

삼중레이스를 갖는 자동평형장치의 동적 해석

조은형* · 손진승* · 좌성훈† · 박준민** · 정진태***

(2001년 9월 14일 접수, 2002년 1월 24일 심사완료)

Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer with Triple Races

Eun-Hyoung Cho, Jin-Seung Sohn, Sung-Hoon Choa, Junmin Park and Jintai Chung

Key Words : Automatic Ball Balancer(자동 볼 평형장치), Balancing(밸런싱), Perturbation Method(섭동법), Dynamic Stability(동적 안정성)

Abstract

Dynamic behaviors are analyzed for an automatic ball balancer (ABB) with triple races, which is a device to reduce the unbalanced mass of optical disk drives (ODD) such as CD-ROM or DVD drives. The nonlinear equations of motion are derived by using Lagrange's equations with the polar coordinate system. It is shown that the polar coordinate system provides the complete stability analysis while the rectangular coordinate system used in other previous studies has limitations on the stability analysis. For the stability analysis, the equilibrium positions and the linearized perturbation equations are obtained by the perturbation method. Based on the linearized equations, the stability of the system is analyzed around the equilibrium positions; furthermore, to confirm the stability, the time responses for the nonlinear equations of motion are computed by using a time integration method and experimental analyses are performed. Theoretical and experimental results show a superiority of the ABB with triple races.

1. 서론

자동 볼 평형장치(Automatic Ball Balancer, ABB)는 회전체의 주 진동원으로 작용하는 질량 편심을 볼의 질량에 의해 자동으로 줄여주는 장치이다. 회전축에 영구 장착되는 회전체는 장착 후에 1회의 정적 혹은 동적 밸런싱으로 편심을 줄여 진동 문제를 해결할 수 있으나, CD-ROM 이나 DVD-ROM 드라이브 혹은 세탁기와 같이 회전체의 편심량이 사용 조건에 따라 변하는 경우에는 1회의 밸런싱으로 만족할 만한 결과를 얻을 수 없다. 따라서, 이러한 가변적인 편심량을 갖는 회전체의 밸런싱을 위하여 ABB에 대한 연구는 중요하다.

ABB는 1930년대에 처음으로 제안되어 많은

회전기계 시스템에 적용되어 왔으나, 그 작동원리나 동특성에 관한 연구는 최근에 이르러 체계적으로 시도되고 있다. Alexander⁽¹⁾는 ABB에 관한 이론적 분석결과를 발표하였으나, 어떠한 원리로 ABB가 자동적으로 평형상태에 도달하는지에 대해서는 제시하지 못하였다. Cade⁽²⁾는 ABB의 작동 조건을 제시하였는데, 이에 대한 근거는 명확히 제시하지 않았다. Jinnouchi와 그의 동료들⁽³⁾은 ABB의 레이스를 분할하는 것이 편심이나 자러진동을 줄이는 데 효과적이라고 제안하였다. Lee와 Van Moorhem^(4,5)은 ABB의 작동원리를 해석적인 방법을 통해 설명하였다. 그들은 직교좌표계를 이용하여 자동평형의 원리를 일부 규명하였으나 완전한 안정성 해석은 수행하지 못하였다. 최근에 Chung과 Ro⁽⁶⁾는 극좌표계를 이용하여 ABB의 작동원리를 규명하고 보다 완전한 안정성 해석을 수행하였다. ABB를 고속 회전기계 시스템에 적용하기 위해 절실히 요구되는 사항은 정교한 밸런싱 및 재현성(repeatability)확보이다. Hwang과 Chung⁽⁷⁾은 이중레이스를 갖는 ABB가 정교한 밸런싱을

* 삼성종합기술원

** 삼성전자

*** 회원, 한양대학교 기계산업공학부

† 책임저자, 회원, 삼성종합기술원

E-mail : shchoa@sisa.samsung.com

TEL : (031)200-4749 FAX : (031)200-3144

가능케 함을 이론적으로 제시하였으나, ABB의 재현성 확보를 위한 연구는 아직 미비한 실정이다.

본 연구에서 삼중레이스를 갖는 ABB에 대한 이론적 및 실험적 해석을 수행하였다. 기존의 직교 좌표계를 이용하는 방법으로 인한 안정조건 도출의 한계를 극복하기 위해 직교 좌표계 대신 극좌표계를 이용하여 운동방정식을 유도하였다. 이렇게 유도된 운동방정식을 무차원화시키고, 섭동법을 적용하여 평형위치와 평형위치 부근에서 선형화된 운동방정식을 구하였다. 그리고 고유치문제를 통해 각 평형위치에서 동적 안정성 해석을 수행하고, 명시적 시간적분법을 이용하여 ABB의 시간응답을 구해 동적 안정성에 대한 해석결과를 검증하였다. 마지막으로 이론적 해석을 통해 제시된 삼중레이스를 갖는 ABB의 성능을 실험적 방법을 통해 입증하였다.

2. 운동방정식

삼중레이스를 갖는 ABB는 Fig. 1과 같이 Jeffcott 로터에 세 개의 레이스를 파고 각 레이스 안에 여러 개의 볼들이 자유롭게 회전할 수 있는 구조를 하고 있다. Fig. 2에서 회전속도가 ω 인 회전체의 도심은 r 과 θ 로 나타낼 수 있고, 질량중심은 편심량 ε 과 r 축에서 질량중심까지의 각도 ψ 로 정의할 수 있다. 시간 t 일때 X 축으로부터 질량중심이 회전한 각도는 ωt 이므로 θ 는 다음식으로 표현된다.

$$\theta = \omega t - \psi \tag{1}$$

각 볼의 위치는 회전체의 도심과 질량중심을 잇는 직선을 기준으로 반시계방향으로 측정된 각도 ϕ_j^i (단, $j=1, \dots, p$, p 는 내부 레이스 볼의 개수), ϕ_j^m (단, $j=1, \dots, q$, q 는 중간 레이스 볼의 개수), ϕ_j^o (단, $j=1, \dots, s$, s 는 외부 레이스 볼의 개수), 내부 레이스의 반경 R_i , 중간 레이스의 반경 R_m , 외부 레이스의 반경 R_o 로 정의할 수 있다.

