

일반 형상의 2차원 영역에서의 멀티스케일 웨이블릿-갤러킨 기법

김윤영[†] · 장강원* · 김재은*

(2001년 11월 13일 접수, 2002년 2월 14일 심사완료)

Multiscale Wavelet-Galerkin Method in General Two-Dimensional Problems

Yoon Young Kim, Gang-Won Jang and Jae Eun Kim

Key Words: Multiscale(다중스케일), Interpolation Wavelets(보간 웨이블릿), Galerkin Method(갤러킨 방법), Plane Elasticity Problem(평면탄성문제), Adaptive Analysis(적응해석)

Abstract

We propose a new multiscale Galerkin method based on interpolation wavelets for two-dimensional Poisson's and plane elasticity problems. The major contributions of the present work are: 1) full multiresolution numerical analysis is carried out, 2) general boundaries are handled by a fictitious domain method without using a penalty term or the Lagrange multiplier, 3) no special integration rule is necessary unlike in the (bi-)orthogonal wavelet-based methods, and 4) an efficient adaptive scheme is easy to incorporate. Several benchmark-type problems are considered to show the effectiveness and the potentials of the present approach.

1. 서론

웨이블릿이 지니는 다중스케일, 다중해상도가 효율적인 적응 해석을 위한 아주 유용한 특성이지만 웨이블릿을 이용한 수치해석기법의 개발은 아직 미진한 상태이다. 웨이블릿을 이용한 해석방법의 가장 큰 어려움 중 하나는 대부분의 웨이블릿이 형상 자체가 복잡하고 정의되는 기반이 넓기 때문에 임의의 형상에 임의의 경계조건을 표현하기에 부적합하다는 것이다. 이 경계 표현의 문제점을 극복하기 위해서 경계에서 수정된 웨이블릿을 사용하는 방법^(1,2)이 많이 시도되었지만 일반적

인 경계를 취급하기에는 적절하지 않다.

웨이블릿으로 일반적인 형상을 다루고자 하는 또 다른 방법은 가상영역법이다.⁽³⁻⁷⁾ 그런데 기존의 가상영역법은 복잡한 관심영역을 둘러싸는 단순한 직사각형의 가상영역 내에서 문제를 근사시키는 방법으로 경계 조건을 페널티 파라미터⁽³⁻⁵⁾나 라그랑지 승수^(6,7)를 이용하여 처리하였으며, 다중스케일이 아닌 단일 스케일만을 이용하여 해석을 수행하였다. 따라서 웨이블릿이 지니는 가장 큰 장점인 다중스케일을 이용한 적응해석을 제대로 활용하지 못한 문제점이 있다. 또한 이 방법들은 직교 웨이블릿이나 쌍직교 웨이블릿을 이용했기 때문에 시스템 행렬 구성 시 Latto 등⁽⁸⁾이 제안한 특수한 적분 방법을 사용해야 하는 등 일반적인 수치기법으로 발전되기에는 문제점들을 가지고 있다.

하지만 보간 웨이블릿은 직교, 쌍직교 웨이블릿과는 달리 명확한 함수의 형태가 존재하며 절

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : yykim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

* 서울대학교 대학원

점에서의 스케일링 함수 계수 자체가 함수 값을 의미하는 장점을 지니고 있기 때문에 이러한 보간 웨이블릿을 이용한 웨이블릿 기반 수치해석 기법에 대한 연구⁽⁹⁻¹³⁾가 활발해 지고 있다. 최근 Kim and Jang⁽⁹⁾은 박판보의 뒤틀림, 찌그러짐의 국부 거동을 선형 보간웨이블릿을 이용하여 일차원 해석을 수행하였고 Bertoluzza와 Naldi,⁽¹⁰⁾ Bertoluzza,⁽¹¹⁾ 김윤영과 김재은⁽¹²⁾은 보간웨이블릿으로 콜로케이션 방법을 시도하여 좋은 결과를 얻었다. Christon 등⁽¹³⁾은 선형 보간웨이블릿이 H^1 공간에서 안정적이라는 결론을 얻고 타원형 편미방의 성질이 강한 문제에 매우 효율적이라는 사실을 보였다. 그러나 이 연구에서 다룬 문제는 직사각형의 단순한 경계표현을 넘어서지는 못했다.

본 연구에서는 선형 보간웨이블릿을 이용하여 다중스케일 갤러킨 정식화를 통해 일반 경계를 지닌 이차원 탄성 문제를 적응적으로 해석하는 새로운 방법을 제안하고자 한다. 특히 곡선 경계에 일반적인 경계조건을 갖는 문제를 보간웨이블릿 기저를 사용하여 해석을 완전한 다중스케일 형태로 수행하였으며, 이를 위한 시스템 행렬 및 입력 힘 벡터를 구성하는 방법을 제안한다. 일반 경계 및 경계조건을 표현하기 위하여 가상영역법을 사용했으며 곡선 경계의 표현은 균일한 절점들에 의한 지그재그로 근사화 하도록 했다. 변위 경계조건은 패널티 파라미터나 라그랑지 승수를 도입하지 않고 시스템 행렬에 바로 부과되며 경계인력은 근사된 지그재그의 경계에 맞게 조정하는 방안을 제시하였다.

수치 예제에서는 엄밀해가 있는 포와송 방정식의 문제와 일반 형상의 이차원 탄성문제를 통해 본 연구에서 제안한 방법의 타당성을 검증하고자 한다. 특히 본 연구에서는 모든 해석을 웨이블릿 기반의 다중스케일, 다중해상도 개념으로 수행하였기 때문에 적응해석도 매우 용이하게 수행될 수 있음을 제시하고자 한다.

2. 2차원 선형 보간 웨이블릿

2.1 웨이블릿의 다중분해 특성

웨이블릿을 이용한 효율적인 적응해석 기법은 다중분해 특성을 기반으로 한다. 다중분해 해석은

부분공간 $V_j \in L^2(\mathbf{R})$ (j 는 정수)의 집합들로 표현할 수 있으며 다음과 같은 성질을 지닌다.

$$\{0\} \in \dots \in V_{-1} \in V_0 \in V_1 \in \dots \in L^2 \quad (1a)$$

$$\text{If } f(x) \in V_j, \text{ then } f(2x) \in V_{j-1} \quad (1b)$$

$$\text{If } f(x) \in V_j, \text{ then } f(x-k) \in V_j \quad (1c)$$

(k, j 는 정수)

부분공간 V_j 는 스케일링 함수 $\phi(x)$ 의 병진과 팽창으로 표현된다. 즉 $\phi(x)$ 는 V_j 를 생성시키는 함수이며 이 공간에 대한 기저함수 $\phi_{j,k}(x)$ 는 팽창과 병진에 대한 인덱스 j, k 로 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \phi(2^j x - k) \quad (2)$$

또한 이 스케일링 함수는 다음의 특성을 지닌다.

