덮개 함수를 이용한 제한 조건 누적 최적화 기법에 관한 연구

이 정 준*· 이 병 채†

(2001년 6월 30일 접수, 2001년 12월 5일 심사완료)

A Study on Constraint Accumulation in Mathematical Programming Problems Using Envelope Functions

Jeong Joon Lee and Byung Chai Lee

Key Words : Optimal Design(최적설계), Constraint Accumulation(제한조건 누적), Envelope Function (덮개 함수), Kreisselmeier-Steinhauser Function(KS 함수)

Abstract

Automated design of large structures requ ires efficient and accurate optimization algorithms because of a large number of design variables and design constraints. The objective of this study is to examine the characteristics of the Kreisselmeier -Steinhauser envelope function and to investigate va lidity of accumulating constraint functions into a small number of constraint functions or even into a single constraint function. The commercial package DOT is adopted as a local optimizer. The optimum results using the envelope function are compared with those of the conventional method for a number of numerical examples and the differences between them are shown to be negligible.

1. 서 론

대형 구조물의 최적설계에서는 구조 해석기법과 최적설계 알고리즘을 통합하여 설계를 수행하게 되므로, 단순한 구조물의 최적설계 문제나 수학적인 최적설계 문제에 비해 설계변수와 제한조건의 개수는 훨씬 많아지게 된다. 대개 선형 해석의 경우 모든 구조부재에 대한 파괴 조건 및 굽힘·비틀림 강성, 고유진동수, 좌굴 하중 등과 같이 다양한 제한조건을 고려하고 있다. 또, 실제적인 구조물을 최적설계할 때 대략 수백개의 설계변수와 수천개의 내연적인 제한 조건을 포함하고 있다. 설계변수의 개수가 작은 경우, 수학적 기법을 통해 최적설계 문제를 풀면 상당히 효율적이지만, 설계변수의 개수가 많아지면 이와 같은 방식으로 최적설계 문제를 해결하는 것은 어려워진다. 지금까지 연구자들은 설계변수 연계(linking)를 통해 독립적인 설계변수의 개수를 감소시키거나, 제한조건 소거(deletion) 기법을 통해 제한조건의 개수를 감소시키고, 제한조건 근사 개념을 이용하여 유한요소 해석 회수를 줄이는 등 최적 설계 수식을 바꿔 효율을 높이려 하였다. 설계변수 연계 기법은 각 설계 변수들이 설계 단계에서 어떤 방식으로 변화할지에 대한 정보가 없기 때문에 설계자의 선택에 의존해야 한다는 단점이 있다. 또, 수치적 비용을 줄이기 위해 활성화된 제한조건만을 고려해야 하지만, 너무 작은 개수만 고려한다면 진동이 발생할 수도 있고, 너무 많은 개수를 고려하면 민감도 계산 비용이 증가하게 될 것이다.[1]

여기서는 KS 함수라 불리우는 덮개(envelope) 함수를 이용하여 제한 조건이 많은 최적설계 문제를 제한조건 개수가 적은 최적설계 문제로 단순화 시킬 수 있는지에 대해 기술하고자 한다. 기존의 연구자들은 이 함수를 도입하고 근사화 기법을 이용하여 부문제 해결 방법 및 효율적인 알고리즘을 제안하였다.[3~6] 그러나, KS 함수를 이용하여 최적설계 문제를 새롭게 구성하면 어떤 장점이 있고, 어떤 특성을 보이게 되는지에 대해서는 논의된 바

* 한국과학기술원 기계공학과
† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : bclee@mail.kaist.ac.kr
TEL : (042) 869-3031 FAX : (042) 869-3095

가 없었다. 본 논문에서는 이에 대한 기초 연구로서 KS 함수의 특성 및 최적화 기법에의 적용을 검토해 보고자 한다.

2. KS 함수

2.1 KS 함수를 이용한 기존의 연구

KS 함수는 Kreisselmeier 와 Steinhause 가 처음으로 도입하여 전투기의 강건제어 루프 설계에 이용한 이후 다계층 최적설계 분야에서 누적 제한조건(cumulative constraint)을 구성하는 데 이용되었다.[2] Sobieski, James, Dovi 는 최적 설계 문제를 부문제와 상위 수준의 조정 문제로 분해하는 방법을 도입하였는데, 누적 제한조건을 구성하여 각 요소에서의 제한조건 위반 여부를 판정하였다. 또, 이를 이용하여 각 요소에서의 민감도를 요소 강성과 요소 내 힘으로 표현할 수 있음을 보였다.[3] 또, Sobieski, James, Riley 는 구조를 여러 부구조 계층으로 나누었는데, 각 부구조는 부시스템에 해당되도록 하였다. 여기에서는 가장 세분화된 계층에서 제한조건의 위반을 누적 제한조건으로 판정하였다.[4] Barthelemy 와 Riley 는 제한조건 근사와 잠정적 제한조건 제거 방법을 통해 다계층 최적설계의 효율을 향상시키는 방법을 제안하였고, KS 함수의 사용자 정의 파라미터를 결정하는 방법도 제안하였다. 이들은 평면 트러스 구조물에 제안한 방법을 적용하여 좋은 결과를 얻었다.[5] Sethi 와 Striz 는 강도, 변위, 치수 제한조건이 동시에 부과되는 구조의 무게 최적화 문제에 대해서 KS 함수를 이용하여 수치적 효율 향상과 성능 개선을 꾀하였다. 이들 역시 트러스 구조물에 대해 검증하였는데, 컴퓨터의 작업 공간과 계산 소요 시간을 줄이면서 정확한 해를 얻을 수 있음을 보였다.[6] Renwei 와 Shaojun 은 KS 함수와 2 점 근사 함수, 다계층 근사 기법을 이용하여 구조 최적화 문제를 준해석적으로 해결하는 것을 제안하였다.[7]