운동방정식은 다음의 Lagrange 방정식으로 유도된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k^{nc} \tag{2}$$

여기서, T 는 운동에너지, V 는 위치에너지, Q_k^{nc} 는

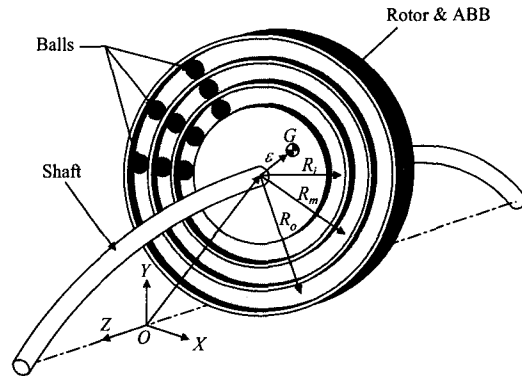


Fig. 1 Automatic ball balancer (ABB) with triple races

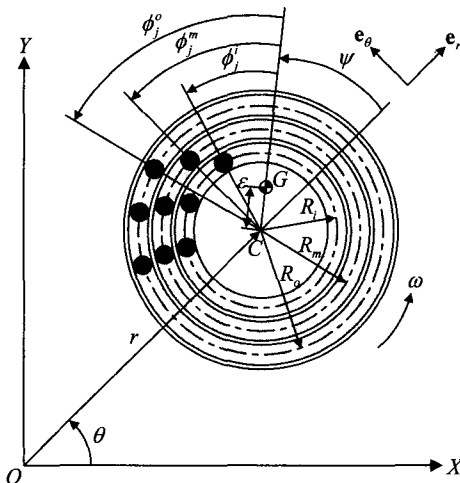


Fig. 2 Configuration of the ABB with triple races

일반화된 비보존력이며, q_k 는 일반좌표로서 $r, \psi, \phi_1^i, \phi_2^i, \dots, \phi_p^i, \phi_1^m, \phi_2^m, \dots, \phi_q^m, \phi_1^o, \phi_2^o, \dots, \phi_s^o$ 을 나타낸다. 따라서, $p+q+s+2$ 개의 서로 독립된 운동방정식이 얻어진다.

질량중심 및 각 레이스 볼의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_G = (r + \varepsilon \cos \psi) \mathbf{e}_r + \varepsilon \sin \psi \mathbf{e}_\theta \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_{B_j^i} = [r + R_i \cos(\psi + \phi_j^i)] \mathbf{e}_r + R_i \sin(\psi + \phi_j^i) \mathbf{e}_\theta \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_{B_j^m} = [r + R_m \cos(\psi + \phi_j^m)] \mathbf{e}_r + R_m \sin(\psi + \phi_j^m) \mathbf{e}_\theta \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_{B_j^o} = [r + R_o \cos(\psi + \phi_j^o)] \mathbf{e}_r + R_o \sin(\psi + \phi_j^o) \mathbf{e}_\theta \tag{6}$$

여기서, \mathbf{r}_G 는 질량중심의 위치벡터, $\mathbf{r}_{B_j^i}, \mathbf{r}_{B_j^m}$ 및 $\mathbf{r}_{B_j^o}$ 는 각각 내부, 중간 및 외부 레이스 볼의 위치

벡터를 나타낸다. 볼의 반경이 회전체의 반경에 비해 일반적으로 매우 작기 때문에 볼 중심에 대한 질량관성모멘트를 무시할 수 있고, 각 레이스 볼의 질량을 같다고 가정하면 ABB의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^p \dot{\mathbf{r}}_{B_j} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_j} + \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^q \dot{\mathbf{r}}_{B_j^*} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_j^*} + \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^s \dot{\mathbf{r}}_{B_j^o} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_j^o} \quad (7)$$

여기서, I_G 는 회전체의 질량중심에 대한 질량관성모멘트이고, M 과 m 은 각각 회전체와 볼들의 질량이다.

중력의 영향을 무시한 위치에너지는

$$V = \frac{1}{2} k r^2 \quad (8)$$

로 나타낼 수 있는데 k 는 축계의 상당강성계수이다. 그리고, 축계의 상당감쇠계수를 c 라 하고 레이스 안의 윤활유의 점성계수를 D 라 하면, 일반화된 비보존력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q_r^{nc} = -c\dot{r} \quad (9)$$

$$Q_\psi^{nc} = c r^2 (\omega - \dot{\psi}) \quad (10)$$

$$Q_{\phi_j^i}^{nc} = -D \dot{\phi}_j^i, \quad j=1,2,\dots,p \quad (11)$$

$$Q_{\phi_j^m}^{nc} = -D \dot{\phi}_j^m, \quad j=1,2,\dots,q \quad (12)$$

$$Q_{\phi_j^o}^{nc} = -D \dot{\phi}_j^o, \quad j=1,2,\dots,s \quad (13)$$

계의 고유진동수와 감쇠비는 다음과 같다.

$$\omega_n = \sqrt{k/M}, \quad \zeta = c/2\sqrt{kM} \quad (14)$$

해석을 용이하게 함과 동시에 섭동법을 적용하기 위해 다음과 같은 무차원수를 가정한다.

$$\bar{r} = r/R_o, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/R_o, \quad \bar{m} = m/M, \quad \bar{t} = \omega_n t, \quad \bar{\omega} = \omega/\omega_n,$$

$$\bar{R}_i = R_i/R_o, \quad \bar{R}_m = R_m/R_o, \quad \beta = \frac{D}{mR_o^2\omega_n^2} \quad (15)$$

식 (7) ~ (15)를 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 비선형 행렬-벡터 방정식이 얻어진다.

$$\bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{x}}) \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \bar{\mathbf{N}}(\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}) = \mathbf{0} \quad (16)$$

여기서, 변위벡터 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 다음과 같고

$$\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{r}, \psi, \phi_1^i, \dots, \phi_p^i, \phi_1^m, \dots, \phi_q^m, \phi_1^o, \dots, \phi_s^o\}^T \quad (17)$$

$\bar{\mathbf{M}}$ 은 $(p+q+s+2) \times (p+q+s+2)$ 질량행렬을 표시하며 질량행렬은 변위의 함수이다. $\bar{\mathbf{N}}$ 은 $(p+q+s+2) \times 1$ 내력벡터를 나타내며, 변위와 속도의 비선형 함수이다.

3. 평형위치 및 섭동방정식

평형위치와 그 부근에서의 선형화된 방정식을 얻기 위해 식 (16)의 비선형 운동방정식에 섭동법을 적용한다.

섭동법을 적용하기 위해 먼저 식 (16)의 해를 미소량 δ 에 관한 멱급수 형태로 가정한다. 즉,

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \delta \bar{r}_1 + \delta^2 \bar{r}_2 + \dots \quad (18)$$

$$\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + \delta^2 \psi_2 + \dots \quad (19)$$

$$\phi_j^i = \phi_{0j}^i + \delta \phi_{1j}^i + \delta^2 \phi_{2j}^i + \dots \quad (20)$$

$$\phi_j^m = \phi_{0j}^m + \delta \phi_{1j}^m + \delta^2 \phi_{2j}^m + \dots \quad (21)$$

$$\phi_j^o = \phi_{0j}^o + \delta \phi_{1j}^o + \delta^2 \phi_{2j}^o + \dots \quad (22)$$

여기서, \bar{r}_0 , ψ_0 , ϕ_{0j}^i , ϕ_{0j}^m 와 ϕ_{0j}^o 는 각각 r , ψ , ϕ_j^i , ϕ_j^m 와 ϕ_j^o 의 평형위치를 나타낸다. 식 (18) ~ (22)를 식 (16)에 대입하고 δ 에 관해 정리하면 δ^0 의 계수는 평형위치에 대한 방정식이 되고 δ^1 의 계수는 선형 섭동방정식이 된다.