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2x - k) \quad (3)$$

일단 부분공간 V_j 와 기저함수 $\phi(x)$ 가 정의되었으므로 다음으로 V_j 와 V_{j-1} 의 차이를 나타내는 보조공간 또는 웨이블릿 공간 W_j 와 이 공간의 기저를 만들어 내는 웨이블릿 $\psi(x)$ 를 도입한다. 즉 웨이블릿은 공간의 차이를 나타내는 기저함수이며 스케일링 함수의 (2), (3)과 상응하는 다음 특성을 지닌다.

$$\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k) \quad (4)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi(2x - k) \quad (5)$$

또한 웨이블릿 공간 W_j 가 공간 간의 차이를 나타내는 특성으로 인하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (6)$$

$$\bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = L^2(\mathbf{R}) \quad (7)$$

$$V_j \oplus \left[\bigoplus_{j=-j}^{\infty} W_j \right] = L^2(\mathbf{R}) \quad (8)$$

이러한 공간들과 기저함수들(스케일링 함수와 웨이블릿)을 이차원으로의 확장하기 위해 텐서곱을 이용한다. 이차원 부분공간 V_j^2 를

$$V_j^2 = V_j \otimes V_j$$

로 정의하면 보다 정밀한 해상도의 공간 V_{j+1}^2 와 보조공간 W_j^2 는 다음과 같이 정의된다.

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 \quad (9)$$

$$W_j^2 = (W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \quad (10)$$

식 (10)에서 알 수 있듯이 이차원 웨이블릿 공간 W_j^2 는 세 방향($x, y, \text{대각선}$)으로의 차이를 나타내는 세 부분공간의 합으로 표현할 수 있다. 또한 각각의 부분공간을 표현하는 기저를 $\psi^1(x, y)$, $\psi^2(x, y)$ 와 $\psi^3(x, y)$ 의 세 웨이블릿의 병진과 팽창의 합으로 표현할 수 있다.⁽¹⁴⁾

2.2 2차원 선형 보간웨이블릿에 의한 함수 근사

선형 보간웨이블릿은 앞 절에서 기술한 웨이블릿의 다중해상 특성을 지니며, 절점에서 스케일링함수의 계수가 바로 그 절점 값이 되는 보간함수의 특성을 만족시키는 가장 단순한 형태의 웨이블릿이다. Fig. 1은 일차원 선형 보간 웨이블릿의 스케일링 함수와 웨이블릿을 나타낸다. 선형 보간웨이블릿의 식 (3)과 (5)의 스케일링 관계식에서의 계수값은 다음과 같이 주어진다.

$$h_k = \begin{cases} 0.5 & \text{for } k = -1, 1 \\ 1 & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (11a)$$

$$g_k = \begin{cases} 1 & \text{for } k = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (11b)$$

임의의 함수 $f(x)$ 의 선형 보간 공간 V_j 로의 투영은 일정 간격의 절점들에서의 함수값 $f(2^{-j}k)$ 을 보간함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

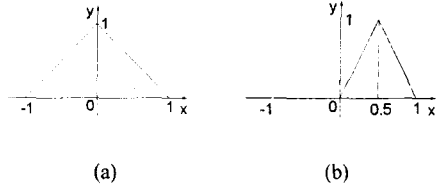


Fig. 1 (a) The one-dimensional hat interpolation scaling function $\phi(x)$ and (b) wavelet $\psi(x)$

$$P_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad (12)$$

식 (12)에서 계수 $s_{j,k} = f(2^{-j}k)$ 이다.

만약 $f(x)$ 가 V_{j+1} 에 속하는 함수라면 $f(x)$ 와 $P_j f(x)$ 의 차이는 웨이블릿 $\psi_{j,k}(x)$ 에 의해서 표현이 가능하다. 즉,

$$f(x) - P_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \in W_j \quad (13)$$

의 관계가 성립하고 식 (13)에서 웨이블릿의 계수 $d_{j,k}$ 의 크기는 $\psi_{j,k}(x)$ 함수 중심에서 $f(x)$ 와 $P_j f(x)$ 사이의 오차를 나타낸다.

이차원 선형 보간웨이블릿은 식 (9)와 (10)으로 정의되는 이차원 선형 보간 공간의 기저를 이루며 일차원 함수의 텐서곱에 의해 다음과 같이 정의되며 그 형상은 Fig. 2에 그려져 있다.

$$\phi_{j,k,l} = \phi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) \quad (14a)$$

$$\psi_{j,k,l}^1 = \psi(2^j x - k) \phi(2^j y - l) \quad (14b)$$

$$\psi_{j,k,l}^2 = \phi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) \quad (14c)$$

$$\psi_{j,k,l}^3 = \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - l) \quad (14d)$$

임의의 이차원 함수 $f(x, y) \in V_{j+1}^2$ 은 공간 V_{j+1}^2 에서 식 (14)에서 정의된 웨이블릿 함수들에 의해서 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$f(x, y) \approx \sum_{k,l} s_{j+1,k,l} \phi_{j+1,k,l}(x, y) \quad (15a)$$

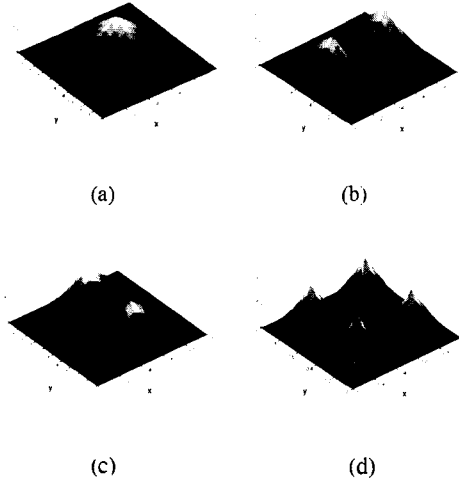


Fig. 2 Hat interpolation: (a) scaling function $\phi(x, y)$, (b-d) wavelets $\phi^i(x, y)$. ($i=1, 2, 3$)

$$= \sum_{k,l} s_{j,k,l} \phi_{j,k,l}(x, y) + \sum_{p=1}^3 \sum_{k,l} d_{j,k,l}^p \psi_{j,k,l}^p(x, y) \quad (15b)$$

$$= \sum_{k,l} s_{j_0,k,l} \phi_{j_0,k,l}(x, y) + \sum_{q=j_0}^j \sum_{p=1}^3 \sum_{k,l} d_{q,k,l}^p \psi_{q,k,l}^p(x, y) \quad (15c)$$

여기서 식 (15c)만이 여러 스케일 j 가 존재하는 다중분해 형태를 띠고 있고 이는 적응해석법의 적용에 유용한 근사 형태이다. 본 연구에서는 최저 스케일로서 $j_0=1$ 을 사용했다.