2.2 KS 함수의 형태 및 특징

일반적인 최적설계 문제를 다음과 같이 수학적으로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad f(\mathbf{X}) \\ &\textit{subject to} \quad g_j(\mathbf{X}) \le 0 \quad j = 1, \cdots, m \\ &\qquad \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, X 는 설계변수 벡터로서 n 차원 벡터이고, $\underline{x}_i$ 와 $\overline{x}_i$ 는 각각 설계변수 x_i 의 하한과 상한을 나타낸다. 여기서, 각 설계점에서의 제한조건 최대값을

$$g_{\max} = \max(g_1, g_2, \cdots, g_m) \tag{2}$$

라 하면, 사용자가 정할 수 있는 양의 파라미터 p 에 대해서,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}) &= \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^{m} \exp\left[p g_j(\mathbf{X}) \right] \right\} \\ &= g_{\max}(\mathbf{X}) + \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^{m} \exp\left[p \left(g_j(\mathbf{X}) - g_{\max}(\mathbf{X}) \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

인 KS 함수 E(X)를 정의할 수 있다. E(X)의 형태는 순차적 비제약 최소화 기법(sequentially unconstrained minimization technique)에서 쓰이는 벌칙 항과 비슷한 개념이라고 파악할 수 있다. E(X)를 이용하면, 식 (1)과 같은 일반적인 최적설계 문제를 다음과 같이 제한조건이 하나이거나 또는 원래 문제보다 더 적은 개수의 제한조건이 있는 최적설계 문제로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\textit{minimize} \quad f(\mathbf{X}) \\ &\textit{subject to} \quad E(\mathbf{X}) \le 0 \\ &\qquad \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 KS 함수 E(X)는 다음의 범위에 있게 된다.

$$g_{\max} \le E(\mathbf{X}) \le g_{\max} + (1/p)\ln(m) \tag{5}$$

즉, KS 함수는 최대 제한조건에 따르는 덮개 함수가 되어, p 가 커질수록 $g_{\max}$ 에 가까워지게 된다.

일차 미분값을 이용하는 수학적 최적설계 기법에서 필요한 설계변수에 대한 민감도는,

$$\frac{dE(\mathbf{X})}{dx_k} = \sum_{j=1}^{m} \exp\left[p\left(g_j - E(\mathbf{X}) \right) \right] \frac{dg_j}{dx_k} \tag{6}$$
$$(k = 1, \cdots, n)$$

가 된다. 이로부터 사용자 정의 파라미터 p 가 커질수록 민감도는 $dg_{\max}/dx_k$ 에 지배받게 됨을 알 수 있다. 그런데, $dg_{\max}/dx_k$ 는 불연속 함수이므로, 최적화 기법 중 민감도에 근거한 방법에서는 문제가 발생할 수도 있다.

p 의 값은 $g_{\max}$ 에 대한 근사정도와 불연속적인 민감도의 고려 정도에 따라 적절히 선택해야 하는데, 다음과 같이 선택하면 적절하다고 알려져 있다.[5] 최적화 기법에서의 제한조건의 활성화를 판정하는 ε 에 대해 p 의 값은

$$p = \frac{\ln(m)}{\varepsilon} \tag{7}$$

이고, 여기서 m 은 식 (1)과 같은 최적설계 정식화에서의 제한조건 개수를 나타낸다. 이 경우, E(X)가 활성화되었다는 것은 E(X)를 구성하는 원 문제의 제한조건 중 가장 큰 제한조건이 활성화되었다는 것과 동일한 의미이다.

식 (3)과 식 (6)을 살펴보면 덮개함수 값의 계산과 이의 민감도 계산에 덮개함수를 구성하는 모든 함수의 함수값과 민감도가 각각 필요함을 알 수 있다. 즉, 덮개 함수를 구성하여 하나의 조건으로 줄인 것만으로는 최적화 기법의 효율이 개선되지 않을 것이다. 한편, 가장 큰 구성함수 값이 덮개함수 값에 가장 큰 영향을 끼치고 그 값이 최대값에서 차이가 날수록 영향도는 급격히 감소한다. 따라서, 실제로 덮개 함수를 이용해 제한 조건을 단순화할 때 최대값에서 일정 밴드를 부여하고 그보다 작은 구성함수, 즉, 제한조건은 무시해도 괜찮을 것이다. 이는 보통, 최적화 기법에서 사용되고 있는 ε - 활성화(ε-active) 개념을 별 무리없이 적용할 수 있음을 의미한다.

덮개함수를 이용하여 제한조건을 누적하는 방법은 전술한 바와 같이 보통의 최적화 문제에서는 큰 장점이 없다. 그러나, 각 제한조건의 평가에 별개의 시스템 해석이 요구되는 문제에서는 제한조건을 통합하여 수를 줄임으로써 최적화 기법의 효율을 크게 향상시킬 수 있을 것이다. 이러한 문제의 대표적 예로 구조물의 강건 최적 설계를 들 수 있다.

최근, 강건 최적 설계에서 제한조건을 위반할 확률의 상한값을 규정하는 방법으로 제한조건의 강건성을 확보하고 있다.[8] 각 제한조건의 위반 확률을 구하기 위해서는 랜덤 변수가 변했을 때의 시스템 거동을 구해야 하고 근사기법을 적용한다고 해도 매우 많은 회수의 시스템해석이 필요하게 된다. 이 때 제한 조건을 통합하여 하나로 하면 이 통합된 제한조건의 위반확률을 계산하기 위한 랜덤 변수 변동 해석이 필요하게 되고 전체 축차의 효율이 크게 변하지 않는다면 계산량을 크게 줄일 수 있게 된다.

본 논문에서는 강건 최적설계를 위한 제한조건 통합에 앞서, 보통의 다양한 최적 설계 문제에 제한조건 누적 기법을 적용해 봄으로써 제한조건 통합에 따른 최적화 기법의 특성 변화를 살펴보려 한다.