평형위치에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$[1 - (1 + n\bar{m})\bar{\omega}^2] \bar{r}_0 - \bar{m} \bar{R}_i \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^p \cos(\psi_0 + \phi_{0j}^i) - \bar{m} \bar{R}_m \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^q \cos(\psi_0 + \phi_{0j}^m) - \bar{m} \bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^s \cos(\psi_0 + \phi_{0j}^o) = \bar{\varepsilon} \bar{\omega}^2 \cos \psi_0 \quad (23)$$

$$2\zeta\bar{\omega}\bar{r}_0 - \bar{m}\bar{R}_i\bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^p \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^i) - \bar{m}\bar{R}_m\bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^q \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^m) \quad (24)$$

$$- \bar{m}\bar{\omega}^2 \sum_{j=1}^s \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^o) = \bar{\varepsilon}\bar{\omega}^2 \sin \psi_0$$

$$\bar{r}_0 \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^i) = 0, \quad j=1,2,\dots,p \quad (25)$$

$$\bar{r}_0 \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^m) = 0, \quad j=1,2,\dots,q \quad (26)$$

$$\bar{r}_0 \sin(\psi_0 + \phi_{0j}^o) = 0, \quad j=1,2,\dots,s \quad (27)$$

반면에 평형위치 부근에서의 선형 섭동방정식은 다음으로 주어진다.

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}^* \mathbf{x}_p = \mathbf{0} \quad (28)$$

여기서, \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* 와 \mathbf{K}^* 는 $(p+q+s+2) \times (p+q+s+2)$ 상수 행렬이며,

$$\mathbf{x}_p = \{\bar{r}_1, \psi_1, \phi_{01}^i, \dots, \phi_{0p}^i, \phi_{01}^m, \dots, \phi_{0q}^m, \phi_{01}^o, \dots, \phi_{0s}^o\}^T \quad (29)$$

평형위치는 $\bar{r}_0 = 0$ 와 $\bar{r}_0 \neq 0$ 의 두 경우에 대해 분류할 수 있다. $\bar{r}_0 = 0$ 일 때 계는 밸런싱을 이루게 되며, $\bar{r}_0 \neq 0$ 일 때는 밸런싱을 이루지 못한다. 실제 산업현장에서는 계가 밸런싱을 이루는 것이 중요하므로 본 연구에서는 $\bar{r}_0 = 0$ 에 대해서만 논하고자 한다. $\bar{r}_0 = 0$ 인 경우 식 (23) ~ (27)로 주어지는 평형위치는 다음과 같이 간략히 표시된다.

$$\bar{r}_0 = 0 \quad (30)$$

$$\bar{R}_i \sum_{j=1}^p \cos \phi_{0j}^i + \bar{R}_m \sum_{j=1}^q \cos \phi_{0j}^m + \sum_{j=1}^s \cos \phi_{0j}^o + \bar{\varepsilon}/\bar{m} = 0 \quad (31)$$

$$\bar{R}_i \sum_{j=1}^p \sin \phi_{0j}^i + \bar{R}_m \sum_{j=1}^q \sin \phi_{0j}^m + \sum_{j=1}^s \sin \phi_{0j}^o = 0 \quad (32)$$

4. 안정성 해석

계의 안정성 해석을 위해 평형위치 부근에서 선형화하여 얻어진 섭동방정식인 식 (28)을 사용한다. 식 (28)의 해를

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{X}_p e^{s\tau} \quad (33)$$

라고 가정하여 식 (28)에 대입하면 다음과 같은 복소고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$(s^2 \mathbf{M}^* + s \mathbf{C}^* + \mathbf{K}^*) \mathbf{X}_p = \mathbf{0} \quad (34)$$

식 (37)의 복소고유치 문제를 풀어 고유치 s 의 실수부가 음수인지 양수인지를 판별하여 계의 동적 안정성을 평가한다. 만약 s 의 실수부가 음수이면 계는 안정하고 양수이면 불안정하게 된다.

각 레이스에 볼이 한 개씩 있다고 가정하면 전술한 두 가지 평형위치 중 밸런싱의 목적을 달성하는 평형위치, 즉 $\bar{r}_0 = 0$ 의 평형위치는 다음식으로 간단히 쓸 수 있다.

$$\bar{R}_i \cos \phi_{01}^i + \bar{R}_m \cos \phi_{01}^m + \cos \phi_{01}^o + \bar{\varepsilon}/\bar{m} = 0 \quad (35)$$

$$\bar{R}_i \sin \phi_{01}^i + \bar{R}_m \sin \phi_{01}^m + \sin \phi_{01}^o = 0 \quad (36)$$

삼중레이스를 갖는 ABB 는 $\bar{r}_0 = 0$ 의 평형위치인 경우 $s^2 \mathbf{A} + s \mathbf{B} + \mathbf{C}$ 의 행렬식이 0 이 되어 식 (34)의 고유치 해석을 할 수 없게 된다. 이는 $\bar{r}_0 = 0$ 에 해당하는 평형위치에서 ψ_0 의 값이 정의되지 않기 때문이다. 또한 레이스가 한 개이거나 이중인 ABB^(6,7)의 경우와 달리 식 (35)과 (36)의 미지수의 수가 방정식의 수보다 많기 때문에 볼의 평형위치를 계산할 수 없다. 그러므로, 본 연구에서는 한 레이스 볼의 평형위치가 질량중심과 같은 방향에 위치하거나 반대 방향에 위치한다고 가정한다. 물론 다른 경우도 가능할 것이다. 이러한 가정에 의해 다른 레이스의 나머지 볼들의 평형위치를 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 \bar{r}_0 , ϕ_{01}^i , ϕ_{01}^m 와 ϕ_{01}^o 을 식 (34)에 대입하고 ψ_0 를 소거하면 다음과 같은 특성방정식을 얻게 된다.

$$c_{10}s^{10} + c_9s^9 + c_8s^8 + c_7s^7 + c_6s^6 + c_5s^5 + c_4s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s = 0 \quad (37)$$

평형위치 부근에서의 ABB 의 동적 안정성을 규명한 결과를 Fig. 3 과 Fig. 4 에 도시하였다. Fig. 3 은 $\bar{\varepsilon} = 0.01$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ 그리고 $\beta = 0.01$ 일 때, $\bar{\omega}$ 와 \bar{m} 의 변화에 대한 안정성을 나타낸다. 수평선과 수직선으로 표시된 영역은 볼이 질량중심과 같은 방향에 있을 때와 반대방향에 있을 때의 안정영역을 각각 나타낸다. 또한 안정영역은 세 부분으로 나뉘는데, 첫째는 수평선으로만 표시된 안정영역 I, 둘째는 수직선으로만 표시

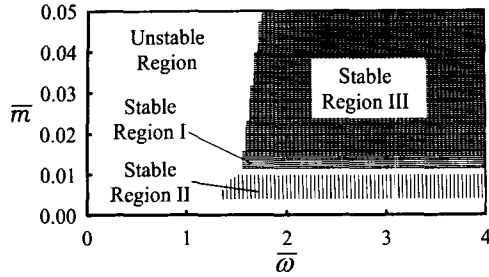


Fig. 3 Stability for the case of $\bar{r}_0 = 0$ with $p = q = s = 1$, $\bar{\epsilon} = 0.01$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ and $\beta = 0.01$