다중분해해석은 $\{s_{j,k,l}, d_{j,k,l}^1, d_{j,k,l}^2, d_{j,k,l}^3\}$ 을 기반으로 수행되므로 $\{s_{j,k,l}, d_{j,k,l}^1, d_{j,k,l}^2, d_{j,k,l}^3\}$ 에서 $s_{j+1,k,l}$ 로의 변환과 변환 행렬 T_j 를 생각할 수 있다.

먼저 일차원의 경우를 고려해 보면 일차원 함수 $f(x)$ 의 공간 V_{j+1} 에서의 근사는

$$f(x) \approx \sum_k s_{j+1,k} \phi_{j+1,k}(x) \quad (16a)$$

$$= \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (16b)$$

로 주어진다. 그리고 식 (5)와 (11)을 이용하면 $\psi(x) = \phi(2x-1)$ (17)

의 관계를 얻고 $x = m/2^{j+1}$ (m 은 정수)를 식 (16a)와 (16b)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\sum_k s_{j+1,k} \phi(m-k) = \sum_k s_{j,k} \phi\left(\frac{m}{2} - k\right) + \sum_k d_{j,k} \phi(m-2k-1) \quad (18)$$

또한 식 (3)에서 $\phi(k/2) = h_k$ 라는 사실을 이용하면 식 (18)은

$$s_{j+1,m} = \sum_k s_{j,k} h_{m-2k} + \sum_k d_{j,k} h_{2m-4k-2} \quad (19)$$

로 단순하게 되고 이를 행렬 형태로 나타내면

$$\{s_{j+1,k}\} = T_j \cdot \begin{Bmatrix} \{s_{j,k}\} \\ \{d_{j,k}\} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

이고 다음과 같은 변환행렬을 얻을 수 있다.

$$T_j = [h_{m-2k} | h_{2m-4k-2}] \quad (21)$$

이차원의 경우도 동일한 방법으로 식 (15a)와 (15b)에 $x = m/2^{j+1}, y = n/2^{j+1}$ 를 대입해 보면

$$T_j = [h_{m-2k} h_{n-2l} | h_{2m-4k-2} h_{2n-4l-2} | h_{m-2k} h_{2n-4l-2} | h_{2m-4k-2} h_{2n-4l-2}] \quad (22)$$

와 같이 정리된다.

3. 다중스케일 웨이블릿-갤러킨 정식화

이차원 영역 ω 에 체력 $f(x, y)$ 가 작용할 때 변위를 $u(x, y)$ 라고 할 때 본 논문에서는 다음과 같은 이차원 선형탄성문제를 해석하고자 한다.

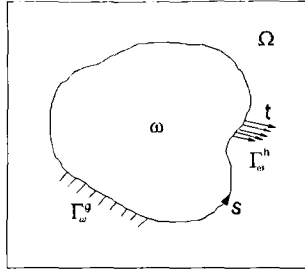


Fig. 3 The package domain ω embedded into a rectangular fictitious domain Ω

$$-\nabla \cdot \sigma = f \text{ in } \omega \quad (23a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_{\omega}^g \quad (23b)$$

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma_{\omega}^h \quad (23c)$$

식 (23a)에서 σ 는 응력텐서로서 변형률텐서 ϵ 과 탄성텐서 C 의 곱으로 표현되며 식 (23c)의 \mathbf{t} 는 경계에서의 인력을 의미한다. Γ_{ω}^g 와 Γ_{ω}^h 는 영역 ω 의 경계로서 Fig. 3에 표시된 바와 같이 각각 변위가 주어진 경계와 외부 인력이 주어진 경계를 나타내며 $\Gamma_{\omega}^g \cup \Gamma_{\omega}^h = \partial\omega$ 이다.

식 (23a)에 기하학적으로 적합한 임의의 변위 \mathbf{v} 에 대하여 갤러킨 적분을 영역 ω 에서 수행하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_{\omega} \epsilon(\mathbf{v}) : C : \epsilon(\mathbf{u}) d\omega \quad (24)$$

$$= \int_{\Gamma_{\omega}^g} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\omega$$

웨이블릿을 이용한 해석방법이 지닌 해석 영역경계에서의 단점을 극복하기 위해서 관심영역 ω 를 둘러싸고 단순한 형상을 지닌 Fig. 3과 같은 직사각형 가상영역 Ω 을 도입한다. 새롭게 정의된 가상영역의 경계는 $\partial\Omega$ 를 직사각형 영역의 경계라고 표시할 때

$$\Gamma_{\Omega}^g = \partial\Omega \cap \Gamma_{\omega}^g$$

$$\Gamma_{\Omega}^h = \partial\Omega \cap \Gamma_{\omega}^h$$

$$\Gamma_{\Omega}^b = \partial\Omega \setminus (\Gamma_{\Omega}^g \cup \Gamma_{\Omega}^h)$$

로 표시하기로 한다.

적분식 (24)를 가상영역 Ω 에서 표현하기 위해 새로운 탄성텐서 C_{Ω} 와 체력 $\bar{\mathbf{f}}(x, y)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$C_{\Omega} = \begin{cases} C & \text{if } (x, y) \in \omega \\ \eta C & \text{else } (x, y) \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{f}(x, y) & \text{if } (x, y) \in \omega \\ 0 & \text{else } (x, y) \in \Omega \setminus \omega \end{cases} \quad (26)$$

식 (25)에서 η 는 매우 작은 값을 의미하는 파라미터로 일반적으로 $O(10^{-3})$ 의 값을 가진다. 이산화된 시스템 행렬의 조건수는 이 파라미터의 값에 민감하므로 반복법을 사용할 경우 너무 작은 값을 취하지 않도록 해야한다.⁽⁶⁾

새로 정의된 탄성텐서와 체력에 의해서 식 (24) 는 가상영역 Ω 에서 기하학적으로 적합한 임의의 \mathbf{v}_{Ω} 에 대하여 다음 식을 만족시키는 \mathbf{u}_{Ω} 를 찾는 문제로 근사된다.