3. 수치 예제

본 논문에서 채택한 수치예제들의 설계변수의 수는 3~15 개이고, 제한조건의 수는 5~38 개인데, 설계변수의 상,하한 제한조건 개수는 제한조건의 개수에 포함시키지 않았다. 각각의 문제마다 참고문헌의 최적해를 제한조건 누적에 의한 최적해와 함께 Table 1 ~ Table 8 에 제시하였다. 또, 각각의 수치예제들은 식 (1)과 같이 변환되었으며, 제한조건 함수는 정규화(normalization)되어 프로그램에 이용되었다. 수치실험에는 상용 최적설계 프로그램인 DOT 를 이용하였다.[12] 결과를 제시한 표에서 식 (1)의 정식화 최적해는 전통적인 방법에 의한 최적해(by conventional method)로 표현하였으며, 참고문헌의 해와 문헌에 제시된 초기값도 본문에 기술하였다. 또, 식 (4)의 정식화 최적해는 KS 함수를 이용한 최적해(Using KS function)로 기술하였다. 표의 간편성을 위해, 설계 변수와 제한조건 중 전통적인 최적해와 KS 함수 최적해 사이의 차이가 많이 나거나, 제한조건의 만족성이 상대적으로 작은 제한조건과 활성화 제한조건 등만을 제시하였다. 사용자 정의 파라미터 p 는 식 (7)의 ε이 0.03 인 경우로 하였으며, ε이 다른 경우에는 본문에 기술하였다.

3.1 설계변수가 8 개 이하인 수치예제

3.1.1 수치예제 1

자세한 문제의 구성은 참고문헌 (9)에 기술되어 있다. 설계 변수는 7 개이며, 제한조건 개수는 11 개이다. 목적함수 및 제한조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건은 다음과 같으며, 결과는 Table 1 에 제시되어 있다.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) = {} & 0.7854x_1x_2^2\left(3.3333x_3^2 + 14.9333x_3 - 43.0934\right) \\ & -1.508x_1\left(x_6^2 + x_7^2\right) + 7.477\left(x_6^3 + x_7^3\right) \\ & +0.7854\left(x_4x_6^2 + x_5x_7^2\right) \end{aligned}$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 27/x_1x_2^2x_3 - 1 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 397.5/x_1x_2^2x_3^2 - 1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{X}) = 1.93x_4^3/x_2x_3x_6^4 - 1 \le 0$$

$$g_4(\mathbf{X}) = 1.93x_5^3/x_2x_3x_7^4 - 1 \le 0$$

$$g_5(\mathbf{X}) = \sqrt{\left(\frac{745x_4}{x_2x_3}\right)^2 + 16.9\times10^6} \Big/ 0.1x_6^3 \le 1100$$

$$g_6(\mathbf{X}) = \sqrt{\left(\frac{745x_5}{x_2x_3}\right)^2 + 157.5\times10^6} \bigg/ 0.1x_7^3 \le 850$$

$$g_7(\mathbf{X}) = x_2x_3 \le 40$$

$$g_8(\mathbf{X}) = 5 - x_1/x_2 \le 0$$

$$g_9(\mathbf{X}) = x_1/x_2 - 12 \le 0$$

$$g_{10}(\mathbf{X}) = (1.5x_6 + 1.9)/x_4 - 1 \le 0$$

$$g_{11}(\mathbf{X}) = (1.1x_7 + 1.9)/x_5 - 1 \le 0$$

$$2.6 \le x_1 \le 3.6 \ , \ 0.7 \le x_2 \le 0.8 \ , \ 17 \le x_3 \le 28 \ ,$$
$$7.3 \le x_4 \le 8.3 \ , \ 7.3 \le x_5 \le 8.3 \ , \ 2.9 \le x_6 \le 3.9 ,$$
$$5.0 \le x_7 \le 5.5$$

참고문헌에 제시된 최적해는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^* = (3.5 \ 0.7 \ 17.0 \ 7.3 \ 7.3 \ 3.35 \ 5.29)^T ,$$
$$f^* = 2985.22$$

Table 1 의 결과는 DOT 의 수정 가용 방향법을 이용하여 얻었으며, KS 함수를 이용한 경우 목적함수는 약간 증가하였지만, 설계점의 경향과 제한조건의 만족성 등은 변화하지 않았음을 알 수 있다. 또, KS 함수를 이용한 경우 함수계산 회수는 약 2 배 증가하였다.

Table 1 The optimization results for the test problem 1

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	2994.0	3032.9
x_1	3.500	3.525
x_4	7.300	7.772
x_5	7.712	8.031
x_6	3.348	3.379
x_7	5.287	5.302
E(X)		0.0028
g_{max}	0.0020	-0.0072
g_1	-0.0739	-0.0806
g_5	0.0020	-0.0246
g_6	-0.0002	-0.0086
g_8	0.0000	-0.0072
g_{10}	-0.0518	-0.1033
g_{11}	0.0000	-0.0372
No. of Function Calls	83	178

3.1.2 수치예제 2

참고문헌 (10)의 67 번 문제로서 설계변수는 3 개,제한조건 개수는 14 개이다. 목적함수 및 제한조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건은 다음과 같으며, 결과는 Table 2 에 제시되어 있다. 또, 목적함수 및 제한조건 함수의 정의에 필요한 자료는 부록에 수록하였다.

$$f(\mathbf{X}) = -0.063y_2(\mathbf{X})y_5(\mathbf{X}) + 5.04x_1 + 3.36y_3(\mathbf{X})$$
$$+ 0.035x_2 + 10x_3$$

where $y_i(\mathbf{X})$: *cf. appendix*

$$g_i(\mathbf{X}) = a_i - y_{i+1}(\mathbf{X}) \le 0 \ , \ i = 1,\cdots,7$$

$$g_i(\mathbf{X}) = y_{i-6}(\mathbf{X}) - a_i \le 0 \ , \ i = 8,\cdots,14$$

where a_i : *cf. appendix*

$$10^{-5} \le x_1 \le 2\times10^3 \ , \ 10^{-5} \le x_2 \le 1.6\times10^4$$
$$10^{-5} \le x_3 \le 1.2\times10^2$$

문헌에서 제시된 초기값은 $(1745, 12000, 110)^T$이고, 최적해에서의 설계변수 벡터는 $(1728, 16000, 98.14)^T$이고 목적함수 값은 –1162 이다.

