

고무와 섬유로 구성된 복합체 내의 섬유 끝 부분의 원형 균열에 대한 J-적분

양 경 진[†] · 강 기 주^{*}

(2001년 3월 20일 접수, 2002년 2월 22일 심사완료)

J-integral of Penny-Shaped Crack on the End of Stiff Fiber Embedded in Rubbery Materials

Kyeong-Jin Yang and Ki-Ju Kang

Key Words: Energy Release Rate(에너지 방출률), Rubber-Fiber Composites(고무-섬유 복합체), Dimensional Analysis(차원 해석), Separation Parameter(분리변수)

Abstract

An equation of J-integral for a penny-shaped crack at the end of the fiber embedded in rubber matrix is proposed. The values of J-integral for the specimens with various crack and specimen radius are obtained by FEA(Finite Element Analysis). The dimensional analysis is applied to derive an equation of J-integral as a nonlinear elastic energy release rate. The geometry and deformation calibration function in an equation of J can be expressed in a separated form. The geometry calibration function characterizing the effects of cord and specimen size is expressed in a polynomial form of fourth order. The deformation calibration function characterizes the effect of the overall level of strain. As approaching the infinitesimal strain, the value of the deformation calibration function approaches the results of LEFM(Linear Elastic Fracture Mechanics).

1. 서 론

고무와 같은 비선형 재료가 반복적인 하중을 받는 기계요소로서 사용되는 경우가 점차 증가되고 있어 고무 및 고무-섬유 복합체에 대한 파괴 및 피로균열 진전에 관한 연구의 중요성이 점차 증가하고 있다. 타이어나 진동장치로 사용되는 벨트는 일정간격으로 배열된 섬유와 고무의 복합체로 구성되어 있는데 대부분의 파손은 반복하중에 의해 섬유 끝에 균열이 생성된 후 층간균열로 발전하여 발생한다. 예를 들어 여러 층의 고무-섬유 복합체로 구성된 타이어의 벨트부 층분리 파손의 과정을 단순하게 두 단계로 분류하면 다음

과 같다. 첫째, 벨트의 가장자리에 존재하는 섬유 끝의 높은 응력 집중과 고무와의 약한 접착력으로 인하여 원형 균열(penny-shaped crack)이 발생하고 주행 중의 반복하중에 의해 진전하여 서로 합쳐지는 단계이다. 둘째, 합쳐진 균열이 벨트 층과 층 사이로 진전(층간균열진전)하여 최종적으로 파단되는 단계로 구분할 수 있다.^(1~4)

고무에 대한 파괴역학적인 접근으로 Rivlin과 Thomas⁽⁵⁾는 2차원의 여러 가지 시편형상에 대해 단위 균열 진전당 에너지 방출률 개념의 T(Tearing energy)를 제안한 바 있다. T는 고무 재료를 비선형 탄성재료로 가정할 경우 탄소성 파괴역학에서의 J-적분과 같다. Lake⁽⁶⁾와 Gent et al.⁽⁷⁾은 위의 J 개념을 고무의 피로 균열진전 시험에 이용하여 균열진전속도가 J로 잘 표현될 수 있음을 증명하였다. 파괴 및 피로 균열진전시험에 널리 사용되고 있는 SENT(Single Edge Notched Tension) 시편의 경우 J는 다음과 같이

[†] 책임저자, 회원, 전남대학교 대학원 기계공학과

E-mail : nanomech@korea.com

TEL : (062)530-1668 FAX : (062)530-1689

^{*} 회원, 전남대학교 기계공학과

비교적 단순하게 표현된다.

$$J = 2kW_0c \quad (1)$$

여기서 W_0 는 균열의 영향을 받지 않는 영역에서의 균일한 변형률에너지밀도(uniform strain energy density)이고 c 는 균열길이, k 는 신장률 또는 변형률의 함수인 변형보정계수이다(선형탄성재료에 대해 k 는 상수이다). Greensmith⁽⁸⁾는 단위균열 진전당 에너지 방출률 개념을 시험결과에 직접 적용하여 신장률 λ 에 대한 k 의 의존성을 조사하였고 Lake⁽⁹⁾는 균열단합(crack closure) 개념을 이용하여 $k = \pi/\lambda^{1/2}$ 인 이론식을 제안한 바 있다. 그리고 Lindley⁽¹⁰⁾는 다양한 2차원 형상의 시편에 대해 수행된 수치해석 결과와 Greensmith⁽⁸⁾의 실험결과로부터 k 에 대한 다음 실험식을 제안하였다.

