

혼합 체적-경계 적분방정식법을 이용한 탄성해석 방법 개발

이정기[†] · 허강일^{*} · 진원재^{**}
(2001년 9월 28일 접수, 2002년 1월 21일 심사완료)

Development of an Elastic Analysis Technique Using the Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method

Jung-Ki Lee, Kang-Il Heo and Won-Jae Jin

Key Words: Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method(혼합 체적-경계 적분방정식법), Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계요소법), Inclusions(함유체), Voids(공동), Cracks(균열), Stress Intensity Factor(응력확대계수)

Abstract

A Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method is applied for the effective analysis of elastic wave scattering problems and plane elastostatic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions and voids or isotropic inclusions. It should be noted that this newly developed numerical method does not require the Green's function for anisotropic inclusions to solve this class of problems since only Green's function for the unbounded isotropic matrix is involved in their formulation for the analysis. This new method can also be applied to general two-dimensional elastodynamic and elastostatic problems with arbitrary shapes and number of anisotropic inclusions and voids or isotropic inclusions. In the formulation of this method, the continuity condition at each interface is automatically satisfied, and in contrast to finite element methods, where the full domain needs to be discretized, this method requires discretization of the inclusions only. Finally, this method takes full advantage of the pre- and post-processing capabilities developed in FEM and BIEM. Through the analysis of plane elastostatic problems in unbounded isotropic matrix with orthotropic inclusions and voids or isotropic inclusions, and the analysis of plane wave scattering problems in unbounded isotropic matrix with isotropic inclusions and voids, it will be established that this new method is very accurate and effective for solving plane wave scattering problems and plane elastic problems in unbounded solids containing general anisotropic inclusions and voids/cracks or isotropic inclusions.

1. 서론

본 논문에서는 서로 상호작용을 하는 다수의

등방성 함유체, 이방성 함유체^(1,4,11) 및 공동을 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변형, 변형률 및 응력분포 해석과 이들 등방성 함유체, 이방성 함유체 및 공동에 의한 탄성파의 산란문제 해석을 효과적으로 수행할 수 있는 혼합 체적-경계 적분방정식법(Mixed Volume and Boundary Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 소개하고, 이 새로운 수치해석 방법을 적용하여 구한 해의 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여 체적 적분방정식법 및 경계요소법에 의한 해와 비교한다.

본 논문에서는 비교적 간단한 형태의 이방성을

[†] 책임저자, 회원, 홍익대학교 기계정보공학과

E-mail : inq3jkl@wow.hongik.ac.kr

TEL : (041)860-2619 FAX : (041)866-9129

^{*} 홍익대학교 대학원 기계설계학과

^{**} 홍익대학교 대학원 기계설계학과

나타내는 직교 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체가 등방성 무한기지에 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 탄성정역학 응력해석과 등방성 함유체 및 공동이 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 탄성과 산란문제 해석을 통하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법이 일반적인 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성정역학 해석 및 탄성과 산란문제 해석에 효과적인 수치해석 방법임을 입증하도록 한다.

또한, 본 논문에서 얻어진 연구결과를 바탕으로 하여, 등방성 함유체, 이방성 함유체 및 균열 또는 공동이 등방성 무한기지에 포함된 무한고체가 정적 및 동적 무한하중을 받을 때 균열선단에서의 정적 및 동적 응력확대계수를 구하는 연구를 계속해서 수행하고자 한다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 x축에 평행하게 전파하는 평면 시간-조화 탄성파가 입사할 때 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체에 의하여 산란현상이 발생하는 일반적인 탄성동역학 문제를 나타낸다. Fig. 2는 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $\rho^{(1)}$ 과 $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 밀도와 탄성상수를 나타내고, $\rho^{(2)}$ 와 $c_{ijkl}^{(2)}$ 는 기지의 밀도와 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

$e^{-i\alpha t} u_m^o(\mathbf{x}, \omega)$ 를 입사파의 변위 벡터의 m성분이라고 하고, 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위 벡터의 m성분을 $e^{-i\alpha t} u_m(\mathbf{x}, \omega)$ 라고 한다. 여기서 ω 는 파형의 각 주파수(angular frequency)를 나타내고, 공통적인 시간인자 $e^{-i\alpha t}$ 의 표시는 생략하기로 한다.

Mai과 Knopoff⁽¹⁰⁾는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) + \int_V [\delta\rho\omega^2 g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_i(\boldsymbol{\xi}) - \delta c_{ijk} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ 이고 $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 각각 함유체와 기지 사이의 밀도와 탄성상수의 차이를 나타낸다. $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})e^{-i\alpha t}$ 은 등방성 무한기지에서 Green 함수이다. 즉, $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})e^{-i\alpha t}$ 은 등방성 무한기지의 \mathbf{x} 에서 m방향으로 작용하는 단위 집중하중 $\mathbf{e}_m e^{-i\alpha t}$ 때문에 $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합 의 규약과 쉼표 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 $\boldsymbol{\xi}_i$ 에 관해서 행해진다. 여기서, $\delta\rho$ 와 δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법