DOT 의 순차 선형 계획법을 이용하여 Table 2 의 결과를 얻었다. KS 함수를 이용한 경우 함수계산 회수는 감소하였으나 목적함수는 전통적인 최적해에 비해 20%정도 크게 나타났으며, 최적설계점도 전통적인 최적 설계에 의한 설계점과 달랐다 KS 함수를 이용할 때 세번째 설계변수 x_3 의 초기값에 따라 최적설계점의 변화가 큰 편이었다. 초기점을 적절히 변화시켜서 전통적인 최적해와 비슷한 경향의 설계점을 얻었는데, 이 경우 함수 계

Table 2 The optimization results for the test problem 2

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	-1162	-919
x_1	1729	1357
x_2	15987	12924
x_3	99.0	80.0
E(X)		-0.0005
g_{max}	0.0014	-0.0047
g_9	0.0014	-0.2167
g_{11}	-0.081	-0.0047
No. of Function Calls	76	42

산 회수 및 목적함수와 제한조건의 만족성은 큰 차이가 없었다.

3.1.3 수치예제 3

참고문헌 (10)의 85 번 문제로서 설계변수는 5 개, 제한조건 개수는 38 개이다.

목적함수 및 제한조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건은 다음과 같으며, 결과는 Table 3 에 제시되어 있다. 목적함수와 제한조건 함수를 정의하는데 필요한 자료는 부록에 수록하였다.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) = & -5.843\times10^{-7} y_{17}(\mathbf{X}) + 1.17\times10^{-4} y_{14}(\mathbf{X}) \\ & + 2.358\times10^{-5} y_{13}(\mathbf{X}) + 1.502\times10^{-6} y_{16}(\mathbf{X}) \\ & + 0.032 y_{12}(\mathbf{X}) + 0.00423 y_5(\mathbf{X}) \\ & + 1e-4 c_{15}(\mathbf{X})/c_{16}(\mathbf{X}) + 37.48 y_2(\mathbf{X})/c_{12}(\mathbf{X}) \\ & - 0.1365 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_1(\mathbf{X}) = x_3 - 1.5x_2 \le 0 \\ & g_2(\mathbf{X}) = 213.1 - y_1(\mathbf{X}) \le 0 \\ & g_3(\mathbf{X}) = y_1(\mathbf{X}) - 405.23 \le 0 \\ & g_j(\mathbf{X}) = a_{j-2} - y_{j-2}(\mathbf{X}) \le 0 \;\;,\; j = 4,\cdots,19 \\ & g_j(\mathbf{X}) = y_{j-18}(\mathbf{X}) - b_{j-18} \le 0 \;\;,\; j = 20,\cdots,35 \\ & g_{36}(\mathbf{X}) = 0.28/0.72 y_5(\mathbf{X}) - y_4(\mathbf{X}) \le 0 \\ & g_{37}(\mathbf{X}) = 3496 y_2(\mathbf{X})/c_{12}(\mathbf{X}) - 21 \le 0 \\ & g_{38}(\mathbf{X}) = y_1(\mathbf{X}) - 62212/c_{17}(\mathbf{X}) + 110.6 \le 0 \\ & \textit{where } y_j(\mathbf{X}), c_j(\mathbf{X}), a_j, b_j \;:\; \textit{cf. appendix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 704.4148 \le x_1 \le 906.3855 \;\;,\;\; 68.6 \le x_2 \le 288.88 \\ & 0 \le x_3 \le 134.75 \;,\; 193 \le x_4 \le 287.0966 \;, \\ & 25 \le x_5 \le 84.1988 \end{aligned}$$

참고문헌에 제시된 설계변수 초기값은 $(900,80, 115,267,27)^T$ 이고 최적해는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^* = \left(705.2 \;\; 68.60 \;\; 102.9 \;\; 282.3 \;\; 37.59\right)^T$$
$$f^* = -1.905$$

Table 3 에서 참고문헌에서 제시된 최적 목적함수 값과 DOT 의 순차 선형 계획법을 이용하여 구한 전통적인 최적 목적함수 값이 약간 다른데, 이것은 목적함수가 설계변수의 수치적 오차에 민감하기 때문으로 추정된다. 제한조건 개수는 38 개이지만 활성화 제한조건은 3 개이며, KS 함수를 이용하였을 경우, 목적함수는 약간 증가하였고 설계변수 벡터에서 x_5 를 제외한 나머지 설계변수는 비슷한 값을 보였고, 제한조건의 만족성은 크게 변화하지 않았다. 그러나, 함수계산 회수는 4 배 가량 증가하였다.

Table 3 The optimization results for the test problem 3

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	-2.209	-2.069
x_1	705.5	752.0
x_2	68.6	68.6
x_3	102.9	103.8
x_4	282.3	277.1
x_5	37.6	28.6
E(X)		0.0030
g_{max}	0.0000	-0.0037
g_2	-0.00003	-0.0043
g_{34}	0.0000	-0.0166
g_{35}	-0.0057	-0.0166
g_{37}	0.0000	-0.0037
g_{38}	0.0000	-0.2464
No. of Function Calls	43	160

3.1.4 수치예제 4

참고문헌 (10)의 104 번 문제로서 설계변수는 8 개, 제한조건 개수는 6 개이다. 목적함수 및 제한조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건 및 참고문헌에 제시된 최적해는 아래에 나타내었다.

$$\begin{aligned} & f(X) = 0.4x_1^{0.67}/x_7^{0.67} + 0.4x_2^{0.67}/x_8^{0.67} + 10 - x_1 - x_2 \\ & g_1(\mathbf{X}) = 0.1x_1 + 0.0588x_5x_7 - 1 \le 0 \\ & g_2(\mathbf{X}) = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.0588x_6x_8 - 1 \le 0 \\ & g_3(\mathbf{X}) = 4x_3/x_5 + 2/x_3^{0.71}x_5 + 0.0588x_7/x_3^{1.3} - 1 \le 0 \\ & g_4(\mathbf{X}) = 4x_4/x_6 + 2/x_4^{0.71}x_6 + 0.0588x_8/x_4^{1.3} - 1 \le 0 \\ & g_5(\mathbf{X}) = 1 - f(\mathbf{X}) \le 0 \\ & g_6(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - 4.2 \le 0 \\ & 0.1 \le x_i \le 10 \;\;,\;\; i = 1,\cdots,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* = (& \; 6.465 \;\; 2.233 \;\; 0.6674 \;\; 0.5958 \;\; 5.933 \\ & \; 5.527 \;\; 1.013 \;\; 0.4007 \;)^T \end{aligned}$$
$$f^* = 3.951$$