$$\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{v}_{\Omega}) : C_{\Omega} : \epsilon(\mathbf{u}_{\Omega}) d\Omega \quad (27)$$

$$= \int_{\Gamma_{\Omega}^g} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_{\Omega} ds + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}_{\Omega} d\Omega$$

스케일 j+1에서 식 (27)의 근사해를 \mathbf{u}_j 라고 하면 이는 식 (15b)에 의해서 스케일 j의 선형 보간웨이블릿으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}_j = \begin{Bmatrix} u_j^x \\ u_j^y \end{Bmatrix} = \sum_{k,l} \mathbf{s}_{j,k,l} \phi_{j,k,l}(x, y) \quad (28)$$

$$+ \sum_{p=1}^3 \sum_{k,l} \mathbf{d}_{j,k,l}^p \psi_{j,k,l}^p(x, y)$$

식 (28)에서 벡터 $\mathbf{s}_{j,k,l}$, $\mathbf{d}_{j,k,l}^p$ 은 x, y 방향 성분들을 원소로 가지며

$$\mathbf{s}_{j,k,l} = \begin{Bmatrix} s_{j,k,l}^x \\ s_{j,k,l}^y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{j,k,l}^p = \begin{Bmatrix} d_{j,k,l}^{x,p} \\ d_{j,k,l}^{y,p} \end{Bmatrix}$$

와 같이 표현된다.
 식 (28)을 행렬형태로 나타내면

$$u_j = N_j \cdot U_j \tag{29}$$

이고 웨이블릿 함수 행렬 N_j 와 계수 벡터 U_j 는 다음과 같다.

$$N_j = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \Phi_j, 0 & \Psi_j^1, 0 & \Psi_j^2, 0 & \Psi_j^3, 0 \\ \hline 0, \Phi_j & 0, \Psi_j^1 & 0, \Psi_j^2 & 0, \Psi_j^3 \end{array} \right] \\
 = [N_j^s, N_j^{d^1}, N_j^{d^2}, N_j^{d^3}] \tag{30}$$

$$U_j = \{s_j^x, s_j^y, (d_j^{x,1}, d_j^{y,1}, d_j^{x,2}, d_j^{y,2}, d_j^{x,3}, d_j^{y,3})\}^T = \{s_j, d_j\}^T \tag{31}$$

식 (30)에서 벡터 Φ_j, Ψ_j^p 의 원소들은 식 (28)과 (29)를 비교해보면 알 수 있으며 (31)의 원소벡터들은

$$s_j^a = \{s_{j,k,l}^a\}, \quad d_j^{a,p} = \{d_{j,k,l}^{a,p}\} \tag{32}$$

($a=x$ or $y, p=1,2,3$)

으로 표현된다.

임의의 변위 v_Ω 도 식 (29)와 같은 방법으로 근사한 후 이를 식 (27)에 대입 정리하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻는다.

$$K_j U_j = F_j \tag{33}$$

$$K_j = \begin{bmatrix} k_{j,j}^{s,s} & k_{j,j}^{s,d^1} & k_{j,j}^{s,d^2} & k_{j,j}^{s,d^3} \\ & k_{j,j}^{d^1,d^1} & k_{j,j}^{d^1,d^2} & k_{j,j}^{d^1,d^3} \\ & \text{sym} & k_{j,j}^{d^2,d^2} & k_{j,j}^{d^2,d^3} \\ & & & k_{j,j}^{d^3,d^3} \end{bmatrix} \tag{34}$$

선형미분연산 행렬 L 을 다음과 같이 정의하면

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{35}$$

식 (34)의 부행렬 $k_{m,n}^{\beta,\gamma}$ 등은 다음과 같이 정의된다.

$$k_{m,n}^{\beta,\gamma} = \int_{\Omega} (N_m^\beta)^T L^T C L N_n^\gamma d\Omega \tag{36}$$

$$N_m^\beta = \begin{cases} N_m^s & \text{if } \beta = s \\ N_m^{d^p} & \text{if } \beta = d^p \end{cases} \tag{37}$$

식 (37)의 웨이블릿 행렬 $N_m^s, N_m^{d^p}$ 는 식 (30)에 정의되어 있으며 하첨자 m 은 해당 스케일을 의미한다.

식 (36)의 $k_{m,n}^{\beta,\gamma}$ 의 적분은 기존 직교, 쌍직교 웨이블릿을 이용할 경우 스케일링 방정식, 모멘트 방정식 등을 통한 복잡한 방법으로 구해야 하나⁽⁸⁾ 본 연구에서처럼 선형 보간 웨이블릿을 사용하면 직접적분 또는 수치적분도 가능하다.

다음으로 힘 벡터 F_j 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_j = F_j^f + F_j^t \tag{38a}$$

$$F_j^f = \int_{\Omega} N_j^T \bar{f} d\Omega \tag{38b}$$

$$F_j^t = \int_{\Gamma^*} N_j^T t ds \tag{38c}$$

힘 벡터 역시 웨이블릿 계수 벡터 U_j 와 마찬가지로 성분별로 분해된다.

$$F_j = \{s_j^{F_s}, s_j^{F_y}, (d_j^{F_{s,1}}, d_j^{F_{y,1}}, d_j^{F_{s,2}}, d_j^{F_{y,2}}, d_j^{F_{s,3}}, d_j^{F_{y,3}})\}^T = \{s_j^F, d_j^F\}^T \tag{39}$$

시스템 행렬과 힘 벡터는 식 (22)의 변환행렬 T_j 을 이용하여 다음과 같이 정의된 단일스케일로 구성된 시스템행렬 \widehat{K}_j , 힘 벡터 \widehat{F}_j 로부터 얻을 수 있다.

$$\widehat{K}_j = \int_{\Omega} (N_{j+1}^s)^T L^T C L N_{j+1}^s d\Omega \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_j &= \widehat{F}_j^f + \widehat{F}_j^i \\ &= \int_{\Omega} (N_{j+1}^s)^T f d\Omega + \int_{\Gamma_n^*} (N_{j+1}^s)^T t ds \end{aligned} \quad (41)$$