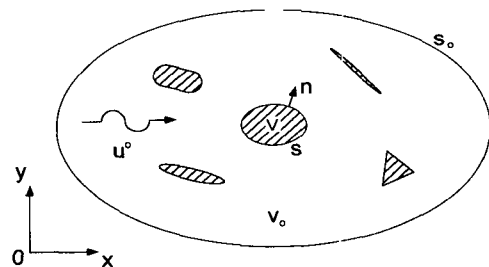


Fig. 1 Geometry of the general elastodynamic problem

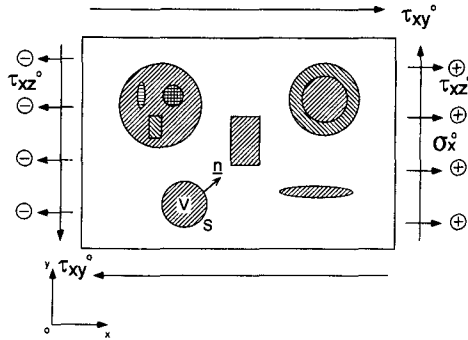


Fig. 2 Geometry of the general elastostatic problem

으로 결정하는 체적 적분방정식법이 이 정기와 Mal^(5,6)에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $u(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형을 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 산란파의 변위 및 응력은 식 (1)의 적분값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다.

Fig. 2에 있는 탄성정역학 문제해석의 경우는 파형의 주파수가 0인 극한 경우의 탄성동역학 문제로 수식화할 수 있으며, 함유체를 포함하는 무한고체의 임의의 위치에서의 변위벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식을 만족함을 알 수 있다.^(5,6)

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (2)$$

식 (2)에서, $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며, 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다.

$g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서 탄성정역학 Green 함수(또는 Kelvin의 해)이다.

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 이 정기와 Mal^(5,6)에 잘 나타나 있다.

일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우

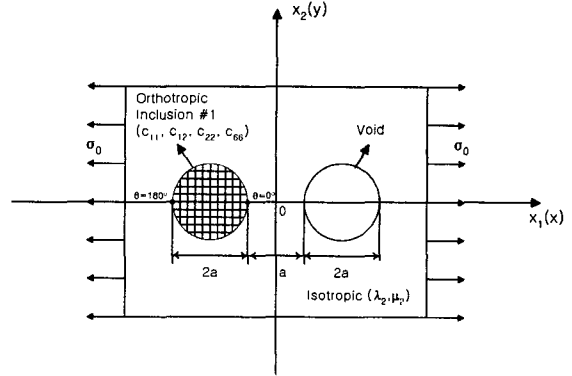


Fig. 3 An orthotropic cylindrical inclusion and a cylindrical void in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

어려운 것으로 알려져 있다.⁽⁹⁾ 식 (1), (2)에서 $g_{i,j}^m$ 은 등방성 무한기지에서 탄성동역학 및 탄성정역학 Green 함수이므로, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

3. 혼합 체적-경계 적분방정식법

3.1 탄성정역학 해석

3.1.1 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 3에 있는 직교 이방성 함유체(orthotropic #1)와 공동(hole)이 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형을 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 이 경우는 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 공동에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.⁽²⁾ 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 공동에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있기 때문이다.

식 (1)을 응용하면, 직교 이방성 함유체와 공동
을 포함하는 무한고체에 대하여 혼합 체적-경계
적분방정식을

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^{m(2)}(\xi, \mathbf{x}) u_{i,j}(\xi) d\xi + \int_S c_{ijkl}^{(2)} g_{k,l}^{m(2)} u_{i,j} n_j dS \quad (3)$$

로 표시할 수 있다.^(8,12) 여기서, $u_m(\mathbf{x})$ 는 고체의
임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고, V 는 직
교 이방성 함유체의 체적을 나타내며 S 는 공동의
경계면을 나타낸다. \mathbf{n} 은 S 에서의 바깥쪽 법선방
향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (2)는 등방성 기지에
대한 양(quantity)을 나타낸다.

Fig. 4는 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용
되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이
방성 함유체는 144개의 표준의 8-절점 사각형 및
6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고,
공동의 경계면은 80개의 2차 경계요소를 사용하
여 분할하였다.

이때, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)
과 공동의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대
한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} [E]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [F]_{[(m+n) \times (m+n)]} \\ [G]_{[(m+n) \times (m+n)]} & [H]_{[(m+n) \times (m+n)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$[E]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$[F]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$[G]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [VV]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [BB]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4c)$$

$$[H]_{[(m+n) \times (m+n)]} = \begin{bmatrix} [[VV]-[I]]_{(m \times m)} & [VB]_{(m \times n)} \\ [BV]_{(n \times m)} & [[BB]-\frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \end{bmatrix} \quad (4d)$$

을 나타내고, m 은 직교 이방성 함유체에서의
절점수를, 그리고 n 은 공동의 경계면(S)에서의
절점수를 나타내며, Fig. 4에 있는 모델에서
 $m = 433$ 이고 $n = 160$ 이다. $[VV]$ 는 직교 이
방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을,
 $[VB]$ 는 직교 이방성 함유체와 공동의 경계면
과의 상호 작용을, $[BV]$ 는 공동의 경계면과
직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고
 $[BB]$

는 공동의 경계면에서의 상호 작용을 포함하는
행렬(matrix)들을 각각 나타낸다.