참고문헌에 제시된 설계변수의 초기값은 $(6, 3, 0.4, 0.2, 6, 6, 1, 0.5)^T$ 이다. DOT 의 수정 가용 방향법을 이용한 최적해 결과는 Table 4 에 제시되어 있고, ε은 0.004 로 택하였다. 다른 수치 예제들과 비슷하게 KS 함수를 이용하였을 때 목적 함수는

Table 4 The optimization results for the test problem 4

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	3.951	4.037
x_1	6.24	5.90
x_2	2.48	2.86
x_4	0.59	0.39
x_5	5.95	6.06
x_6	5.52	5.94
x_7	1.07	1.15
E(X)		0.0030
g_{max}	0.0029	0.0024
g_1	0.0002	-0.0013
g_2	0.0000	0.0024
g_4	0.0002	-0.0114
No. of Function Calls	124	234

약간 증가하였지만 설계변수는 유사한 경향을 보였고, 함수계산 회수는 2 배 가량 증가하였다.

3.2 설계변수가 10 개 이상인 수치예제

3.2.1 수치예제 5

참고문헌 (10)의 118 번 문제로서 설계변수는 15 개, 제한조건 개수는 29 개이다. 목적함수 및 제한 조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건은 다음과 같다.

$$f(\mathbf{X})=\sum_{k=0}^{4}(2.3x_{3k+1}+0.0001x_{3k+2}^2+1.7x_{3k+2}$$
$$+0.0001x_{3k+2}^2+2.2x_{3k+3}+0.00015x_{3k+3}^2)$$

$$g_{6j-5}(\mathbf{X})=-\left(x_{3j+1}-x_{3j-2}\right)/7-1\le 0$$
$$g_{6j-4}(\mathbf{X})=\left(x_{3j+1}-x_{3j-2}\right)/6-1\le 0$$
$$g_{6j-3}(\mathbf{X})=-\left(x_{3j+2}-x_{3j-1}\right)/7-1\le 0$$
$$g_{6j-2}(\mathbf{X})=\left(x_{3j+2}-x_{3j-1}\right)/7-1\le 0$$
$$g_{6j-1}(\mathbf{X})=-\left(x_{3j+3}-x_{3j}\right)/7-1\le 0$$
$$g_{6j}(\mathbf{X})=\left(x_{3j+3}-x_{3j}\right)/6-1\le 0$$
$$\textit{where}\quad j=1,2,3,4$$
$$g_{25}(\mathbf{X})=-\left(x_1+x_2+x_3\right)/60+1\le 0$$
$$g_{26}(\mathbf{X})=-\left(x_4+x_5+x_6\right)/50+1\le 0$$
$$g_{27}(\mathbf{X})=-\left(x_7+x_8+x_9\right)/70+1\le 0$$

Table 5 The optimization results for the test problem 5

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	665.3	684.0
x_{10}	8.98	13.5
x_{11}	64.0	57.5
x_{13}	12.9	18.4
x_{14}	71.0	62.6
E(X)		0.0030
g_{max}	0.0026	-0.0015
g_8	0.0000	-0.0180
g_{12}	-0.0025	-0.0187
g_{18}	0.0000	-0.1617
g_{27}	0.0000	-0.0027
g_{28}	0.0000	-0.0021
g_{29}	0.0000	-0.0015
No. of Function Calls	406	605

$$g_{28}(\mathbf{X})=-\left(x_{10}+x_{11}+x_{12}\right)/85+1\le 0$$
$$g_{29}(\mathbf{X})=-\left(x_{13}+x_{14}+x_{15}\right)/100+1\le 0$$

$$8\le x_1\le 21\ ,\ \ 43\le x_2\le 57\ ,\ \ 3\le x_3\le 16\ ,$$
$$0\le x_{3k+1}\le 90,\ \ 0\le x_{3k+2}\le 120,\ \ 0\le x_{3k+3}\le 60$$
$$(k=1,\cdots,4)$$

참고문헌에 제시된 설계변수의 초기값은 (20, 55, 15, 20, 60, 20, 20, 60, 20, 20, 60, 20, 20, 60, 20)^{T}이고, 최적 설계점과 목적함수값은 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^*=(\ 8\ \ 49\ \ 3\ \ 1\ \ 56\ \ 0\ \ 1\ \ 63\ \ 6\ \ 3\ \ 70\ \ 12\ \ 5\ \ 77\ \ 18\ )^T$$
$$f^*=664.8$$

DOT 의 수정 가용 방향법을 이용한 최적설계 결과는 Table 5 에 제시되어 있다. 이 수치예제의 제한조건 함수는 모두 선형 함수이고 목적함수는 이차 함수이다. 활성화 제한조건의 개수가 다른 수치예제에 비해 많은 편이지만, 설계변수의 경향은 크게 차이 나지 않았고, KS 함수를 이용하였을 경우 최적해는 전통적인 최적해보다 약간 증가하였으며, 함수계산 회수는 1.5 배 가량 증가하였다. 여기서 ε은 0.013 으로 택하였다.