스케일 $j+1$ 의 스케일링 함수만으로 이루어진 단일스케일의 $(\widehat{K}_j, \widehat{F}_j)$ 와 웨이블릿 기반의 다중스케일 (K_j, F_j) 의 관계는 변환행렬 T_j 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$K_j = T_j^T \widehat{K}_j T_j \quad (42)$$

$$F_j = T_j^T \widehat{F}_j \quad (43)$$

다음 스케일 $j+2$ 에서의 해석을 위해서는 식 (30)의 웨이블릿 함수 행렬 N_j 에 Ψ_{j+1}^p ($p=1,2,3$)이 추가되어야 하며 이를 기반으로 구성된 시스템 행렬은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} K_{j+1} &= \begin{bmatrix} K_{j+1}^{s,s} & K_{j+1}^{s,d} \\ \text{sym} & K_{j+1}^{d,d} \end{bmatrix} \\ K_{j+1}^{s,s} &= K_j \\ K_{j+1}^{s,d} &= \begin{bmatrix} k_{j,j+1}^{s,d^1} & k_{j,j+1}^{s,d^2} & k_{j,j+1}^{s,d^3} \\ k_{j,j+1}^{d^1,d^1} & k_{j,j+1}^{d^1,d^2} & k_{j,j+1}^{d^1,d^3} \\ k_{j,j+1}^{d^2,d^1} & k_{j,j+1}^{d^2,d^2} & k_{j,j+1}^{d^2,d^3} \\ k_{j,j+1}^{d^3,d^1} & k_{j,j+1}^{d^3,d^2} & k_{j,j+1}^{d^3,d^3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_{j,j+1}^{s,d} \\ k_{j,j+1}^{d,d} \end{bmatrix} \\ K_{j+1}^{d,d} &= \begin{bmatrix} k_{j+1,j+1}^{d^1,d^1} & k_{j+1,j+1}^{d^1,d^2} & k_{j+1,j+1}^{d^1,d^3} \\ & k_{j+1,j+1}^{d^2,d^2} & k_{j+1,j+1}^{d^2,d^3} \\ \text{sym} & & k_{j+1,j+1}^{d^3,d^3} \end{bmatrix} \\ &= k_{j+1,j+1}^{d,d} \end{aligned}$$

만약 경계조건이 다중해상도로 표현되지 않고 최고의 해상도로 표현된 경우에는 높은 스케일의 시스템행렬 K_{j+1} 의 $K_{j+1}^{s,s}$ 는 항상 낮은 스케일

의 시스템 행렬에서 그대로 받아오고 $K_{j+1}^{s,d}, K_{j+1}^{d,d}$ 만을 새로 구성할 수 있게 된다. 그리고 적응해석법을 사용할 경우 높은 스케일의 웨이블릿이 선택적으로 추가되기 때문에 $K_{j+1}^{s,d}, K_{j+1}^{d,d}$ 의 계산이 많이 줄어든다. 이는 적응해석 수행시, 보다 정밀한 요소망을 구성함에 따라 시스템행렬을 완전 재구성해야만 하는 전통적인 유한요소해석과의 차이점 중 하나이다.

일반적인 다중스케일 해석에서 웨이블릿 계수 벡터와 힘 벡터는 다음의 형태를 띠는데 시스템

$$U_j = \{s_{j_0}, d_{j_0}, d_{j_0+1}, \dots, d_{j-1}, d_j\}^T \quad (44)$$

$$F_j = \{s_{j_0}^F, d_{j_0}^F, d_{j_0+1}^F, \dots, d_{j-1}^F, d_j^F\}^T \quad (45)$$

행렬 역시 이와 상응한 블록구조를 지닌다.

4. 균일한 절점들에 의한 경계표현

4.1 지그재그 경계근사와 변위 경계조건 부과 본 절에서는 식 (15a)와 같은 단일스케일의 웨이블릿 근사를 통해서 식 (27)의 해석에 필요한 경계의 표현과 경계조건의 부과에 대해서 살펴본다. 다중스케일 해석을 위한 시스템행렬 및 힘 벡터는 식 (42), (43)에 의해서 단일스케일의 시스템행렬, 힘 벡터로부터 표현될 수 있다.

가상영역 안에 놓여있는 관심영역 ω 는 균일하게 배치된 웨이블릿 절점들에 의해서 지그재그형태로 근사된다.

Fig. 4는 사분원의 관심영역 ω 가 웨이블릿 절점들에 의해서 지그재그의 경계를 지닌 ω_A 로 근사화된 모습을 보여준다. 근사화된 영역 ω_A 는 각각의 셀(유한요소해석 관점에서의 직사각형 요소) 내부에서 균일한 탄성텐서 C 를 지니게 되며 단일스케일의 시스템 행렬 \widehat{K}_j 와 힘 벡터 \widehat{F}_j 의 계산을 용이하게 한다. 경계를 지그재그로 근사화 할 때, 하나의 셀 내부에서 ω 가 차지하는 넓이가 $\Omega \setminus \omega$ 가 차지하는 넓이보다 크게 되면 그 셀은 ω_A 에 속하는 것으로 간주하고 그렇지 않으면 $\Omega \setminus \omega$ 에 속하는 것으로 근사화한다.

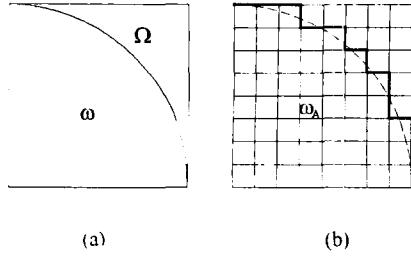


Fig. 4 (a) The package domain ω of a quarter circle and (b) its approximated domain ω_A by zigzags

근사화된 영역의 경계에 변위 경계조건을 부과하는 방법은 단일스케일 웨이블릿 계수벡터 \hat{U}_j 의 해당 원소들에 정해진 값을 부과하는 식으로 유한요소해석에 쓰이는 기술과 동일하다.(15) 일단 \hat{K}_j, \hat{F}_j 가 얻어지면 T_j 를 통한 변환을 이용하여 다중스케일 해석을 수행한다.