따라서, 식 (4)로부터 직교 이방성 함유체 내부
에서의 변위 및 공동의 경계면에서의 변위를 구
할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서
의 변형률과 응력도 결정할 수 있다. 그 외의 모
든 곳에서의 변위 및 응력은 식 (3)의 적분 값을
구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치해석 방법의
정확도를 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체

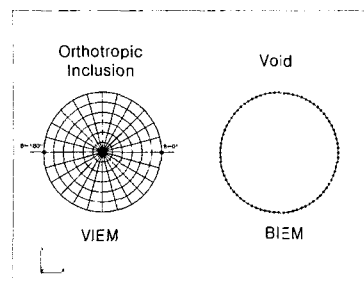


Fig. 4 A typical discretized model in the mixed volume and boundary integral equation method

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the orthotropic inclusion for the elastostatic problems

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Isotropic	Orthotropic #1
λ	67.34	176.06	-
μ	37.88	176.06	-
c_{11}	143.10	528.18	279.08
c_{12}	67.34	176.06	7.80
c_{22}	143.10	528.18	30.56
c_{66}	37.88	176.06	11.80

및 공동 모두에 체적 적분방정식법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 해와 비교 검토해 보았다.

직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체 #1(orthotropic #1)의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 크다.⁽³⁾ Fig. 5는 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다.

Fig. 6은 혼합 체적-경계 적분방정식법과 체적 적분방정식법을 사용했을 때, 직교 이방성 함유체(orthotropic #1)와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분 ($\frac{\sigma_x}{\sigma_x^0}$)에 대한 비교를 나타낸다 ($\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$). 두 가지 수치해석 방법들의 해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

3.1.2 등방성 기지에 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체가 포함되어 있는 무한고체의 탄성해석

Fig. 7에 있는 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 등방성 함유체($\lambda = \mu = 176.06$ GPa)가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한

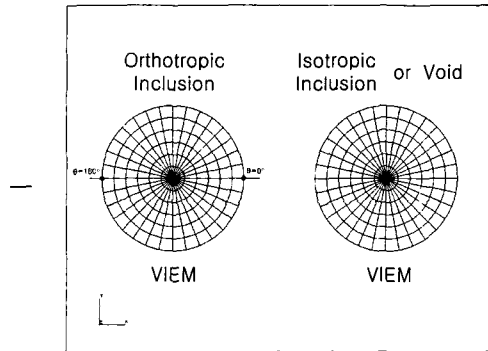


Fig. 5 A typical discretized model in the volume integral equation method

인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.(Table 1)

이 경우는 직교 이방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 등방성 함유체에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.⁽²⁾ 왜냐하면, 직교 이방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 직교 이방성 재료에 대한 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있고, 등방성 함유체에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있기 때문이다.

직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의 바깥면에 (S_+)에서의 혼합 체적-경계 적분방정식은

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0 - \int_V \delta c_{ijkl} g_{k,l}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + c_{ijkl} \int_{S_+} [g_{k,l}^m u_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) - g_i^m u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] n_j dS$$

로 표시되며, 반면에 등방성 함유체 안쪽면 (S_-)에서는

$$u_m(\mathbf{x}) = - c_{ijkl} \int_{S_-} [g_{k,l}^m u_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) - g_i^m u_{k,l}(\boldsymbol{\xi})] n_j dS$$

로 표시된다.

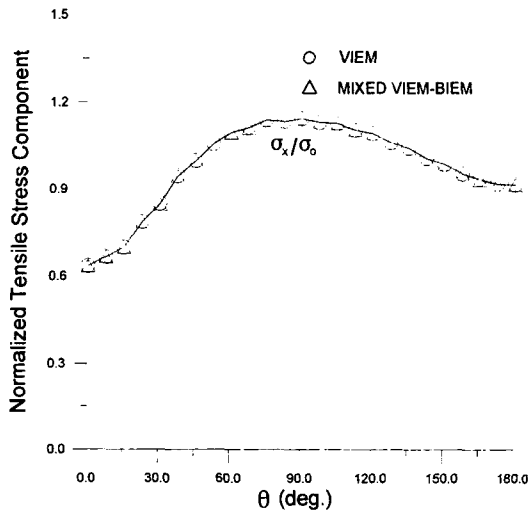
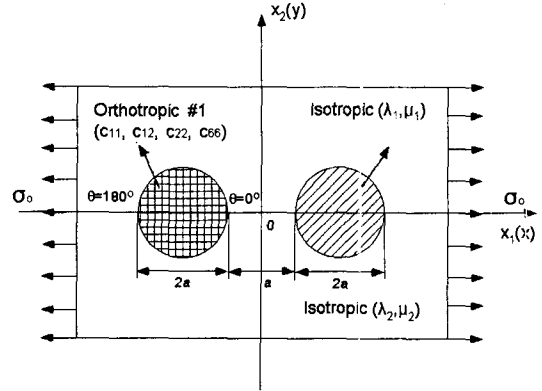
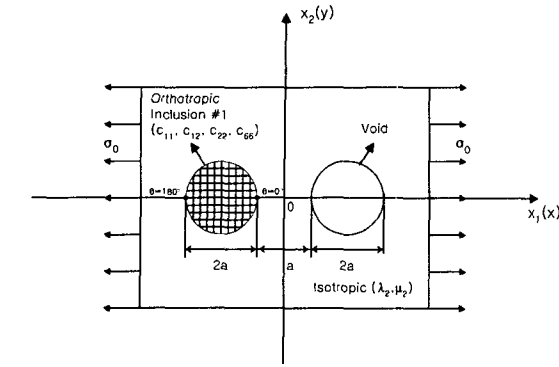