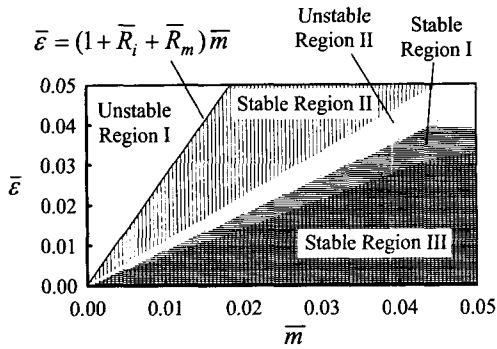


Fig. 4 Stability for the case of $\bar{r}_0 = 0$ with $p = q = s = 1$, $\bar{\omega} = 2$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ and $\beta = 0.01$

된 안정영역 II, 마지막으로 수평선 영역과 수직선 영역이 겹쳐진 안정영역 III 이다. 안정영역 I 에 있는 값을 가지고 ABB 를 설계하면 레이스 볼 중 하나가 질량중심과 같은 방향으로 수렴하게 될 것이다. 반면에 안정영역 II 에 있는 값으로 설계하면 질량중심과 반대 방향으로 한 볼이 수렴하게 될 것이다. 또한 안정영역 III 에서 ABB 가 설계되면 두 경우 중 하나로 한 볼이 수렴하게 될 것이다. Fig. 4 는 ABB 가 $\bar{\omega} = 2$ 일 때, \bar{m} 과 $\bar{\epsilon}$ 의 변화에 대한 안정성을 나타낸다. $\bar{\epsilon} = (1 + \bar{R}_i + \bar{R}_m)\bar{m}$ 로 정의된 선은 안정영역과 불안정영역의 경계를 나타낸다. 즉, ABB 의 안정성이 보장되려면 $(1 + \bar{R}_i + \bar{R}_m)\bar{m}$ 이 $\bar{\epsilon}$ 보다 크도록 설계되어야 함을 의미한다. 한가지 특이한 사항은 안정영역 I 과 안정영역 II 사이에 불안정영역이 존재한다는 것이다. 이 불안정영역은 한 볼의 평형위치가 위에서 가정된 두 경우와 다를 경우 또 다른 안정영역이 될 수도 있을 것이다. Fig. 3 과 Fig. 4 는 ABB 가 밸런싱의 목적을 달성하기 위한 각 설계인수의 제한 조건을 설계자에게 제공한다. 다시 말해, ABB 가 Fig. 3 과 Fig. 4 의 안정영역에 존재하게 설계하면,

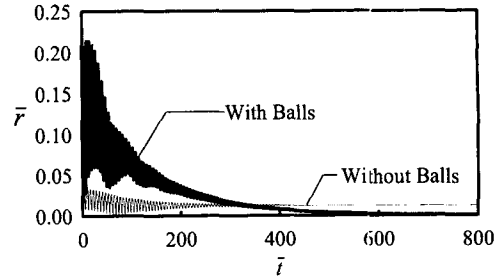


Fig. 5 Nondimensional radial displacement of the system with $p = q = s = 1$, $\bar{\omega} = 2$, $\bar{m} = 0.02$, $\bar{\epsilon} = 0.01$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ and $\beta = 0.01$

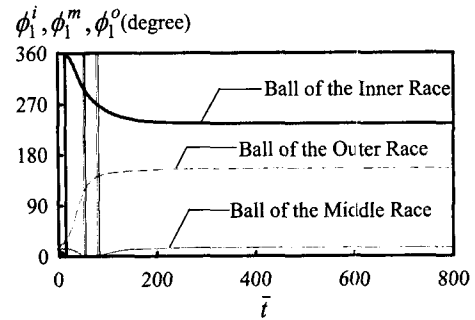


Fig. 6 Angular positions of the balls with $p = q = s = 1$, $\bar{\omega} = 2$, $\bar{m} = 0.02$, $\bar{\epsilon} = 0.01$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ and $\beta = 0.01$

회전체의 질량 불평형을 제거하여 진동을 감소시킬 수 있다.

5. 시간응답 해석

ABB 의 비선형 운동방정식에 대한 시간응답을 계산하여 ABB 의 안정성 해석결과를 검증하고자 한다. 시간응답의 계산은 Chung 과 Lee⁽⁸⁾에 의해 개발된 시간적분법을 식 (16)에 적용하여 수행하였다.

시간응답 계산을 위한 ABB 의 물성치는 $p = q = s = 1$, $\bar{m} = 0.02$, $\bar{\epsilon} = 0.01$, $\bar{R}_i = 0.8$, $\bar{R}_m = 0.9$, $\zeta = 0.01$ 그리고 $\beta = 0.01$ 이며, 초기조건은 $\bar{r} = 0.01$, $\psi = -5.73^\circ$, $\phi_1^i = 10^\circ$, $\phi_1^m = 15^\circ$, $\phi_1^o = 20^\circ$ 그리고 $\dot{\bar{r}} = \dot{\psi} = \dot{\phi}_1^i = \dot{\phi}_1^m = \dot{\phi}_1^o = 0$ 으로 주어졌다. $\bar{\omega} = 2$ 이고 $\bar{r} = 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 ABB 가 안정영역 I 에 있을 때, 회전체 중심의 진폭에 대한 시간응답을 계산하면 Fig. 5 와 같다. 이 경우 시간이 경과함에 따라 \bar{r} 가 0 으로

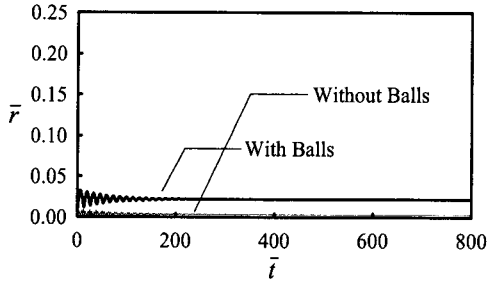


Fig. 7 Nondimensional radial displacement of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=0.5$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

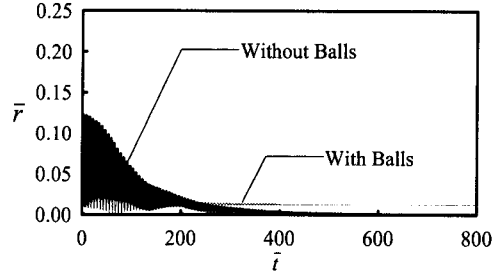


Fig. 9 Nondimensional radial displacement of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=2$, $\bar{m}=0.008$, $\bar{\varepsilon}=0.015$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