$$k = \frac{\pi}{(1+e)^{1/2}} (0.995 - 0.531e) \quad (2)$$

여기서 e 는 공칭변형률이다. 위와 같은 기존의 연구들은 J 식에 유한크기(finite size) 효과가 포함되지 않은 한계를 갖고 있다. Andrew⁽¹¹⁾는 유한크기를 갖는 2차원 균질재료내의 균열문제에 대해 차원해석을 통하여 다음과 같은 J 식을 제안하였다.

$$J = k(\epsilon_0, \text{geometry}) W_0c \quad (3)$$

그리고 Ghfiri⁽¹²⁾은 Sharobeam and Landes⁽¹³⁾가 이용한 변수 분리법을 식 (3)에 적용하여 k 가 변형 함수(deformation function)와 기하학적 함수(geometry function)로 변수분리됨을 증명하여 공학적으로 보다 알맞게 보정된 J 식을 제안한 바 있다.

섬유 끝 균열진전에 관한 연구는 Huang and Yeoh⁽¹⁴⁾에 의해 수행된 바 있는데 Rivlin and Thomas⁽⁵⁾가 제안한 위의 J 식을 보정하여 피로 수명을 평가하였다. 그들은 함수 k 를 변형률에 무관한 적절한 상수로 선택하여 수명을 평가하였다. 그러나 k 는 변형률에 의존하는 함수로 하중에 따른 피로수명을 평가할 때 외부하중- k 관계를 고려해야한다. 또한 그들이 사용한 접근법은 피로수명을 고려한 타이어 벨트 설계시 중요한 인자인 섬유 크기, 간격 등을 설계할 때 직접적으로 적용될 수 없게된다.

본 연구에서는 고무로 둘러싸인 섬유 끝에 원형균열이 존재하는 고무-섬유 복합체의 단순모델을 만들어 피로균열진전 및 파괴를 지배하는 에너지 매개변수 J 에 관한 연구를 수행하였다. 기존의 균질재료에 대한 파괴역학적 해석기법을 확장하여 고무-섬유 복합체의 설계와 수명평가에 적용될 수 있도록 섬유크기 및 시편크기 등의 유한크기 효과를 나타내는 기하학적 보정함수와 변형률에 의존하는 변형 보정함수가 분리된 J 식을 제안한다. 고무는 비선형 탄성재료로 가정하고 섬유는 고무에 비해 강성이 훨씬 큰 선형탄성재료로 가정한다. 차원 해석을 통하여 J 에 관한 일반식을 유도하였고 변수 분리법을 적용하여 J 식이 변형함수와 기하학적 함수로 변수분리됨을 증명하였다.

2. 이론

2.1 섬유 끝 균열에 대한 J -적분 식

Fig. 1과 같이 고무로 둘러싸인 섬유 끝에 원형균열이 존재하는 경우에 대한 에너지 매개변수 J 식을 유도한다. 임의의 점 P 에서의 변형률에너지밀도 W 를 구하기 위해 고려해야 할 물리량은 다음과 같다.

$$W_0, c, R, Z, A, B, \epsilon_0$$

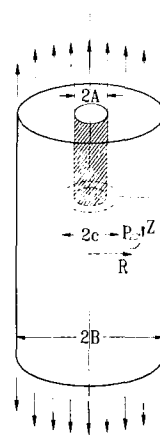


Fig. 1 Rubber-cord composites with a penny-shaped crack at the end of a cord, B: specimen radius, A: cord radius, c: crack radius

여기서 W_0 는 균열의 영향을 받지 않는 영역에서의 균일한 변형률에너지밀도(uniform strain energy density), c 는 균열반경, R 과 Z 는 P점의 위치를 나타내는 변수, A 는 섬유 반경, B 는 시편의 반경, ϵ_0 는 재료의 비선형성을 나타내주는 변수로서 W_0 가 정의되는 영역에서의 변형률이다. 변형률에너지밀도 W 는 재료의 비선형 특성으로 인하여 외부에 작용하는 하중의 크기 W_0 에 정비례하지 않는데 변수 ϵ_0 를 이용하여 이와같은 효과를 나타낸다.^(5,8-11) Greensmith⁽⁸⁾와 Lake⁽⁹⁾는 각각 시험결과와 균열 단형 개념으로부터 ϵ_0 의존성을 설명한 바 있다. 위의 변수들에 대한 차원해석을 통하여 다음과 같은 일반식을 얻을 수 있다.