Fig. 6 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_0) at the interface between the orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

Fig. 4는 혼합 체적-경계 적분방정식법에 사용되어진 대표적인 분할된 모델의 예이다. 직교 이방성 함유체는 144개의 표준의 8-node 사각형 및 6-node 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 등방성 함유체의 경계면은 80개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다. 등방성 함유체의 경계면에서 연속성 조건을 적용하고, 분할하게 되면, 직교 이방성 함유체의 분할된 절점(node)에서의

Fig. 7 An orthotropic cylindrical inclusion and an isotropic cylindrical inclusion in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

변위와 등방성 함유체의 경계면의 절점(node)에서의 변위와 표면력 벡터에 대한 선형 연립방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} [E] & [F] \\ [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\}_{(m)} \\ \{u_1\}_{(n)} \\ \{T_1\}_{(n)} \\ \{u_2\}_{(m)} \\ \{u_2\}_{(n)} \\ \{T_2\}_{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{u_1^0\}_{(m)} \\ -\{u_1^0\}_{(n)} \\ \{0\}_{(n)} \\ -\{u_2^0\}_{(m)} \\ -\{u_2^0\}_{(n)} \\ \{0\}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$[E]_{[(m+2n) \times (m+2n)]} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

이때,

$$\begin{aligned} E_{11} &= [[VV] - [I]]_{(m \times m)} \\ E_{12} &= [VB_{[M]}]_{(m \times n)} \\ E_{13} &= [VB_{[M]}]_{(m \times n)} \\ E_{21} &= [BV_{[M]}]_{(n \times m)} \\ E_{22} &= [[BB_{[M]}] - \frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \\ E_{23} &= [BB_{[M]}]_{(n \times n)} \\ E_{31} &= [0]_{(n \times m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{32} &= [[BB_{[I]}] - \frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \\
 E_{33} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 [F]_{[(m+2n) \times (m+2n)]} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (7b)
 \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= [VV]_{(m \times m)} \\
 F_{12} &= [VB_{[M]}]_{(m \times n)} \\
 F_{13} &= [VB_{[I]}]_{(m \times n)} \\
 F_{21} &= [BV_{[M]}]_{(n \times m)} \\
 F_{22} &= [BB_{[M]}]_{(n \times n)} \\
 F_{23} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 F_{31} &= [0]_{(n \times m)} \\
 F_{32} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 F_{33} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)}
 \end{aligned}$$

$$[G]_{[(m+2n) \times (m+2n)]} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad (7c)$$

이때,

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= [VV]_{(m \times m)} \\
 G_{12} &= [VB_{[M]}]_{(m \times n)} \\
 G_{13} &= [VB_{[I]}]_{(m \times n)} \\
 G_{21} &= [BV_{[M]}]_{(n \times m)} \\
 G_{22} &= [BB_{[M]}]_{(n \times n)} \\
 G_{23} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 G_{31} &= [0]_{(n \times m)} \\
 G_{32} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 G_{33} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)}
 \end{aligned}$$

$$[H]_{[(m+2n) \times (m+2n)]} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \quad (7d)$$

이때,

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= [[VV] - [I]]_{(m \times m)} \\
 H_{12} &= [VB_{[M]}]_{(m \times n)} \\
 H_{13} &= [VB_{[I]}]_{(m \times n)} \\
 H_{21} &= [BV_{[M]}]_{(n \times m)} \\
 H_{22} &= [[BB_{[M]}] - \frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \\
 H_{23} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)} \\
 H_{31} &= [0]_{(n \times m)} \\
 H_{32} &= [[BB_{[I]}] - \frac{1}{2}[I]]_{(n \times n)} \\
 H_{33} &= [BB_{[I]}]_{(n \times n)}
 \end{aligned}$$

으로 나타난다. 여기서, $[m+2n]$ = 직교 이방성 함유체의 절점(node) 수 $[m]$ + 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)에서의 절점수 $[n]$ + 등방성 함유체의 안쪽 경계면 (S_-)에서의 절점수 $[n]$ 를 나타낸다. $[VV]$ 는 직교 이방성 함유체 내부에서의 상호작용(interaction)을, $[VB_{[M]}]$ 는 직교 이방성 함유체와 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)과의 상호 작용을, $[BV_{[M]}]$ 는 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)과 직교 이방성 함유체와의 상호작용을, 그리고 $[BB_{[M]}]$ 은 등방성 함유체의 바깥 경계면 (S_+)에서의 상호 작용을, $[BB_{[I]}]$ 는 등방성 함유체의 안쪽 경계면 (S_-)에서의 상호 작용을 포함하는 행렬(matrix)들을 나타낸다.