3.2.2 수치예제 6

참고문헌 (11)의 285 번 문제로서 설계변수는 15 개, 제한조건 개수는 10 개이다. 목적함수 및 제한 조건 함수는 다음과 같으며, 결과는 Table 6 에 제 시되어 있다.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{X}) = -(&486x_1 + 640x_2 + 758x_3 + 776x_4 + 477x_5 \\
&+ 707x_6 + 175x_7 + 619x_8 + 627x_9 + 614x_{10} \\
&+ 475x_{11} + 377x_{12} + 524x_{13} + 468x_{14} + 529x_{15})
\end{aligned}
$$

$$
g_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{15} a_{ij} x_j^2 - b_i \le 0 \quad , \ i = 1, \cdots, 10
$$

$$
\textit{where} \ \ a_{ij}, b_i \ : \ \textit{cf. appendix}
$$

제한조건을 정의하는 데 필요한 자료는 부록에 제시되어 있으며, 제한조건 함수는 이차 함수이고 목적함수는 설계변수의 선형 함수이다. 참고문헌에 제시된 설계변수의 초기값은 $(0, 0, \ldots, 0)^T$ 이고, 최적 설계점과 그 때의 목적함수 값은 다음과 같다.

$$
\mathbf{X}^* = (\ 1 \ \ 1 \ \cdots \ 1\ )^T \ , \quad f^* = -8252
$$

DOT 의 수정 가용 방향법을 이용한 최적설계 결과가 Table 6 에 나타나 있는데, 설계변수 벡터 중 x_7 을 제외한 다른 설계변수들은 비슷한 경향을 보였고, 목적함수 역시 크게 다르지 않았고, 함수계산 회수는 2 배 가량 증가하였다. 이 수치예제에서 ε은 0.025 로 택하였다.

Table 6 The optimization results for the test problem 6

	Optimum	
	by Conventional Method	*Using KS Function*
Object Function	-8265	-8160
x_2	0.98	0.92
x_5	1.02	0.95
x_7	0.81	0.53
x_{12}	1.08	1.01
E(X)		0.0029
g_{max}	0.0030	-0.0131
g_1	0.0009	-0.0402
g_3	0.0030	-0.0284
g_4	0.0007	-0.0231
g_6	0.0008	-0.0201
g_{10}	0.0014	-0.0131
No. of Function Calls	187	428

3.2.3 수치예제 7

참고문헌 (11)의 376 번 문제로서 설계변수는 10 개, 제한조건 개수는 16 개이다. 목적함수 및 제한 조건 함수, 설계변수의 상,하한 조건은 다음과 같다.

$$
f(\mathbf{X}) = -\frac{20000(0.15x_1 + 14x_2 - 0.06)}{0.002 + x_1 + 60x_2}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1(\mathbf{X}) &= 0.75/x_3x_4 - x_1 \le 0 \\
g_2(\mathbf{X}) &= x_9/x_4x_5 - x_1 \le 0 \\
g_3(\mathbf{X}) &= x_{10}/x_4x_6 - 10/x_4 - x_1 \le 0 \\
g_4(\mathbf{X}) &= 0.19/x_4x_7 - 10/x_4 - x_1 \le 0 \\
g_5(\mathbf{X}) &= 0.125/x_4x_8 - x_1 \le 0 \\
g_6(\mathbf{X}) &= 0.00131x_9x_5^{0.666}x_4^{1.5} - 10000x_2 \le 0 \\
g_7(\mathbf{X}) &= 0.001038x_{10}x_6^{1.6}x_4^3 - 10000x_2 \le 0 \\
g_8(\mathbf{X}) &= 0.000223x_7^{0.666}x_4^{1.5} - 10000x_2 \le 0 \\
g_9(\mathbf{X}) &= 0.000076x_8^{3.55}x_4^{5.66} - 10000x_2 \le 0 \\
g_{10}(\mathbf{X}) &= 0.000698x_3^{1.2}x_4^2 - 10000x_2 \le 0 \\
g_{11}(\mathbf{X}) &= 0.00005x_3^{1.6}x_4^3 - 10000x_2 \le 0 \\
g_{12}(\mathbf{X}) &= 0.00000654x_3^{2.42}x_4^{4.17} - 10000x_2 \le 0 \\
g_{13}(\mathbf{X}) &= 0.000257x_3^{0.666}x_4^{1.5} - 10000x_2 \le 0 \\
g_{14}(\mathbf{X}) &= 2.003x_4x_5 + 1.885x_4x_6 + 0.184x_4x_8 \\
&\qquad + 2x_4x_3^{0.803} - 30 \le 0 \\
g_{15}(\mathbf{X}) &= x_9 + x_{10} - 0.255 \le 0 \\
g_{16}(\mathbf{X}) &= -g_{15}(\mathbf{X}) \le 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
0 \le x_1 \le 10 & , \ 0 \le x_2 \le 0.1 \ , \\
5\times10^{-5} \le x_3 \le 8.1\times10^{-3} & , \ 10 \le x_4 \le 1000 \ , \\
5\times10^{-5} \le x_5 \le 1.7\times10^{-4} & , \ 5\times10^{-5} \le x_6 \le 1.3\times10^{-3} \ , \\
5\times10^{-5} \le x_7 \le 2.7\times10^{-3} & , \ 5\times10^{-5} \le x_8 \le 0.002 \ , \\
5\times10^{-5} \le x_9 \le 1 & , \ 5\times10^{-5} \le x_{10} \le 1
\end{array}
$$

참고문헌에 제시된 설계변수의 초기값은 $(10, 0.005, 0.0081, 100, 0.0017, 0.0013, 0.0027, 0.002, 0.15, 0.105)^T$ 이고, 최적 설계변수 및 목적함수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}^* = (&\ 0.147,\ 0.100,\ 0.0081,\ 629.\ 0.0017, \\
&\ 0.00118,\ 0.0027,\ 0.00135,\ 0.157,\ 0.0976\,)^T \\
f^* &= -4430
\end{aligned}
$$

최적해는 Table 7 에 제시되어 있는데, 전통적인 최적설계는 순차 선형 계획법을 이용한 결과이고, KS 함수를 이용한 최적설계 정식화 결과는 수정 가용 방향법을 이용한 결과이다. Table 7 에서 보는

Table 7 The optimization results for the test problem 7

	Optimum	
	by Conventional Method	Using KS Function
Object Function	-4269	-4269
x_1	0.927	0.925
x_2	0.100	0.100
x_3	0.0081	0.0081
x_4	100.0	100.0
E(X)		0.0006
g_{max}	0.0000	0.0005
g_1	-0.0017	0.0005
g_3	-0.0213	-0.0192
g_{15}	0.0000	0.0000
g_{16}	0.0000	0.0000
No. of Function Calls	80	141

바와 같이, 설계변수의 경향 및 제한조건의 만족성, 목적함수 값은 거의 유사하였고, 함수계산 회수는 2 배 가량 증가하였다. 여기서 ε은 0.0005 로 택하였다.

