7	0	0	-3	-7	-10	1	1	39

4. **도표(9)**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	2	0	0	0	20	6	0	1000
x_1	2	0	0	0	0	0	0	10
$x_3^{(2)}$	-12/5	2	1	0	3	-1/5	0	1
x_4	14/5	-2	0	0	-4	2/5	0	3
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1
$x_4^{(1)}$	-7/5	1	0	1	2	-2/5	0	1
x_7	-13/5	1	0	0	-5	1/5	1	40

①. $x_4 \le 5 \quad x_4 = -x_4^{(1)} + 5$

②. $x_3 \ge 1 \quad x_3 = x_3^{(2)} + 1$

③. $x_1 \le 10 \quad x_1^{(1)} = -x_1^{(3)} + 10$

5. **도표(11)**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	R.H.S
X_B	0	10/7	0	10/7	160/7	40/7	0	1000
x_1	1	5/7	0	5/7	15/14	-1/7	0	10
x_4	0	0	0	2	0	0	0	3
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1
$x_4^{(1)}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$x_3^{(2)}$	0	2/7	1	-12/7	-3/7	1/7	0	1
x_7	0	-6/7	0	-13/7	61/7	4/7	1	40

①. $x_4 \le 5 \quad x_4 = -x_4^{(1)} + 5$

②. $x_3 \ge 1 \quad x_3 = x_3^{(2)} + 1$

③. $x_4^{(1)} \ge 1 \quad x_4^{(1)} = -x_4^{(3)} + 1$

3.1 최적해 분석

도표(3)에서는 정수해를 만족하고 목적함수의 값(Z)을 최대값으로 하는 도표는 (4), (6), (8), (9), (11)이다. 그러므로 먼저 도표(4)을 분석하자.

도표(4)에서 $\triangle c_j$ 를 포함하는 식을 유도하자,

목적함수: $Z = 1000 + 10\triangle c_1 + 2\triangle c_3 + 4\triangle c_4 + 40\triangle c_7$

선형식:

$$2 + 2\triangle c_1 - \frac{12}{5}\triangle c_3 + \frac{7}{5}\triangle c_4 - \frac{13}{5}\triangle c_7 \ge 0$$

$$2\triangle c_3 - \triangle c_4 + \triangle c_7 \ge 0$$

$$20 + 3\triangle c_3 - 2\triangle c_4 - 5\triangle c_7 \ge 0$$

$$6 - \frac{1}{5}\triangle c_3 + \frac{1}{5}\triangle c_4 + \frac{1}{5}\triangle c_7 \ge 0$$

기저변수 벡터 X_B 에서 x_1, x_3, x_4 는 기본변수이고 x_7 은 slack변수이다. 그러므로 변수 x_7 에 대응하는 $\triangle c_7$ 은 0으로 둔다.

기저변수 벡터 $X_B^t = (x_1, x_3, x_4, x_7)$은 변하지 않는 범위내에서 $\triangle c_j$ 범위를 유도하여 목적함수의 값이 변동 할수 있는 하한값과 상한값을 유도하면 다음과 같다.

$$\max_{x_{kj} > 0} \frac{-2}{2} \le \triangle c_1 \Rightarrow -1 \le \triangle c_1$$

$$\max_{x_{kj} > 0} \frac{-20}{3} \le \triangle c_3 \le \min_{x_{kj} < 0} \left[\frac{-2}{-12/5}, \frac{-6}{-1/5} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{-20}{3} \le \triangle c_3 \le \frac{5}{6}$$

$$\max_{x_{kj} > 0} \left[\frac{-2}{7/5}, \frac{-6}{1/5} \right] \le \triangle c_4 \le \min_{x_{kj} < 0} \frac{-20}{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{-10}{7} \le \triangle c_4 \le 10$$

$\triangle c_j$ 의 하한값과 상한값을 대입하여 정리하면 도표(12)를 얻는다.

도표(12)

	하한	현재	상한
$\triangle c_1$	-1	0	0
$\triangle c_2$	0	0	0
$\triangle c_3$	-20/3	0	5/6
$\triangle c_4$	-10/7	0	10
$\triangle Z$	-610/21	0	2405/6
Z	20390/21	1000	8405/6

도표(6), 도표(8), 도표(9), 도표(11)도 같은 방법으로 정리하면 다음과 같다.

도표(13)

도표	값	$\triangle c_1$	$\triangle c_2$	$\triangle c_3$	$\triangle c_4$	$\triangle Z$	Z
4	하한	-1	0	$\frac{-20}{3}$	$\frac{-10}{7}$	$\frac{-610}{21}$	$\frac{20390}{21}$
	현재	0	0	0	0	0	1000
	상한	0	0	$\frac{5}{6}$	10	$\frac{2405}{6}$	$\frac{8405}{6}$
6	하한	-1	$\frac{-10}{7}$	-5	0	$\frac{-80}{7}$	$\frac{6920}{7}$
	현재	0	0	0	0	0	1000
	상한	0	30	20	0	300	1300
8	하한	-2	-10	$\frac{-5}{2}$	-5	-45	955
	현재	0	0	0	0	0	1000
	상한	10	$\frac{10}{7}$	0	0	$\frac{710}{7}$	$\frac{7710}{7}$
9	하한	-1	0	$\frac{-20}{3}$	-10	$\frac{-80}{3}$	$\frac{2920}{3}$
	현재	0	0	0	0	0	1000
	상한	0	0	$\frac{5}{6}$	15	$\frac{95}{6}$	$\frac{6095}{6}$
11	하한	-2	0	-5	$\frac{-5}{7}$	$\frac{-180}{7}$	$\frac{6820}{7}$
	현재	0	0	0	0	0	1000
	상한	40	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{2405}{6}$	$\frac{8405}{6}$