$$W = W_0 f\left(\frac{c}{R}, \frac{c}{Z}, \frac{A}{c}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) \quad (4)$$

$r = c/R$, $z = c/Z$, $a = A/c$, $b = c/B$ 로 치환하면 위 식은 다음과 같이 된다.

$$W = W_0 f(r, z, a, b, \epsilon_0) \quad (5)$$

일정하중에서 ($W_0, \epsilon_0 = \text{constant}$) 단위균열진전 당 P점에서의 변형률에너지밀도 변화량을 얻기 위해 식 (5)를 미분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dc} &= W_0 \left[\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial c} \right] \\ &= -\frac{W_0}{c} \left[-r \frac{\partial f}{\partial r} - z \frac{\partial f}{\partial z} + a \frac{\partial f}{\partial a} - b \frac{\partial f}{\partial b} \right] \\ &= -\frac{W_0}{c} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 g 는 대괄호 안의 식을 일반화한 함수이다. 단위균열진전 당 시편 전체의 에너지 변화량은 다음과 같다.

$$\frac{dU}{dc} = \Sigma \frac{dW}{dc} \delta v \quad (7)$$

여기서 U 는 시편 전체에너지이고 δv 는 P점이 정의되는 미소 체적으로 원통 좌표계에서 $\delta v = R\delta R\delta\theta\delta Z$ 이다. 변형률에너지밀도가 θ 에 무관하므로 θ 방향에 대해 적분된 미소 체적을 고려하면 δv 는 다음과 같다.

$$\delta v = 2\pi R\delta Z\delta R = \frac{2\pi c^3}{r^3 z^2} \delta r \delta z \quad (8)$$

식 (6)과 식 (8)를 식 (7)에 대입하면 단위균열 진전당 전체에너지 변화량은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{dU}{dc} = -2\pi W_0 c^2 \sum_P \frac{1}{r^3 z^2} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \delta r \delta z \quad (9)$$

균열이 진전할 때 단위면적당 전체 에너지 변화량, 즉 에너지 매개변수 J 는 다음과 같이 표현된다(원형균열에 대해 균열면적 $S = \pi c^2$).

$$J = -\frac{dU}{dS} = W_0 c \sum_P \frac{1}{r^3 z^2} g(r, z, a, b, \epsilon_0) \delta r \delta z \quad (10)$$

여기서 무차원 공간변수 r, z 에 대해 식 (10)의 합을 수행하면 J 는 다음과 같이 표현된다.

$$J = k\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) c W_0 \quad (11)$$

2.2 J의 변수분리

Sharobeam 과 Landes⁽¹³⁾는 하중 변수분리를 가정하여 연성재료에 대한 J식을 제안한 바 있다. 그리고 Hocine 등⁽¹⁵⁾은 고무와 같은 재료 내에 균열이 존재할 때 J가 변형함수와 기하학적 함수로 변수분리됨을 보인 바 있다. 본 연구에서는 섬유의 효과가 포함된 식 (11)의 J식도 다음과 같이 변형함수와 기하학적 함수로 변수분리 된다고 가정한다.

$$J = H(W_0) * G(\text{geometry}) \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)를 비교하면 함수 H, W 는 다음과 같다.

$$H(W_0) = k_2(\epsilon_0) * W_0$$

$$G(\text{geometry}) = c * k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) \quad (13)$$

$$k\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}, \epsilon_0\right) = k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) * k_2(\epsilon_0)$$

즉 J의 변수분리는 함수 $k(A/c, c/B, \epsilon_0)$ 의 변수분리를 의미한다. 여기서 변수분리의 타당성을 검증하기 위해 다음과 같이 동일한 변형률에너지

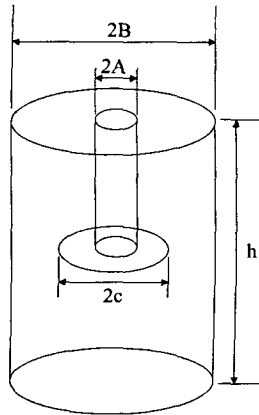


Fig. 2 Configuration of the specimens of rubber-cord composites with a penny-shaped crack at the end of the cord, $h > 6B$ for all specimens