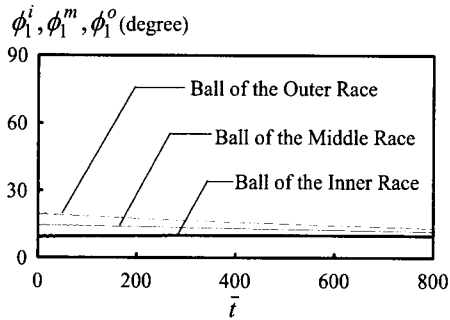


Fig. 8 Angular positions of the balls with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=0.5$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

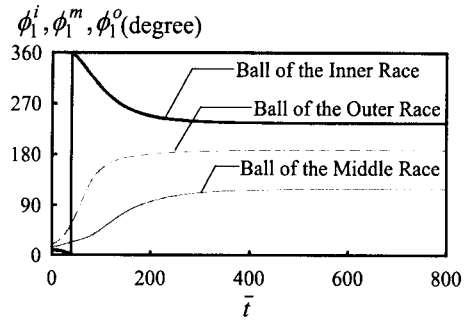


Fig. 10 Angular positions of the balls with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=2$, $\bar{m}=0.008$, $\bar{\varepsilon}=0.015$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

수렴하여 $\bar{t}=800$ 또는 $t=2.07 \text{ sec}$ 일 때 완전히 진동이 제거됨을 알 수 있다. 볼이 없는 경우에는 질량 불평형 때문에 진동이 제거되지 않는다. Fig. 6 은 볼의 위치에 대한 시간응답을 보여 주는데 시간이 경과함에 따라 일정한 위치로 수렴한다. 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심 반대 쪽에 위치하여 질량 불평형을 보상하여 밸런싱의 목적을 달성한다. 반면에 Fig. 7 과 Fig. 8 은 $\bar{\omega}=0.5$ 인 경우의 시간응답을 계산한 것이다. Fig. 7 에서 알 수 있는 바와 같이 시간이 경과함에 따라 \bar{r} 는 0 으로 수렴하지 않고 ABB 를 사용하지 않았을 경우보다 더 큰 진폭을 갖는다. $\bar{\omega}=0.5$ 인 경우는 Fig. 3 에서 알 수 있는 바와 같이 불안정영역에 해당한다. 그러나, \bar{r} 는 발산하지 않고 일정한 값으로 수렴한다. 따라서, 이 불안정영역은 이전 연구^(6,7)에서 언급된 바와 같이 밸런싱을 이루지 못하는 경우($\bar{r} \neq 0$)의 안정영역이라고 말할 수 있을 것이다. 볼의 위치는 Fig. 8 과 같이 일정한 값으로 수렴하고, 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심과 같은 방향으로 위치하여 오히려 질량 불평형을 가중시켜 더 큰 진폭을 발생시킨다. 다음으로 Fig.

와 Fig. 10 은 안정영역 I 에 대해서 불안정영역인 안정영역 II 에 해당하는 값을 가지고 ABB 를 설계했을 때의 시간응답을 나타낸다. 즉, $\bar{\omega}=2$ 이며, $\bar{m}=0.008$ 과 $\bar{\varepsilon}=0.015$ 로 위와 다른 값을 갖는 경우이다. Fig. 9 에서 알 수 있는 바와 같이 시간이 경과함에 따라 \bar{r} 는 0 으로 수렴한다. Fig. 10 은 하나의 볼이 질량중심과 반대방향, 즉 180° 로 수렴하고 있음을 보여주는데 이는 ABB 가 안정영역 II 에서의 설계인수를 가질 때 하나의 볼이 질량중심의 반대방향으로 수렴하게 된다는 것을 입증해 준다. 마지막으로 회전속도가 계의 고유진동수와 일치할 때, 즉 $\bar{\omega}=1$ 인 경우의 시간응답을 고찰하여 보자. 이 경우에 \bar{r} 는 Fig. 11 과 같이 일정한 값으로 수렴하지 않고 주기적으로 증감하며, Fig. 12 와 같이 회전체에 대하여 상대운동을 계속함을 알 수 있다.

Fig. 5 ~ 10 의 시간응답을 Fig. 13 ~ 15 와 같이 도식적으로 나타낼 수 있다. Fig. 13 과 15 는 각각 하나의 볼이 질량중심과 같은 방향에 있거나 반대방향으로 수렴함을 보여주며, 밸런싱의 목적을 달성하여 회전체의 도심과 질량중심이 일치함을 알

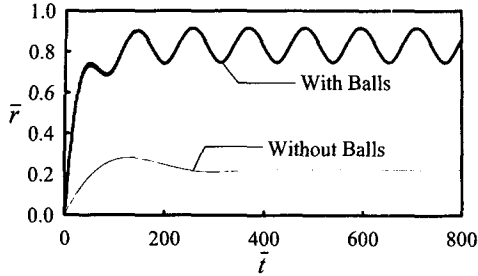


Fig. 11 Nondimensional radial displacement of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=1$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

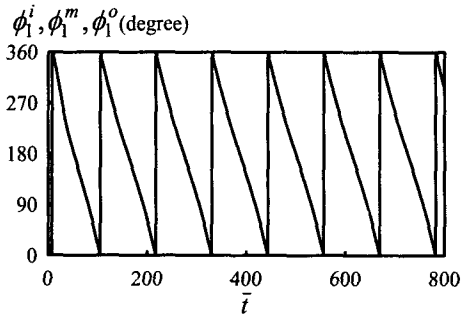


Fig. 12 Angular positions of the balls with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=1$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

수 있다. Fig. 14는 Fig. 7과 Fig. 8의 결과와 마찬가지로 볼들이 질량중심과 같은 방향에 위치하여 질량 불평형을 가중시키게 된다. 하나의 볼이 본 연구에서 가정된 두 경우와 다른 평형위치를 갖는다면 Fig. 13이나 Fig. 15와 다른 평형 형태 (balanced configuration)를 갖게 될 수도 있다. 게다가 그와 상응하는 안정영역을 갖게 되어 전체 안정영역은 점점 증가하게 될 것이다. 즉, 삼중레이스를 갖는 ABB는 설계자에게 안정성이 보장된 보다 넓은 영역의 설계기준을 제공할 것이라 예측된다. 또한 여러 가지 평형 형태를 가지므로 평형에 이를 확률이 높아져 ABB의 재현성 확보에 큰 도움이 되리라 생각된다.