3.3 사용자 정의 파라미터 p 의 영향

KS 함수는 앞에서 살펴본 바와 같이 사용자가 정의해야 하는 양의 파라미터 p 를 포함하고 있다. 식 (7)과 같이 제안된 p 는 제한조건 활성화를 판정하는 수치 ε과 제한조건의 개수에 영향을 받는다.

수치 ε의 영향을 검토하기 위해 3.1.1 절에 제시된 수치예제에 대해 ε을 변화시켜 가면서 수치실험을 행하였다. 수치실험의 결과는 Table 8 에 나타내었다. 결과를 살펴보면 ε 이 0.005 ~ 0.05 사이의 범위일 때 전통적인 최적해와 비슷한 결과를 보임을 알 수 있는데, 이 때 p 의 범위는 대략 50 ~ 450

Table 8 Effects of the KS function parameter p on optimum

Method	by Conventional Method	Using KS Function							
ε		0.001	0.005	0.01	0.03	0.05	0.07	0.1	0.15
Object Function	2994.0		3040.3	3057.1	3032.9	3064.4	3098.2	3262.8	
X_1	3.500		3.490	3.510	3.525	3.550	3.592	3.600	
X_2	0.700		0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	
X_3	17.000		17.000	17.000	17.001	17.005	17.000	17.212	
X_4	7.300		7.740	7.778	7.772	7.780	7.850	8.300	
X_5	7.712		8.169	7.791	8.031	8.272	8.300	8.300	
X_6	3.348	Does not converge	3.467	3.549	3.379	3.400	3.419	3.558	Does not converge
X_7	5.287		5.294	5.285	5.302	5.318	5.336	5.457	
E(X)			0.0030	0.0027	0.0028	0.0027	0.0030	0.0030	
g_{max}	0.0020		0.0029	0.0011	-0.0072	-0.0144	-0.0264	-0.0286	
g_1	-0.0739		-0.0714	-0.0764	-0.0806	-0.0874	-0.0977	-0.1107	
g_2	-0.1980		-0.1957	-0.2002	-0.2038	-0.2099	-0.2186	-0.2394	
g_5	0.0020		-0.0974	-0.1584	-0.0246	-0.0422	-0.0581	-0.1637	
g_6	-0.0002		-0.0042	0.0011	-0.0086	-0.0173	-0.0274	-0.0909	
g_8	0.0000		0.0029	-0.0027	-0.0072	-0.0144	-0.0264	-0.0286	
g_{10}	-0.0518		-0.0826	-0.0712	-0.1033	-0.1003	-0.1046	-0.1281	
g_{11}	0.0000		-0.0545	-0.0099	-0.0372	-0.0631	-0.0639	-0.0478	
No. of Fucntion Calls	83		418	214	178	163	141	163	

사이이다.

또, ε의 값이 너무 크거나 너무 작은 경우 KS 덮개 함수를 이용한 최적설계 정식화는 수렴하지 않기도 하였다. Table 8 의 최적해를 살펴보면 ε 값이 커짐에 따라 설계는 제한조건의 관점에서 보다 보수적으로 결정되는 경향이 있음을 알 수 있다. 따라서 g_{max} 가 음이 될 때의 ε값을 구하면 좋은 해를 얻을 수 있을 것이다.

함수계산 회수는 2 배에서 5 배 가량 증가하였는데, 이는 앞에서 살펴본 수치예제에서 전통적인 최적설계의 함수계산 회수에 비해 2 배에서 4 배 가량 증가했던 것과 비슷하다.

4. 결 론

다양한 최적설계 수치예제를 KS 함수를 이용하여 제한조건 개수를 줄인 문제로 변환하여 최적설계를 수행하였다. 대부분의 수치예제에서 사용자 정의 파라미터를 적절히 선택하면 전통적인 최적해와 비슷한 경향의 최적해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

또, 기존의 제한조건이 복합되어 새로운 비선형 제한조건을 구성하므로 초기값과 최적설계 방법에 영향을 받는 경우도 있었다.

덮개 함수를 이용하여 제한조건을 누적 처리하는 것은 통상적인 최적 설계 기법을 적용할 때에 비해 함수계산 회수가 대부분 2 배 가량 증가하므로 효율은 좋지 않다. 그렇지만, 2 장에서 기술한 바와 같이 제한조건 개수에 따라 시스템 해석 회수가 크게 증가하는 경우, 덮개함수를 이용하여 제한조건 개수를 줄이면 전체적인 효율은 향상될 것이다. 확률 제한조건을 이용하는 강건 최적설계는 시스템 해석이 많이 필요한 대표적인 경우이므로, 여기에 덮개함수를 이용하면 효율 향상을 도모할 수 있을 것이다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Canfield, R. A., Grandhi, R. V. and Venkayya, V. B., 1988, "Optimum Design of Structures with Multiple Constraints," *AIAA Journal*, 26(1), pp. 78~85.

(2) Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., 1985, "Application of Vector Performance Optimization to a Robust Control Loop Design for a Fighter Aircraft," *Int. J. Control*, 37 (2), pp. 251~284.

(3) Sobieski, J. S., James, B. B. and Dovi, A. R., 1985, "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," *AIAA Journal*, 23(11), pp. 1775~1782.

(4) Sobieski, J. S., James, B. B. and Riley, M. F., 1987, "Structural Sizing by Generalized, Multilevel Optimization," *AIAA Journal*, 25(1), pp. 139~145.

(5) Barthelemy, J. F. M. and Riley, M. F., 1988, "Improved Multilevel Optimization Approach for the Design of Complex Engineering Systems," *AIAA Journal*, 26(3), pp. 353~360.

(6) Sethi, S. S. and Striz, A. G., 1997, "On Using the Kreisselmeier-Steinhause Function in Simultaneous Analysis and Design," *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference and Exhibit*, 38th, pp. 1357~1365.