따라서, 식 (7)로부터 직교 이방성 함유체 내부에서의 변위 및 등방성 함유체 경계면에서의 변위와 표면력 벡터 (traction vector)를 구할 수 있고, 또한, 직교 이방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정될 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변형, 변형률 및 응력은 식 (5), (6)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치해석 방법의 정확도를 조사하기 위하여, 직교 이방성 함유체 및 등방성 함유체 모두에 체적 적분방정식법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법을 사용하여 구한 해와 비교 검토해 보았다.

Fig. 5는 체적 적분방정식법에 사용되어진 대표

적인 분할된 모델의 예이다. Fig. 8은 혼합 체적-경계 적분방정식법과 체적 적분방정식법을 사용했을 때, 직교 이방성 함유체(Orthotropic #1)와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분 ($\frac{\sigma_x}{\sigma_0}$)에 대한 비교를 나타낸다 ($\theta = 0^\circ \sim 180^\circ$). 두 가지 수치해석 방법들의 해가 서로 잘 일치됨을 알 수 있다.

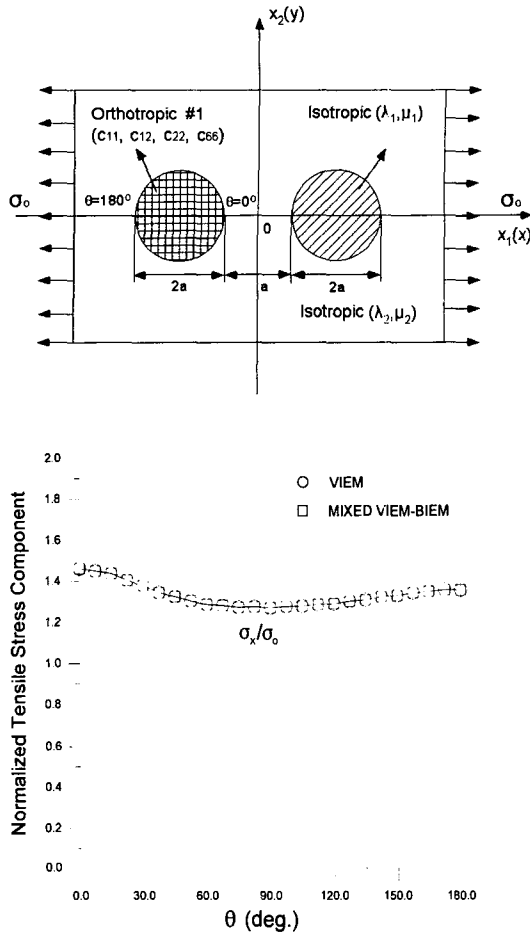


Fig. 8 Normalized tensile stress component (σ_x/σ_0^0) at the interface between the orthotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

3.2 탄성과 산란문제 해석

3.2.1 등방성 기지에 등방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한고체에서의 P파의 산란문제 해석

우선, Fig. 9에 있는 등방성 함유체와 공동이 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 P파(종파) 산란문제 해석을, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해본다. 함유체의 중심으로부터 공동의 중심까지의 거리(d)는 함유체의 반지름(a)의 3 배이다. 여기서, 파가 $x(x_1)$ 축에 평행하게 진행할 때, 입자가 $x(x_1)$ 방향으로 운동하는 파를 P파(종파)라고 한다.

x축의 양의 방향을 따라 진행하는 P 입사파의 형태를 다음과 같이 가정하여 산란문제 해석을 수행하였다.

$$u_1^o = \frac{e^{ik_1x}}{ik_1} \quad (8)$$

여기서, k_1 는 등방성 무한기지에서 P파의 파수이다. 등방성 무한기지에서 SV파(횡파)의 파수를 k_2 라고 할 때, $k_2 a = 2.0, 4.0$ 에 해당하는 주파수를 갖는 P 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다. 문제해석에 사용된 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 2에 나타나 있다.