밀도(constant strain energy density)에 대해 J 의 분리변수(separation parameter) Q_{ij} 를 정의한다.

$$Q_{ij} = \frac{J(c_i, \dots) |_{w_i}}{J(c_j, \dots) |_{w_j}} = \frac{H(W_0) * G(c_i, \dots)}{H(W_0) * G(c_j, \dots)} = \frac{G(c_i, \dots)}{G(c_j, \dots)} \quad (14)$$

여기서 c_j 는 기준 균열 반경이다. 만약 Q_{ij} 가 W_0 에 무관하게 일정한 값을 가진다면 식 (13)의 J 의 변수분리는 타당하게 된다. J 의 변수분리가 타당할 때 J 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$J = k_1 \left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B} \right) k_2(\epsilon_0) W_0 c \quad (15)$$

본 연구에서는 $k_1(A/c, c/B)$ 과 $k_2(\epsilon_0)$ 를 각각 기하학적 보정함수와 변형 보정함수라 한다.

3. 수치해석

본 연구에서는 고무-섬유 복합체 섬유 끝 균열에 대한 J 식을 완성하기 위해 여러 가지 기하학적 형상에 대해 유한요소 해석을 수행하였다. Fig. 2와 Table 1은 각각 해석에 사용된 시편 형상과 시편 차원을 나타낸다. 수치해석은 상용 유

Table 1 Dimension for the specimens of rubber-fiber composites with a penny-shaped crack on the end of the fiber, unit of length:[mm], cord radius $A=3$

c	4	5	6	7	8	9
B	5	6.25	7.5	8.75	10	11.25
	6	7	8.57	10	11.6	14
	7.7	7.7	10	14	14	18
	10	10	14	18	18	22
	14	14	18	22	22	26
	18	18	22	26	26	30
	20	22	26	30	30	45
		25	30	35	40	

한요소 해석 프로그램인 ABAQUS를 이용하여 수행되었다. 해석에 사용된 고무재료에 대한 구성방정식은 다음과 같은 Mooney-Rivlin Model 이다.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (16)$$

여기서 C_{10} 와 C_{01} 는 재료 상수이고 I_1 과 I_2 는 변형률 텐서의 불변량으로 연신률로 표현하면 다음과 같다.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (17)$$

$$I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}$$

여기서 λ_i 의 하첨자 1,2,3은 각각 주응력 방향을 나타낸다. 해석에 사용된 고무의 재료상수 C_{10} 와 C_{01} 은 각각 0.15[MPa]과 0.04[MPa]이고 섬유는 고무에 비해 강성이 훨씬 큰 선형 탄성 재료로 가정하여 영률과 포아송비가 각각 90[GPa]과 0.35이다. 축대칭 특성을 이용하여 ABAQUS 프로그램에서 제공되는 축대칭 요소(quadrilateral elements with eight nodes)를 이용하였다. J 값은 ABAQUS에서 제공되는 면적적분을 이용하여 얻었다. 균열선단에 15개의 적분경로를 구성하여 각 경로에 대해 J 값을 얻었는데 3-4번째 경로부터 일정한 J 값을 보였다. 변형보정함수는 선형탄성 모재의 경우에 대해 수치해석을 수행하여 본 연구의 결과와 비교하여 얻어졌다. 이때 사용된 모재는 선형탄성재료로 영률과 포아송비가 각각 1.2[MPa]과 0.4999이다. 또한 본 연구에서 제안한 섬유 끝 균열에 대한 J 식의 타당성을 검증하기 위해 다양한 고무 재료 물성에 대해 수치해석을

수행한 후 제안식과 비교하였다.

4. 결과 및 토론

Fig. 3(a)와 Fig. 3(b)는 섬유 반경 A=3[mm], 시편 반경 B=10[mm]에 대해 여러 가지 균열길이 c 및 변형률에너지밀도(strain energy density) W_0 에 대한 J 값을 얻어 식 (14)에 대입하여 얻은 $Q_{ij} - W_0$ 관계를 도기한 결과이다. Q_{ij} 가 W_0 에 무관하게 거의 일정하다. 그러므로 식 (12)에서 가정된 J 의 변수분리는 타당하다.