6. 실험적 해석

이론적으로 제시된 삼중레이스를 갖는 ABB의 성능을 입증하기 위해 실험적 해석을 수행하였다. 먼저 ABB가 장착된 경우와 그렇지 않은 경우의 진동량을 비교하고자 한다. 안정성 해석은 실제

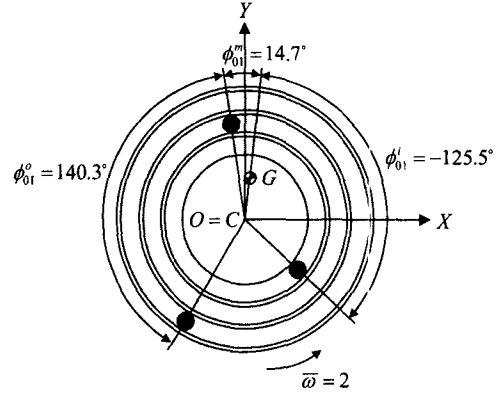


Fig. 13 Equilibrium position of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=2$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

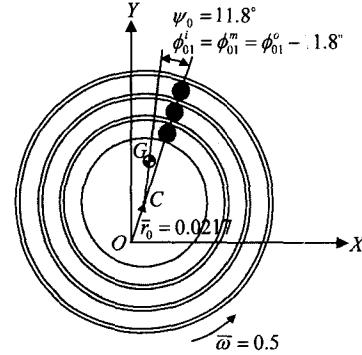


Fig. 14 Equilibrium position of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=0.5$, $\bar{m}=0.02$, $\bar{\varepsilon}=0.01$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

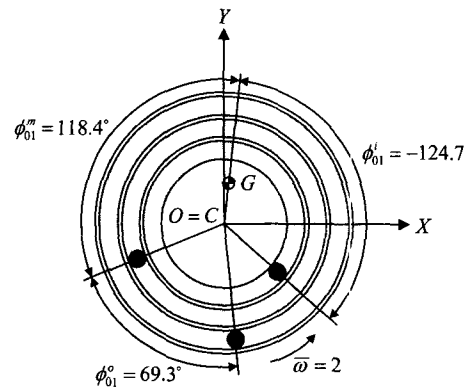


Fig. 15 Equilibrium position of the system with $p=q=s=1$, $\bar{\omega}=2$, $\bar{m}=0.008$, $\bar{\varepsilon}=0.015$, $\bar{R}_i=0.8$, $\bar{R}_m=0.9$, $\zeta=0.01$ and $\beta=0.01$

CD-ROM 드라이브에 적용하기 위한 ABB의 설계 기준을 제공한다. Fig. 16(a)는 ABB가 장착된 CD-ROM 드라이브를 나타낸다. 일반적으로 CD-ROM 드라이브의 턴테이블(turntable)에 장착된다. Fig.

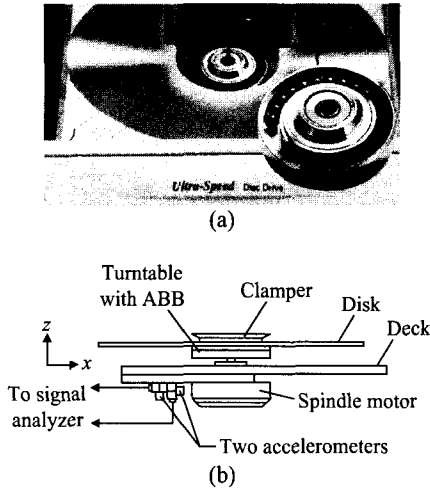


Fig. 16 Automatic ball balancer: (a) a CD-ROM drive with an ABB; (b) a section of the experimental setup for measuring the vibration levels in the tracking and focusing directions

16(b)와 같이 트래킹(tracking)방향과 포커싱(focusing)방향의 진동량을 측정하기 위해 두 개의 가속도계를 사용한다. Fig. 17은 ABB가 장착되지 않은 경우와 장착된 경우의 진동량을 나타낸다. 0.5g·cm의 질량 불평형을 갖는 디스크를 사용하고 Fig. 17(a)와 같이 스피들 모터(spindle motor)의 회전 속도를 증가시키는 경우 10sec 이후 ABB를 장착하지 않은 경우에는 5G 이상의 진동량을 가지며, ABB가 장착된 경우에는 2G 이하로 진동량이 작아짐을 알 수 있다. 즉, ABB를 장착함으로써 CD-ROM 드라이브의 진동량을 줄일 수 있게 된다.

이제 레이스가 하나인 ABB와 삼중레이스를 갖는 ABB의 비교를 통해 이론적으로 제시된 재현성에 대한 삼중레이스를 갖는 ABB의 우수성을 입증하고자 한다. 재현성을 평가하기 위해 Fig. 17(a)의 정상 상태에 이를 때까지 스피들 모터를 가속시킨다. 정상 상태에서 두 개의 가속도계를 이용하여 트래킹 및 포커싱 방향의 진동량을 측정하고 스피들 모터를 완전히 정지할 때까지 기다린다. 그리고 이 과정을 20번 반복하여 재실험한다. 또한 이 실험을 디스크의 질량 불평형을 변화시켜 가며 재수행한다. Fig. 18는 디스크 질량 불평형에 따른 트래킹 및 포커싱 방향의 평균 진동량 및 각 실험값의 산포를 보여준다. 그림의 x축은 디스크의 질량 불평형량을 의미하며, T와 F는 각각 트래킹 방향과 포커싱 방향을 나타낸다. Fig. 19 역시 트래킹 및 포커싱 방향의 진동량을 보여준다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 디스크 질량 불평형이 증가함에 따라 두 ABB 모두 진동량이 증가한

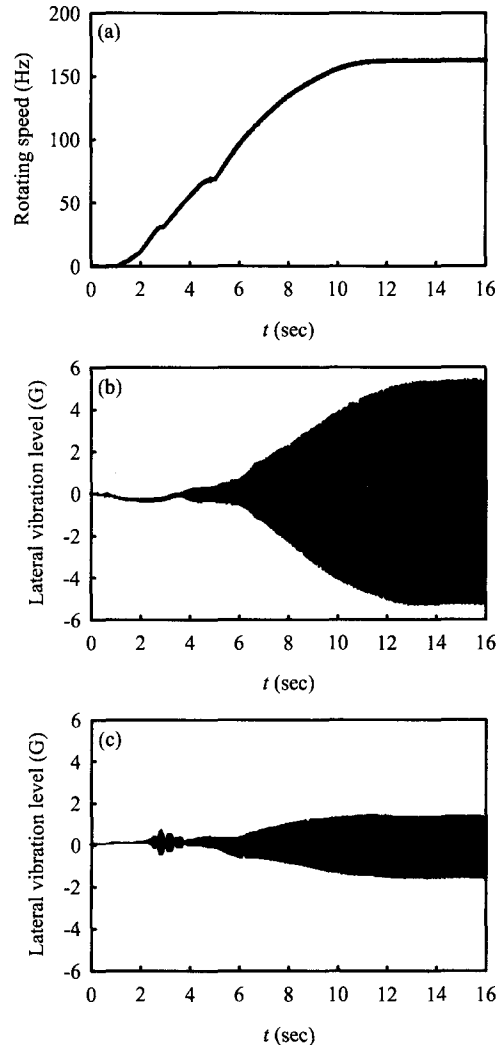


Fig. 17 Comparison of the lateral vibration levels of a CD-ROM drive: (a) the rotating speed; (b) the system without an ABB; and (c) the system with an ABB