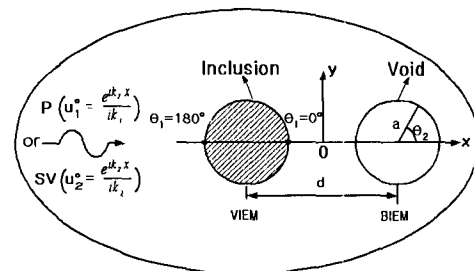


Fig. 9 P and SV waves interaction with an isotropic cylindrical inclusion and a cylindrical void in the mixed volume and boundary integral equation method

Table 2 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic inclusion for the elastodynamic problems

	Isotropic Matrix	Isotropic Inclusion
ρ [g/cm ³]	4.54	3.18
λ (GPa)	78.78	96.90
μ (GPa)	45.91	188.10

이 경우는 등방성 함유체에 대하여는 체적 적분방정식법을 적용하고, 공동에 대하여는 경계요소법을 적용하는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다. 왜냐하면, 등방성 함유체에 체적 적분방정식법을 적용하면 함유체 내부만을 요소분할하면 된다는 장점이 있고, 공동에 경계요소법을 적용하면 분할요소의 수를 줄일 수 있으며, 또한, 공동의 경계면에서 표면력 벡터가 0이 된다는 사실을 이용할 수 있기 때문이다.

체적 적분방정식 (1)을 응용하면, P파에 대한 혼합 체적-경계 적분방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 u_m(\mathbf{x}) = & u_m^o(\mathbf{x}) \\
 & + \int_V [\delta\rho\omega^2 g_i^{m(2)}(\xi, \mathbf{x})u_i(\xi) \\
 & - \delta c_{ijk} g_{i,j}^{m(2)}(\xi, \mathbf{x})u_{k,l}(\xi)]d\xi \quad (9) \\
 & + \int_S c_{ijk}^{(2)} g_{k,l}^{m(2)} u_{n,j} dS
 \end{aligned}$$

여기서, $u_m(\mathbf{x})$ 는 고체의 임의의 위치에서의 변위성분을 나타내고, V는 등방성 함유체의 체적을 나타내며 S는 공동의 경계면을 나타낸다. \mathbf{n} 은 S에서의 바깥쪽 법선방향의 단위 벡터이고, 윗첨자 (2)는 등방성 기지에 대한 양(quantity)을 나타낸다.

Fig. 4에 나타난 형태의 혼합 체적-경계 적분방정식법 모델을 사용하였으며, 등방성 함유체는 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였고, 공동의 경계면은 100개의 2차 경계요소를 사용하여 분할하였다.

이때, 등방성 함유체의 분할된 절점(node)과 공동의 경계면의 절점(node)에서의 변위에 대한 선형 연립방정식은 식 (4)와 동일한 형태로 주어진

다.($m = 769, n = 200$)

따라서, 식 (4)와 동일한 형태의 식으로부터 등방성 함유체 내부에서의 변위 및 공동의 경계면에서의 변위를 구할 수 있고, 또한, 등방성 함유체 내부에서의 변형률과 응력도 결정할 수 있다. 그 외의 모든 곳에서의 변위 및 응력은 식 (9)의 적분 값을 구함으로써 얻을 수 있다. 이 수치해석 방법의 정확도를 조사하기 위하여, 등방성 함유체 및 공동 모두에 경계요소법을 사용한 해를 구하여, 혼합 체적-경계 적분방정식법을 사용하여 구한 해와 비교 검토해 보았다.

Figs. 10과 11은 각기 다른 주파수를 갖는 P파가 입사되었을 때, 등방성 함유체와 등방성 무한기지의 경계면에서의 변위성분 u_1 (x방향의 변위 성분)과 u_2 (y방향의 변위 성분)의 실수부분과 허수 부분에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식법과 경계요소법에 의한 수치해석 해들 사이의 비교를 나타낸다. 혼합 체적-경계 적분방정식법과 경계요소법에 의한 수치해석 해들이 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2.2 등방성 기지에 등방성 함유체와 공동이 포함되어 있는 무한고체에서의 SV파의 산란문제 해석

이번에는, Fig. 9에 있는 등방성 함유체와 공동이 등방성 무한기지에 포함된 무한고체에서의 SV파(횡파) 산란문제 해석을, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해본다. 함유체의 중심으로부터 공동의 중심까지의 거리(d)는 함유체의 반지름(a)의 3배이다. 여기서, 파가 $x(x_1)$ 축에 평행하게 진행할 때, 입자가 $y(x_2)$ 방향으로 운동하는 파를 SV파(횡파)라고 한다.

x축의 양의 방향을 따라 진행하는 SV 입사파의 형태를 다음과 같이 가정하여 산란문제 해석을 수행하였다.

$$u_2^o = \frac{e^{ik_2x}}{ik_2} \quad (10)$$

등방성 무한기지에서 SV파의 파수를 k_2 라고 할 때, $k_2 a = 2.0, 4.0$ 에 해당하는 주파수를 갖는 SV 입사파에 대하여 산란현상을 조사하여 보았다. 문제해석에 사용된 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 2에 나타나 있다.