(7) Renwei, X. and Shaojun, C., 1998, "A Quasi-analytic Method for Structural Optimization," *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 14, pp. 569~580.

(8) 정도현, 이병채, 2000, "확률조건의 근사화를 통한 효율적인 강건 최적설계 기법의 개발," 대한기계학회 논문집, 24(12), pp. 3053~3063.

(9) Rao., S. S., 1996, *Engineering optimization*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc. , pp. 536~537.

(10) Hock, W. and Schittkowski, K., 1981, *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Springer-Verlag.

(11) Schittkowski, K., 1987, *More Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Springer-Verlag.

(12) Vanderplaats and Miura, 1993, *DOT User's Manual*, Ver. 4, VMA Engineering.

부 록

여기에서 언급되는 y 와 c 는 설계변수 x 의 함수이다.

1. 수치예제 2 에서 필요한 자료

$$y_2 = 1.6x_1$$

10 $y_3 = 1.22y_2 - x_1$

$$y_6 = (x_2 + y_3)/x_1$$

$$y_{2c} = 0.01x_1\left(112 + 13.167y_6 - 0.6667y_6^2\right)$$

$if\ |y_{2c} - y_2| \le 0.001\ goto\ 30\ else\ goto\ 20$

20 $y_2 = y_{2c}$

$goto\ 10$

30 $y_4 = 93$

40 $y_5 = 86.35 + 1.098y_6 - 0.038y_6^2 + 0.325(y_4 - 89)$

$y_8 = 3y_5 - 133$

$y_7 = 35.82 - 0.222y_8$

$y_{4c} = 98000x_3/(y_2 y_7 + 1000x_3)$

$if\ |y_{4c} - y_4| \le 0.001\ goto\ 60\ else\ goto\ 50$

50 $y_4 = y_{4c}$

goto 40

60 *stop*

$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 85$, $a_4 = 90$,
$a_5 = 3$, $a_6 = 0.01$, $a_7 = 145$, $a_8 = 5000$,
$a_9 = 2000$, $a_{10} = 93$, $a_{11} = 95$, $a_{12} = 12$,
$a_{13} = 4$, $a_{14} = 162$

2. 수치예제 3에서 필요한 자료

$y_1 = x_2 + x_3 + 41.6$

$c_1 = 0.024x_4 - 4.62$

$y_2 = 12.5/c_1 + 12$

$c_2 = 0.0003535x_1^2 + 0.5311x_1 + 0.08705y_2x_1$

$c_3 = 0.052x_1 + 78 + 0.002377y_2x_1$

$y_3 = c_2/c_3$

$y_4 = 19y_3$

$c_4 = 0.04782(x_1 - y_3) + 0.1956(x_1 - y_3)^2/x_2$
$\quad + 0.6376y_4 + 1.594y_3$

$c_5 = 100x_2$

$c_6 = x_1 - y_3 - y_4$

$c_7 = 0.95 - c_4/c_5$

$y_5 = c_6c_7$

$y_6 = x_1 - y_5 - y_4 - y_3$

$c_8 = 0.995(y_4 + y_5)$

$y_7 = c_8/y_1$

$y_8 = c_8/3798$

$c_9 = y_7 - 0.0663y_7/y_8 - 0.3153$

$y_9 = 96.82/c_9 + 0.321y_1$

$y_{10} = 1.29y_5 + 1.258y_4 + 2.29y_3 + 1.71y_6$

$y_{11} = 1.71x_1 - 0.452y_4 + 0.58y_3$

$c_{10} = 12.3/752.3$

$c_{11} = 0.995x_1 1.75y_2$

$c_{12} = 0.995y_{10} + 1998$

$y_{12} = c_{10}x_1 + c_{11}/c_{12}$

$y_{13} = c_{12} - 1.75y_2$

$y_{14} = 3623 + 64.4x_2 + 58.4x_3$
$\quad + 146312/(y_9 + y_5)$

$c_{13} = 0.995y_{10} + 60.8x_2 + 48x_4$
$\quad - 0.1121y_{14} - 5095$

$y_{15} = y_{13}/c_{13}$

$y_{16} = 148000 - 331000y_{15} + 40y_{13} - 61y_{15}y_{13}$

$c_{14} = 2324y_{10} - 28740000y_2$

$y_{17} = 14130000 - 1328y_{10} - 531y_{11} + c_{14}/c_{12}$

$c_{15} = y_{13}/y_{15} - y_{13}/0.52$

$c_{16} = 1.104 - 0.72y_{15}$

$c_{17} = y_9 + x_5$

i	a_i	b_i
2	17.505	1053.6667
3	11.275	35.03
4	214.228	665.585
5	7.458	584.463
6	0.961	265.916
7	1.612	7.046
8	0.146	0.222
9	107.99	273.366
10	922.693	1286.105
11	926.832	1444.046
12	18.766	537.141
13	1072.163	3247.039
14	8961.448	26844.086
15	0.063	0.386
16	71084.33	140000
17	2802713	12146108

3. 수치예제 6에서 필요한 자료

j	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	a_{4j}	a_{5j}
1	100	90	70	50	50
2	100	100	50	0	10
3	10	10	0	0	70
4	5	35	55	65	60
5	10	20	25	35	45
6	0	5	100	100	45
7	0	0	40	35	0
8	25	35	50	60	35
9	0	55	0	0	65
10	10	25	30	15	5
11	55	20	60	0	75
12	5	0	10	75	100
13	45	40	30	35	75
14	20	25	0	30	10
15	0	10	40	65	0
b_i	385	470	560	565	645

j	a_{6j}	a_{7j}	a_{8j}	a_{9j}	a_{10j}
1	40	30	20	10	5
2	0	60	30	70	10
3	50	30	40	10	100
4	95	90	25	35	5
5	50	0	40	25	20
6	35	30	25	65	5
7	10	5	15	0	10
8	60	25	10	60	35
9	0	0	80	0	95
10	45	70	20	0	70
11	15	20	30	25	20
12	20	25	30	0	10
13	0	70	5	15	35
14	5	15	65	50	10
15	5	15	20	55	30
b	430	485	455	390	460