4.2 경계 인력의 근사

Fig. 5와 같이 경계 Γ_ω^h 에서 인력을 받고 있는 경우는 먼저 원 영역의 경계 Γ_ω^h 를 $\Gamma_{\omega_A}^h$ 로 지그재그 근사화 시킨 후 인력 $t(s)$ 를 다음 식을 이용하여 근사시킨다.

$$F_j^t = \int_{\Gamma_\omega^h} N_j^T t(s) ds \tag{46}$$

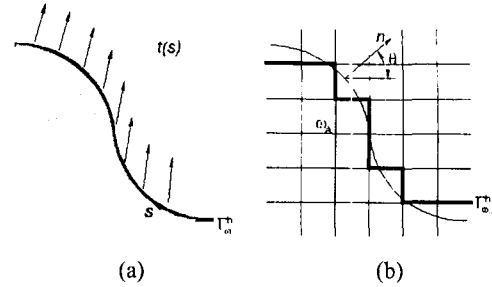
$$= \int_{\Gamma_\omega^h} N_j^T (t(s) \sin \theta dx + t(s) \cos \theta dy)$$

$$\approx \int_{\Gamma_{\omega_A}^h} N_j^T (t_A^V(x) dx + t_A^H(y) dy)$$

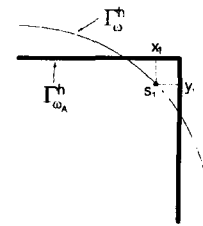
$$t_A^V(x) = t(s) \sin \theta \tag{47}$$

$$t_A^H(y) = t(s) \cos \theta \tag{48}$$

식 (46)에서 s 는 경계를 따라가는 좌표이고 θ 는 수평에서 경계의 단위수직벡터까지의 각도를 의미한다. Fig 5(c)의 예에서 알 수 있듯이 식 (47), (48)을 이용한 인력의 근사는 원 경계의 경계좌표 s 의 근사된 경계로의 수평, 수직방향으로의 투영을 통해서 이루어진다.



(a) (b)



(c)

Fig. 5 (a) A general boundary under a surface traction, (b) its zigzag approximation and (c) the relationship between s on Γ_ω^h and (x, y) on $\Gamma_{\omega_A}^h$

5. 적응 해석

다중스케일 해석에서 웨이블릿의 계수들은 낮은 스케일의 해와 높은 스케일의 해 사이의 차이를 의미한다. 이러한 웨이블릿의 특성은 계수 그 자체가 오차의 크기를 나타내므로 유한요소해석의 적응 해석 시 요구되는 응력회복과 오차추정 등의 수치비용이 필요없다. 이런 웨이블릿의 특성을 이용한 효과적인 적응 해석 기법은 해석 시간을 급격히 단축시키는 웨이블릿 기반 다중스케일 해석의 핵심이라고 할 수 있다.

최근 이러한 웨이블릿을 이용한 적응 해석의 연구가 활발하게 이루어져 왔으며 Dahmen 등⁽¹⁶⁾에 의해서 그 이론이 수학적으로 정리되었다. 그러나 대부분의 연구가 직교 웨이블릿에 한정되었으며 본 논문에서 이용한 선형 보간웨이블릿에 대한 적응 해석 이론 연구는 미진하다.

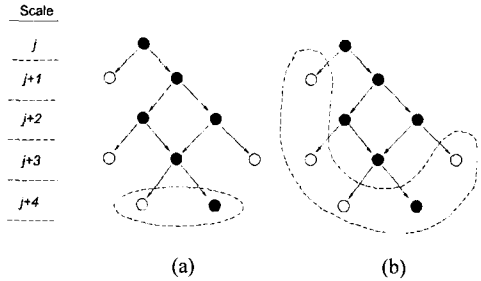


Fig. 6 The adaptive schemes : (a) consider only the finest wavelets, (b) consider leaf wavelets

본 논문에서는 두 개의 문턱값 ξ_u, ξ_l ($\xi_u > \xi_l > 0$)을 이용해서 적응 해석을 수행하는 적교 웨이블릿의 적응해석 기법의 큰 틀을 그대로 유지하면서 보다 직관적인 방법을 제안하고자 한다.

임의의 스케일 j 에서 해석이 수행된 후 다음으로 높은 스케일 $j+1$ 의 해석을 위한 기저 웨이블릿 $\psi_{j+1,k,l}^p$ 을 선택하는 방법은 다음의 단계를 거친다.

- 계수 $d_{j,k,l}^p$ 이 ξ_l 보다 작으면 $\psi_{j,k,l}^p$ 을 기저에서 제외한다.
- 계수 $d_{j,k,l}^p$ 이 ξ_u 보다 크면 $\psi_{j,k,l}^p$ 의 근처에 $j+1$ 스케일의 자식 웨이블릿들을 기저에 추가한다.
- $\xi_l < d_{j,k,l}^p < \xi_u$ 이면 $\psi_{j,k,l}^p$ 을 기저에 보존한다.

문턱값은 해상도 j 가 한 단계 증가할 때마다 절반씩 줄어든다. 본 논문의 예제에서는 문턱값 ξ_u, ξ_l 로서 가장 낮은 해상도의 스케일링 함수의 계수값 중 최대값의 1%, 0.01%를 취했다.

Fig. 6은 본 논문에서 고려한 두가지 적응 해석 기법을 일차원 해석에 적용한 예를 나타낸 그림이다. 그림에서 원들은 웨이블릿 계수들을 의미하고 검정색은 ξ_u 보다 큰 계수들이며 흰색은 ξ_l 보다 작은 계수, 회색은 그 중간값의 계수를 나타낸다.

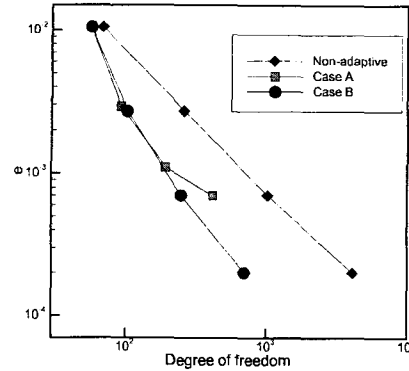


Fig. 7 Comparison of L^2 error norm by different adaptive schemes

Fig. 6(a)의 경우 현 단계인 $j+4$ 의 해석을 수행한 후 오직 현 단계에서 가장 높은 해상도의 웨이블릿들만 ξ_u, ξ_l 과 비교하여 다음 스케일 $j+5$ 를 위한 기저들을 선택한다. 이런 방식으로 적응 해석을 수행할 때 야기되는 문제는 웨이블릿 계수가 ξ_u 보다 작은 값을 가져서 그 근방에 자식 웨이블릿을 지니지 못한 웨이블릿은 보다 높은 해상도에서도 계속 근방에 기저를 추가시키지 못한다는 점이다.

이러한 단점을 보완하기 위해서 Fig 6(b)의 방법은 다음 단계의 기저를 선택할 때 자식을 지니지 않은 모든 웨이블릿들(leaf wavelets)을 고려한다.