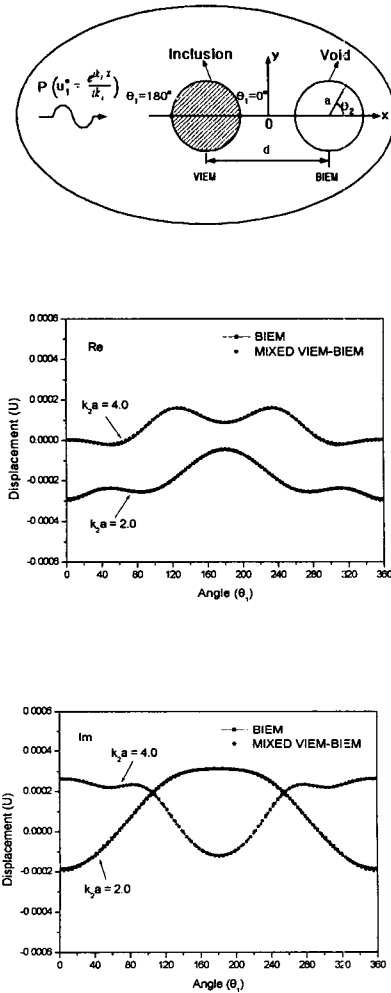


Fig. 10 Real and Imaginary parts of the displacement u_1 (displacement in the x-axis) at the interface of isotropic cylindrical inclusion for $k_2a = 2.0, 4.0$. k_2 is the SV wavenumber in the unbounded isotropic matrix

SV파에 대한 혼합 체적-경계 적분방정식법의 기본식은 식 (9)와 동일하며, 3.2.1에서와 동일한 형태의 해석방법을 사용하여 산란문제 해석을 수행하였다.

Figs. 12, 13은 각기 다른 주파수를 갖는 SV파가 입사되었을 때, 등방성 함유체와 등방성 무한

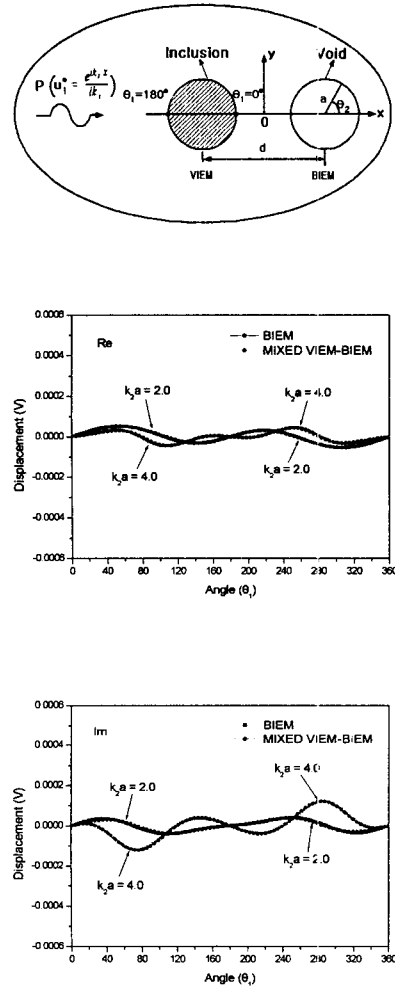


Fig. 11 Real and Imaginary parts of the displacement u_2 (displacement in the y-axis) at the interface of isotropic cylindrical inclusion for $k_2a = 2.0, 4.0$. k_2 is the SV wavenumber in the unbounded isotropic matrix

기지의 경계면에서의 변위성분 u_1 (x방향의 변위 성분)과 u_2 (y방향의 변위 성분)의 실수부분과 허수 부분에 대하여 혼합 체적-경계 적분방정식법과 경계요소법에 의한 수치해석 해들 사이의 비교를 나타낸다. 혼합 체적-경계 적분방정식법과 경계

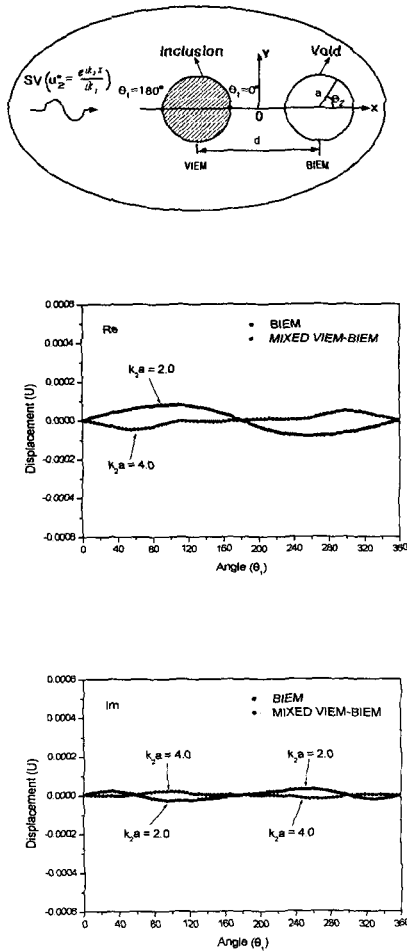


Fig. 12 Real and Imaginary parts of the displacement u_1 (displacement in the x-axis) at the interface of isotropic cylindrical inclusion for $k_2a = 2.0, 4.0$. k_2 is the SV wavenumber in the unbounded isotropic matrix