정수계획법모형을 최대한으로 만족하는 현재값(=1000)과 계수 $\triangle c_j$의 변동으로 하한값과 상한값의 범위로부터 목적함수의 최적해는 하한값 Z_L = 955 로부터 상한값 Z_U = 8405/6 까지 변동함을 얻는다.

4. 결 론

정수계획법모형에서 목적함수와 선형 제약조건식을 만족하는 변수 x_i 값을 모두 정수해로 요구할 때, 기저벡터의 변화를 가지지 않는 계수 c_j의 변동을 측정하였다. Simplex방법으로 계산한 기저변수 벡터 $X_B(=B^{-1}b)$의 값은 정수 혹은 정수가 아닌 값으로 나타나므로 기저변수 벡터 X_B를 모두 정수해로 요구하는 정수계획법모형에 적합하기 위하여 Branch and bound 방법을 이용하여 정리하였다.

여기서 기저변수 벡터 X_B를 정수로 유도한 다음 계수 c_j 값이 변동할 수 있는 증분 $\triangle c_j$ 값을 정리하였다.

$$\max_{x_{kj}>0} \frac{-(z_j-c_j)}{x_{kj}} \le \triangle c_k \le \min_{x_{kj}<0} \frac{-(z_j-c_j)}{x_{kj}}$$

$$j=1,2,\cdots,n \quad . \quad k=1,2,\cdots,m$$

식에서 $\triangle c_j$ 값이 변할 수 있는 하한치와 상한치로 각각의 Convex set을 만족하는 목적함수 Z의 변화를 추정할 수 있다. 이것은 계수 c_j의 값이 하한치 로 변동할 때와 상한치 $c_j'' = c_j + \triangle c_j$로 변동할 때 유도되는 최적해(정수)는 목적함수 Z의 하한값과 상한값을 구하였다.

정수계획법모형의 최적해 Z를 만족하는 값에서 하한값 가운데서서 제일 적은 하한값(Z_L)과 상한값 가운데서 제일 큰 상한값(Z_U)을 유도하였다. 이것은 목적함수의 계수 c_j의 변동($\triangle c_j$)을 분석함으로서 얻을 수 있었다.

일반적으로 목적함수의 계수변동을 분석할 때는 기저벡터 X_B의 값이 Convex set에서 정수 혹은 분수에 관계없이 분석하였다. 여기서는 X_B의 값이 정수에서만 취급하여 c_j의 값이 Convex set에서 변동할 수 있도록 최적해를 분석하였다.

응용문제에서 제시한 선형 제약조건식의 행렬 $A_{(3\times4)}$의 차수보다 더 큰 차수인 ($m \times n$)행렬로 확장하여 프로그램을 개발하면, 실제 사회에 적용이 가능하리라 생각하며 사회에 많은 도움과 발전이 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

[1] 문병주, 선형계획론, 경문사,1995.

[2] 박순달, 경영과학, 민영사, 1998.

[3] 박순달, O. R(이론과 전산연습), 민영사, 1996.

[4] 이순, 의사결정론, 자유아카데미, 1995.

[5] Bruce A. Murtage Advanced Linear P개 gramming, Mcgraw-Hill inc, 1981.

[6] SAUL I, GASS, Linear programming 5th ed Mcgraw-Hill inc, 1985.

[7] Shayle R, Searle, MATRIX ALGEBRA, Willy, 1982.

[8] W. H. MARLOW, MATHEMATICS FOR OPERATIONS RESEARCH DOVER PUBLICATIONS INC, 1993.

[9] ANDRES WEINTRAUB and JOGRE VERA, A CUTTING PLANE OPPROACH FOR CHANCE CONSTRAINED LINEAR PROGRAMS, OPERATIONS RESEARCH, VOL 39 ,NO 4 , 1991

[10] E. ANDREW BOYD, FENCHEL CUTTING PLANES FOR INTEGER PROGRAMS, OPERATIONS RESEARCH, VOL 42 , NO 1, 1994.

송 필 준 (Phil-Jun Song)
1972년 2월 영남대학교 수학과 졸업(이학사)
1980년 2월 동국대학교 대학원 통계학과 졸업(이학석사)
1999년 2월 대구가톨릭대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)
1980년 9월 ~ 현재 대구대학교 자연과학대학 통계학과 교수
관심분야 : O, R

김 정 숙 (Jung-Suk Kim)
1978년 2월 경북대학교 수학과 졸업(이학사)
1984년 2월 동국대학교 대학원 통계학과 졸업(이학석사)
1999년 8월 경북대학교 대학원 통계학과 졸업(이학박사)
2001년 9월 ~현재 동국대학교 시간강사
관심분야 : 생존분석