6. 수치 예제

6.1 정사각형 영역의 푸와송 문제

웨이블릿-갤러킨 방법의 탄성문제의 적용에 앞서 5절에서 설명한 두가지 적응해석의 효율성을 검증하기 위하여 엄밀해가 있는 포와송 방정식을 다뤄보기로 한다.

해석할 문제는 영역 $[0, 2] \times [0, 2]$ 에서 정의되고 경계에서 모두 Dirichlet 조건을 지닌다.

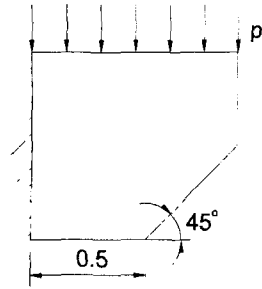


Fig. 8 Short cantilever beam under uniform pressure

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = f \tag{49a}$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\omega \tag{49b}$$

식 (49a)에서 물성치 $k=1$ 로 정하고 해가 비교적 급격한 거동을 보이는 $e^{-30\{(x-1)^2+(y-1)^2\}}$ 의 값을 지니도록 f 를 부과하였다.

Fig. 7은 해석결과와 엄밀해 사이의 오차를 L^2 norm으로 계산해서 비교한 그래프이다. 5절에서 설명한 적응해석 방법 중 Fig. 6(a)에 해당하는 방법을 Case A, Fig. 6(b)의 방법을 Case B로 표기하였다.

Fig. 7에서 알 수 있듯이 영역전체를 균일하게 분할해 가는 방법에 비해 웨이블릿을 이용한 적응해석 방법들이 전체 자유도의 증가에 따른 효율적인 오차 감소 양상을 보인다. 또한 Case A를 이용한 방법은 자유도가 증가함에 따라 오차 감소양상의 둔화를 보이는데 이는 5절에서 설명했듯이 한번 자식 웨이블릿을 지니지 못하면 그 웨이블릿의 주변에는 다른 웨이블릿이 발생하지 않는다는 문제에서 비롯되기 때문이다. 이 절의 남은 예제에는 모두 Case B에 의한 적응해석을 수행하였다.

6.2 압축하중을 받는 짧은 외팔보 해석

웨이블릿-갤러킨 방법을 Fig. 8의 문제에 적용시켜보기로 한다. 길이 1의 정사각 영역(탄성계수 $E=2e8$, 프와송비 $\nu=0.3$)이 왼쪽은 고정되어 있고 위쪽 면이 압축 압력 $p=1000$ 을 받고 있는 상태이다. 오른쪽 아래 모서리가 잘려나간 상태를 표현하기 위해서 앞에서 설명한 가상영역법을

Table 1 The error energy norm by non-adaptive and adaptive schemes

J	Non-adaptive		Adaptive	
	DOF	$\ e\ $	DOF	$\ e\ $
3	148	0.0123	143	0.0123
4	512	0.0076	343	0.0079
5	1912	0.0046	695	0.0051
6	7400	0.0028	1068	0.0035

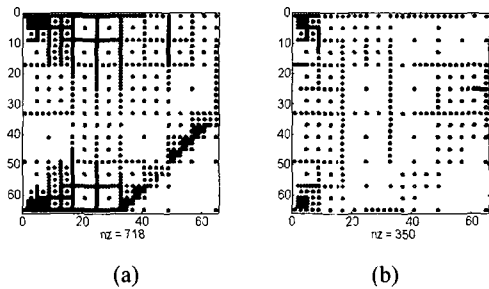


Fig. 9 The location of the interpolation points at resolution level J=6 by the adaptive scheme for the (a) horizontal displacement and (b) vertical displacement

사용한다.

해석 후 정확도를 검증하기 위해서 적응해석을 하지 않을 경우와 할 경우의 오차의 에너지 norm을 Table 1에 비교하였다. 오차의 에너지 norm의 계산은 다중스케일의 해를 싱글스케일로 변환한 후 일반 유한요소로 인한 적응해석 수행 시 쓰이는 응력회복 기법(17)을 사용하였다. Table 1의 결과는 웨이블릿-갤러킨 방법의 적응해석에 의한 효율적인 오차 감소 양상을 잘 보여준다.

Fig. 9는 적응 해석에 사용된 웨이블릿들의 위치를 나타낸 그림이다. 유한 요소 해석과는 달리 요소에 대한 개념이 없으므로 x 방향 변위의 기저를 이루는 웨이블릿들과 y 방향 변위를 위한 웨이블릿들은 각기 다르게 선택된다는 장점이 있다. 왼쪽 벽면에 고정된 모서리 부위가 특이 지점이므로 이 곳에서는 많은 웨이블릿들이 요구된다는 것을 알 수 있다.

주의할 점은 각각의 점들에 위치한 웨이블릿들의 스케일이 모두 다르다는 것이다. 즉 Fig. 2의 그림들에서 알 수 있듯이 낮은 해상도 J에서 사

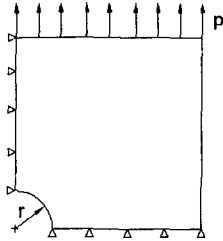


Fig. 10 A domain with a hole under tensile load

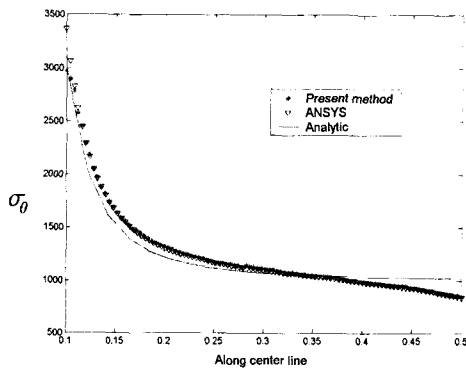


Fig. 11 Stress distribution along bottom edge of the domain illustrated in Fig. 10 (Resolution level J=7 with 3,671 degrees of freedom)

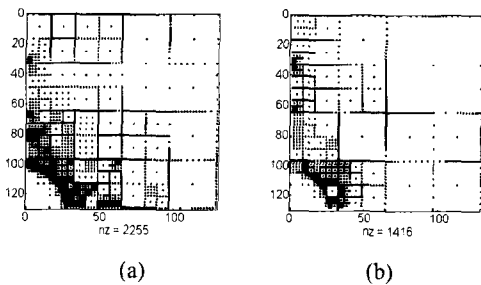


Fig. 12 The location of the interpolation points at resolution level J=7 by the adaptive scheme: (a) horizontal displacement and (b) vertical displacement

용된 웨이블렛들은 높은 해상도에서 쓰인 웨이블렛들에 비해서 넓은 기반을 가진다.