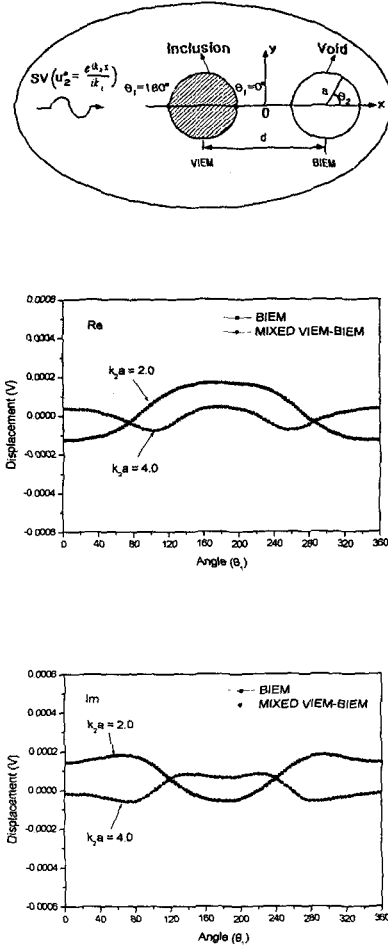


Fig. 13 Real and Imaginary parts of the displacement u_2 (displacement in the y-axis) at the interface of isotropic cylindrical inclusion for $k_2a = 2.0, 4.0$. k_2 is the SV wavenumber in the unbounded isotropic matrix

요소법에 의한 수치해석 해들이 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

4. 결론

등방성 무한기지에 직교 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체등이 포함된 무한고체가

정적 무한하중을 받을 때 고체 내부에 발생하는 변위 및 응력분포를 해석하는 수치해석 방법으로 혼합 체적-경계 적분방정식법을 고찰해 보았으며, 이 새로운 수치해석 방법을 사용하여 정확한 해를 구할 수 있었다. 또한, 혼합 체적-경계 적분방정식법을 적용하여, 등방성 무한기지에 등방성 함유체 및 공동이 포함된 무한고체에서의 P파 및

SV파 산란문제 해석을 수행하였으며, 정확한 해를 구할 수 있었다.

혼합 체적-경계 적분방정식법에 의한 탄성정역학 및 탄성과 산란문제 해석에는 함유체와 기지 사이의 밀도 및 탄성상수 차와 등방성 무한기지에서 Green 함수만이 필요하다는 장점이 있었다. 그러나, 경계요소법을 적용한 해석에는 등방성 기지에서의 Green 함수와 직교 이방성 함유체에서의 Green 함수 모두가 필요하다는 단점이 있었다. 그러므로, 등방성 무한기지에 다수의 일반적인 이방성 함유체 및 공동 또는 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 탄성정역학 및 탄성과 산란문제 해석에는 함유체 내부만을 요소분할하면 되고, 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는 혼합 체적-경계 적분방정식법이 매우 효과적인 수치해석 방법임을 알 수 있었다.

따라서, 본 논문에서 얻어진 연구결과를 활용하면, 등방성 함유체, 이방성 함유체 및 균열 또는 공동이 등방성 무한기지에 포함된 무한고체⁽⁷⁾가 정적 및 동적 응력확대계수를 구하는 연구에 효과적으로 수행할 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적이초연구(2001-1-30400-012-2) 지원으로 수행되었으며, 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

- (1) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.
- (2) Buryachenko, V. A. and Bechel, V. T., 2000, "A Series Solution of the Volume Integral Equation for Multiple-Inclusion Interaction Problems," *Composites Science and Technology*, Vol. 60 (12-13), pp. 2465~2469.
- (3) Davi, G. and Milazzo, A., 1996, "Stress Fields in Composite Cross-Ply Laminates," *Eleventh International Conference on Boundary Element Technology, BETECH 96*, Ertekin, R. C., Brebbia, C. A., Tanaka, M. and Shaw, R., Eds., Computational Mechanics Publications, pp. 175~184.
- (4) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (5) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (6) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (7) Lee, J. K. and Mal, A., 1998, "Characterization of matrix damage in metal matrix composites under transverse loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339~346.
- (8) Lee, J. K., Choi, S. J., and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38 (16), pp. 2789~2802.
- (9) Lee, K. J. and Mal, A. K., 1990, "A Boundary Element Method for Plane Anisotropic Elastic Media," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 600~606.
- (10) Mal, A. K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *J. Inst. Math. Applics.*, Vol. 3, pp. 376~387.
- (11) Yang, H. C. and Chou, Y. T., 1976 (Sep.), "Generalized Plane Problems of Elastic Inclusions in Anisotropic Solids¹," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 43, pp. 424~430.
- (12) 이정기, 최성준, 라원석, 1997, "직교 이방성 함유체가 포함된 2차원 무한 고체의 탄성 해석에 관한 연구," 대한기계학회 추계학술대회논문집 A, KSME 97F072, pp. 420~425.