다. 삼중레이스를 갖는 ABB는 하나의 레이스를 갖는 ABB에 비해 디스크 질량 불평형이 0.7g·cm인 경우를 제외하고 성능이 모두 우수함을 알 수 있다. ABB는 크기에 있어서 제약이 갖는 턴테이블 위에 장착되므로 삼중레이스를 갖는 경우 볼크기에 있어서 레이스가 하나일 때보다 작게 된다. 따라서 전체 볼의 질량이 작게 되어 너무 큰 질량 불평형이 존재하는 경우 그 보상능력이 떨어지게 된다. Fig. 18(b)에서 또 한가지 주목할 사항은 삼중레이스를 갖는 ABB의 트래킹 방향의 진동량에 대한 표준편차가 레이스가 하나인 ABB에 비해 질량 불평형에 관계없이 작음을 알 수 있

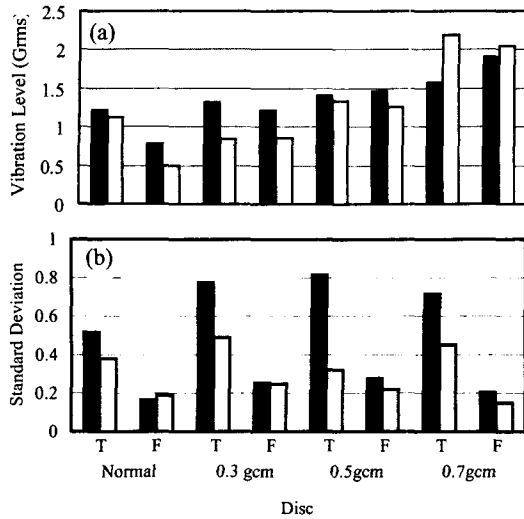


Fig. 18 The vibration levels in the tracking and focusing directions for the ABBs with a single race (black vertical bar) and triple races (white vertical bar) by the unbalanced mass ($g \cdot cm$) of the disc

다. 이는 삼중레이스를 갖는 ABB 가 레이스가 하나일 때보다 재현성에 있어서 우수함을 입증해 준다.

7. 결론

삼중레이스를 갖는 ABB 의 동특성을 분석하기 위해 극좌표계를 이용하여 비선형 운동방정식을 유도하였다. 이 방정식에 대해 평형위치 부근에서의 선형화된 섭동방정식을 구하고 이를 바탕으로 안정성 해석을 수행하였다. 안정성 해석은 질량 불평형이 존재하는 회전계에서 밸런싱의 목적을 달성하기 위한 ABB 의 적용에 대한 제약 조건뿐만 아니라 설계 기준도 제시한다. 본 연구에서 삼중레이스를 갖는 ABB 는 레이스가 하나이거나 둘인 경우에 비해 여러 가지 평형 형태를 갖는다는 것을 보여 주었다. 이와 같은 사실은 회전체의 질량 불평형을 제거하기 위한 ABB 의 설계시 동적 안정성 확보에 큰 도움을 준다. 본 연구에서 제시된 설계 지침으로 제작된 ABB 에 대한 실험적 해석을 통해 삼중레이스를 갖는 ABB 는 밸런싱 및 재현성에 있어서 우수한 성능을 보임을 입증하였다.

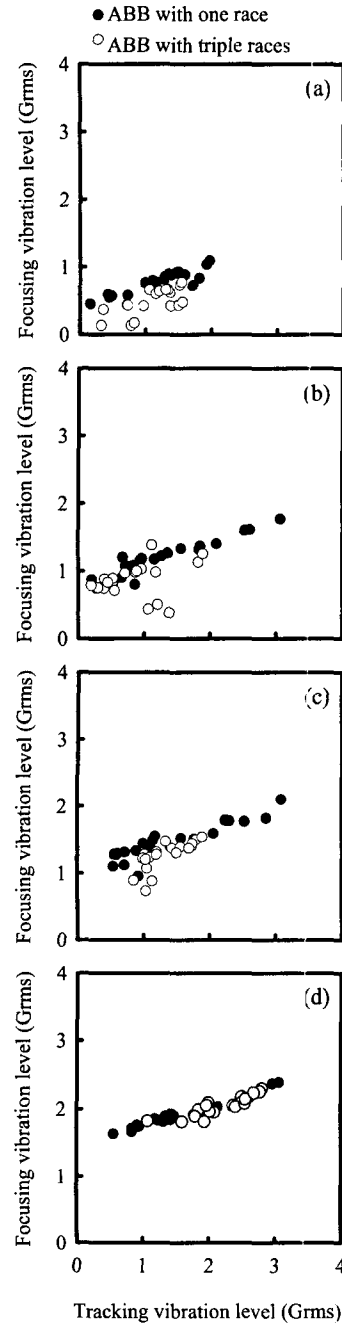


Fig. 19 Comparison of the vibration levels in the tracking and focusing directions by the unbalanced mass of the disc: (a) no unbalanced mass; (b) $0.3g \cdot cm$; (c) $0.5g \cdot cm$; and (d) $0.7g \cdot cm$

참고문헌

- (1) Alexander, J. D., 1964, "An Automatic Dynamic Balancer," *Proceedings of 2nd Southeastern Conference*, Vol. 2, pp. 415~426.
- (2) Cade, J. W., 1965, "Self-Compensating Balancing in Rotating Mechanisms," *Design News*, pp. 234~239.
- (3) Jinnouchi, Y., Araki, Y., Inoue, J., Ohtsuka, Y. and Tan, C., 1993, "Automatic Balancer (Static Balancing and Transient Response of a Multiball Balancer)," *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 59, pp. 79~84.
- (4) Lee, J., 1995, "An Analytical Study of Self-Compensating Dynamic Balancer with Damping Fluid and Ball," *Shock and Vibration*, Vol. 2, No. 1, pp. 59~67.
- (5) Lee, J. and Van Moorhem, W. K., 1996, "Analytical and Experimental Analysis of a Self-Compensating Dynamic Balancer in a Rotating Mechanism," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, pp. 468~475.
- (6) Chung, J. and Ro, D. S., 1999, "Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1035~1056.
- (7) Hwang, C. H. and Chung, J., 1999, "Dynamic Analysis of an Automatic Ball Balancer with Double Races," *JSME International Journal*, Vol. 42, No. 2, pp. 265~272.
- (8) Chung, J. and Lee, J. M., 1994, "A New Family of Explicit Time Integration Methods for Linear and Non-Linear Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3961~3976.