Fig. 9를 살펴보면 가상영역 Ω/ω 에 중심이 위

치한 웨이블렛들도 보이는데 이 웨이블렛들은 관심영역 ω 에 그 기반이 걸쳐있는 웨이블렛들로 해의 거동에 영향을 미친다.

6.3 원형 구멍에 의한 응력 집중 현상의 해석

Fig. 10은 원형 구멍에 의한 응력 집중 현상 해석하기 위해서 대칭을 고려해 사분의 일 영역을 도식한 것이다. 길이 0.5의 정사각 영역에 반지름 $r=0.1$ 의 구멍이 왼쪽 하단에 뚫려 있고 윗변에 균일한 분포하중 $p=1000$ 을 받고 있다. 왼쪽 변과 아래 변은 대칭 경계조건을 설정한다.

무한 탄성체에서는 맨 아래 변의 구멍에 닿아 있는 지점이 분포하중 p 의 3배의 응력을 p 방향과 같은 방향으로 받게 되어 응력 집중 지점이 된다.

Fig. 11은 해석 후 p 방향 응력을 Fig. 10 영역의 아랫변을 따라서 표시한 결과를 무한 탄성체에서의 엄밀해, ANSYS의 수렴된 결과 (PLANE42 요소 12,053개 사용)와 비교한 그림이다. 해의 전체거동은 ANSYS 결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

적용 해석에 사용된 웨이블렛들의 위치는 Fig. 12에 나타내었다. 앞 예제에서와 마찬가지로 가상영역 Ω/ω 에 중심이 있지만 관심영역 ω 에 기반이 걸쳐있는 웨이블렛들은 해석에 사용되었고 구멍근처 응력 집중 현상 때문에 구멍 부근에 많은 웨이블렛들이 위치하고 있음을 알 수 있다.

7. 결론

일반 형상을 갖는 2차원 영역에 대한 새로운 멀티스케일 웨이블렛-갤러킨 기법을 정식화하였다. 보간 웨이블렛을 사용함으로써, 일반 경계에서 Dirichlet 경계조건을 페널티나 라그랑지 승수 없이도 쉽게 부가할 수 있었을 뿐 아니라, Neumann 경계조건도 가상영역법으로 처리할 수 있었다. 또한 기존의 유사 웨이블렛기법과는 달리, 본 기법은 완전한 다중해상도 수치해석을 가능하게 하기 때문에 적응해석도 매우 효과적으로 수행된다는 사실도 입증하였다. 특히 응력이 집중하는 부위에 여러 스케일에 해당되는 보간 웨이블렛이 적응적으로 집중 배치되는 등, 본 연구의 수치적 우수성과 잠재가능성을 확인하였다.

또한 본 연구에서 제안하는 새로운 멀티스케일 수치해석 기법은 멀티스케일 최적설계기법(18)의 효율성을 크게 증대시킬 수 있는 중요한 수치기법으로 기대된다.

후 기

본 연구는 학술진흥재단(과제번호 KRF-2000-E00021)의 지원을 받아서 수행한 결과이며, 저자들은 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Andersson, L., Hall, N., Jawerth, B. and Peters, G., 1993, "Wavelets on Closed Subsets of the Real Line," In: L. L. Schumaker and G. Webb, eds., *Topics in the Theory and Applications of Wavelets*. Academic Press, Boston, MA, pp. 1~14.
- (2) Monasse, P. and Perrier, V., 1998, "Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions," *SIAM J. MATH. ANAL.* Vol. 29. No. 4, pp. 1040~1065.
- (3) Glowinski, R., Rieder, A., Wells, R. O. Jr and Zhou, X., 1993, "A Wavelet Multi-grid Preconditioner for Dirichlet Boundary Value Problems in General Domain," Technical Report, Computational Mathematics Lab, TR93-06, Rice University.
- (4) Wells, R. O. Jr and Zhou, X., 1993, "Wavelet Solutions for the Dirichlet Problem," Technical Report, Computational Mathematics Lab, Rice University.
- (5) Glowinski, R., Pan, T. W., Wells, R. O. Jr and Zhou, X., 1994, "Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains," Technical Report, Computational Mathematics Lab, Rice University.
- (6) DeRose, G. Jr, 1998, "Solving Topology Optimization Problems Using Wavelet-Galerkin Techniques," PhD Thesis, Michigan State University.
- (7) Diaz, A. R., 1999, "A Wavelet-Galerkin Scheme for Analysis of Large-Scale Problems on Simple Domains," *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 44, pp. 1599~1616.
- (8) Latto, A., Resnikoff, H. K., Tenenbaum, E., 1991, "The Evaluation of Connection Coefficients of Compactly Supported Wavelets," *In Proceedings of the USA-French Workshop on Wavelets and Turbulence*, Princeton University.
- (9) Kim, Y. Y. and Jang, G. W., "Interpolation Wavelet-based Multi-Scale Galerkin Method for Thin-Walled Box Beam Analysis," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, to appear (2002).
- (10) Bertoluzza, S. and Naldi, G., 1996, "A Wavelet Collocation Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations," *Appl. Comput. Harmon. Ana.* Vol. 3, pp. 1~9.
- (11) Bertoluzza, S., 1997, "An Adaptive Collocation Method Based on Interpolating Wavelets," In: W. Dahmen, A.J. Kurdila and P. Oswald, eds., *Multiscale Wavelet Methods for PDEs*. Academic Press, San Diego, pp. 109~135.
- (12) 김윤영, 김재은, 2000, "수정된 보간 웨이블릿을 이용한 적응 웨이블릿-콜로케이션 기법," *대한기계학회논문집 A권 제24권 제8호*, pp. 2100~2107.
- (13) Christon, M. A., Trucano, T. G., Weatherby, J. R., Baty, R. S., Burns, S. P., Roach, D. W., Womble, D. E. and Voth, T. E., 1998, "An Investigation of Wavelet Bases for Grid-Based Multi-Scale Simulations - Final Report," Technical Report, SAND 98-2456, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico.
- (14) Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press.
- (15) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1994, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, England, 4th ed.
- (16) Dahmen, W., 2001, "Wavelet Methods for PDEs - Some Recent Developments," *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol. 128, pp. 133~185.
- (17) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part I: the Recovery Technique,"

Int. J. Numer. Mech. Engng. Vol. 33, pp. 1331~1364.
(18) Kim, Y. Y. and Yoon, G. H., 2000, "Multi-

resolution, Multi-scale Topology Optimization - A New Paradigm," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 37, pp. 5229~5559.