부 록

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1+n\bar{m} & 0 & -\bar{m}\bar{R}_i S_i^i & \cdots & -\bar{m}\bar{R}_i S_p^i & -\bar{m}\bar{R}_m S_1^m & \cdots & -\bar{m}\bar{R}_m S_q^m & -\bar{m}S_1^o & \cdots & -\bar{m}S_s^o \\ 0 & (1+n\bar{m})\bar{r} & -\bar{m}\bar{R}_i C_i^i & \cdots & -\bar{m}\bar{R}_i C_p^i & -\bar{m}\bar{R}_m C_1^m & \cdots & -\bar{m}\bar{R}_m C_q^m & -\bar{m}C_1^o & \cdots & -\bar{m}C_s^o \\ -S_i^i & -\bar{r}C_i^i & \bar{R}_i & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_p^i & -\bar{r}C_p^i & 0 & \cdots & \bar{R}_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -S_1^m & -\bar{r}C_1^m & 0 & \cdots & 0 & \bar{R}_m & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_q^m & -\bar{r}C_q^m & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \bar{R}_m & 0 & \cdots & 0 \\ -S_1^o & -\bar{r}C_1^o & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_s^o & -\bar{r}C_s^o & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 $n = p + q + s$ 이며,

$$S_j^i = \sin(\phi_j^i + \psi), \quad S_j^m = \sin(\phi_j^m + \psi), \quad S_j^o = \sin(\phi_j^o + \psi), \quad C_j^i = \cos(\phi_j^i + \psi), \quad C_j^m = \cos(\phi_j^m + \psi), \quad C_j^o = \cos(\phi_j^o + \psi)$$

$$\bar{\mathbf{N}} = \{\bar{N}_r, \bar{N}_\psi, \bar{N}_{\phi_1^i}, \dots, \bar{N}_{\phi_p^i}, \bar{N}_{\phi_1^m}, \dots, \bar{N}_{\phi_q^m}, \bar{N}_{\phi_1^o}, \dots, \bar{N}_{\phi_s^o}\}^T$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{N}_r = & -(1+n\bar{m})\bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi})^2 + 2\zeta\bar{r} + \bar{r} - \varepsilon\bar{\omega}^2 \cos\psi - \bar{m}\bar{R}_i \sum_{j=1}^p (\dot{\phi}_j^i + \bar{\omega})^2 \cos(\psi + \phi_j^i) - \bar{m}\bar{R}_m \sum_{j=1}^q (\dot{\phi}_j^m + \bar{\omega})^2 \cos(\psi + \phi_j^m) \\ & - \bar{m} \sum_{j=1}^s (\dot{\phi}_j^o + \bar{\omega})^2 \cos(\psi + \phi_j^o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_\psi = & -2(1+n\bar{m})\bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi}) - 2\zeta\bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi}) + \varepsilon\bar{\omega}^2 \sin\psi + \bar{m}\bar{R}_i \sum_{j=1}^p (\dot{\phi}_j^i + \bar{\omega})^2 \sin(\psi + \phi_j^i) + \bar{m}\bar{R}_m \sum_{j=1}^q (\dot{\phi}_j^m + \bar{\omega})^2 \sin(\psi + \phi_j^m) \\ & + \bar{m} \sum_{j=1}^s (\dot{\phi}_j^o + \bar{\omega})^2 \sin(\psi + \phi_j^o) \end{aligned}$$

$$\bar{N}_{\phi_j} = \frac{\beta}{\bar{R}_i} \dot{\phi}_j^i + \bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi})^2 \sin(\psi + \phi_j^i) + 2\dot{\bar{r}}(\bar{\omega} - \dot{\psi}) \cos(\psi + \phi_j^i), \quad j=1,2,\dots,p$$

$$\bar{N}_{\phi_j^m} = \frac{\beta}{\bar{R}_m} \dot{\phi}_j^m + \bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi})^2 \sin(\psi + \phi_j^m) + 2\dot{\bar{r}}(\bar{\omega} - \dot{\psi}) \cos(\psi + \phi_j^m), \quad j=1,2,\dots,q$$

$$\bar{N}_{\phi_j^o} = \beta \dot{\phi}_j^o + \bar{r}(\bar{\omega} - \dot{\psi})^2 \sin(\psi + \phi_j^o) + 2\dot{\bar{r}}(\bar{\omega} - \dot{\psi}) \cos(\psi + \phi_j^o), \quad j=1,2,\dots,s$$

각 레이스에 불이 하나라고 가정하면 즉, $p=q=s=1$

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} 1+3\bar{m} & 0 & -\bar{m}\bar{R}_i S_{01}^i & -\bar{m}\bar{R}_m S_{01}^m & -\bar{m}S_{01}^o \\ 0 & (1+3\bar{m})\bar{r} & -\bar{m}\bar{R}_i C_{01}^i & -\bar{m}\bar{R}_m C_{01}^m & -\bar{m}C_{01}^o \\ -S_{01}^i & -\bar{r}_0 C_{01}^i & \bar{R}_i & 0 & 0 \\ -S_{01}^m & -\bar{r}_0 C_{01}^m & 0 & \bar{R}_m & 0 \\ -S_{01}^o & -\bar{r}_0 C_{01}^o & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 2\zeta & 2(1+3\bar{m})\bar{\omega}\bar{r}_0 & -2\bar{m}\bar{R}_i\bar{\omega}C_{01}^i & -2\bar{m}\bar{R}_m\bar{\omega}C_{01}^m & -2\bar{m}\bar{\omega}C_{01}^o \\ -2(1+3\bar{m})\bar{\omega} & 2\zeta\bar{r}_0 & 2\bar{m}\bar{R}_i\bar{\omega}S_{01}^i & 2\bar{m}\bar{R}_m\bar{\omega}S_{01}^m & 2\bar{m}\bar{\omega}S_{01}^o \\ 2\bar{\omega}C_{01}^i & -2\bar{\omega}\bar{r}_0S_{01}^i & \beta/\bar{R}_i & 0 & 0 \\ 2\bar{\omega}C_{01}^m & -2\bar{\omega}\bar{r}_0S_{01}^m & 0 & \beta/\bar{R}_m & 0 \\ 2\bar{\omega}C_{01}^o & -2\bar{\omega}\bar{r}_0S_{01}^o & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 1-(1+3\bar{m})\bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^2[\bar{m}(\bar{R}_i S_{01}^i + \bar{R}_m S_{01}^m + S_{01}^o) + \bar{\varepsilon} \sin \psi_0] & \bar{m}\bar{R}_i\bar{\omega}^2 S_{01}^i & \bar{m}\bar{R}_m\bar{\omega}^2 S_{01}^m & \bar{m}\bar{\omega}^2 S_{01}^o \\ -2\zeta\bar{\omega} & \bar{\omega}^2[\bar{m}(\bar{R}_i C_{01}^i + \bar{R}_m C_{01}^m + C_{01}^o) + \bar{\varepsilon} \cos \psi_0] & \bar{m}\bar{R}_i\bar{\omega}^2 C_{01}^i & \bar{m}\bar{R}_m\bar{\omega}^2 C_{01}^m & \bar{m}\bar{\omega}^2 C_{01}^o \\ \bar{\omega}^2 S_{01}^i & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^i & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^i & 0 & 0 \\ \bar{\omega}^2 S_{01}^m & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^m & 0 & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^m & 0 \\ \bar{\omega}^2 S_{01}^o & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^o & 0 & 0 & \bar{\omega}^2 \bar{r}_0 C_{01}^o \end{bmatrix}$$

여기서

$$S_{01}^i = \sin(\phi_{01}^i + \psi_0), \quad S_{01}^m = \sin(\phi_{01}^m + \psi_0), \quad S_{01}^o = \sin(\phi_{01}^o + \psi_0), \quad C_{01}^i = \cos(\phi_{01}^i + \psi_0), \quad C_{01}^m = \cos(\phi_{01}^m + \psi_0), \\ C_{01}^o = \cos(\phi_{01}^o + \psi_0)$$