기하학적 보정함수를 얻기 위해 어떤 기준 변형률에너지밀도 W_{0i} 에 대해 식 (15)를 다음과 같

이 수정한다.

$$\begin{aligned} \frac{J}{W_{0i}c} &= k_2(\epsilon_0)k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) = C_j k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) \\ &= k_j\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 C_j 는 W_{0i} 에 대응하는 $k_2(\epsilon_0)$ 값으로 상수로 취급될 수 있다. 그리고 $k_j(A/c, c/B)$ 는 W_{0i} 에 대응하는 기하학적 함수이다. 이하 논문에서 아래첨자 i 와 j 는 각각 W_{0i} 및 W_{0j} 값에 대응하는 상수 또는 함수를 나타내기 위해 이용되었다. 여러 가지 기하학적 조건에 대해 수행된 수치해석 결과를 이용하여 기준 변형률에너지밀도 W_{0i} 에 대한 $J/W_{0i}c$ 값을 A/c 와 c/B 에 대해 정리하여 기하학적 함수 $k_j(A/c, c/B)$ 를 얻을 수 있다.

다른 변형률에너지밀도 W_{0i} 일때의 C_i 값은 다음 식을 이용하여 C_j 값과 관계시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{J}{W_{0i}c} \Big|_{W_{0i}} &= \frac{C_i k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right)}{C_j k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right)} \Big|_{\frac{A}{c}, \frac{c}{B}} \\ &= \frac{C_i}{C_j} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 $\Big|_{\frac{A}{c}, \frac{c}{B}}$ 는 동일한 A/c 와 c/B 에 대해 $J/W_{0i}c$ 값이 비교됨을 나타낸다. 식 (18)과 식 (19)로부터 W_{0i} 에 대한 기하학적 함수인 $k_j(A/c, c/B)$ 는 다음 식과 같이 W_{0i} 에 대해서도 얻어질 수 있다.

$$k_j\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) = \left(\frac{J}{W_{0i}c} \Big|_{W_{0i}}\right) \frac{C_j}{C_i} \quad (20)$$

위와같이 여러가지 W_{0i} 에 해당하는 $J/W_{0i}c$ 데이터를 식 (20)을 이용하여 수정하여 $k_j(A/c, c/B)$ 를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 $W_{0i}=1, 2(=W_{0j}), 5$ [kJ/m³]에 대한 데이터를 조합하여 함수 $k_j(A/c, c/B)$ 를 결정한다. $W_{0i}=1, W_{0j}=2$ [kJ/m³]과 $W_{0i}=2$ [kJ/m³], $W_{0i}=5$ [kJ/m³]

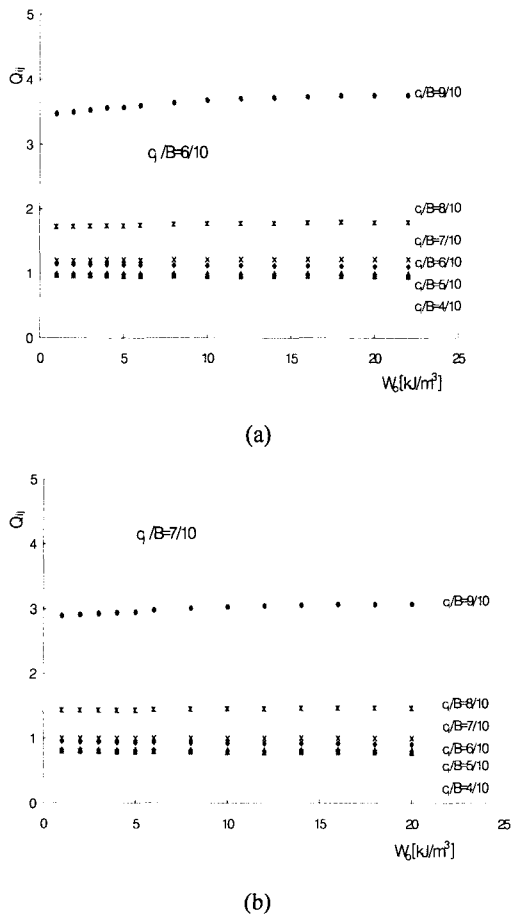


Fig. 3 Separation parameter Q_{ij} for various crack radius. (a) reference crack radius $c_i/B=6/10$, (b) reference crack radius $c_i/B=7/10$

에 대해 C_i/C_j 를 얻은 결과 각각 1.0124와 0.9796이다. Fig. 4는 $A/c=3/4$, $A/c=3/6$, $A/c=3/8$ 에 대한 $k_j(A/c, c/B)$ 와 c/B 관계를 나타낸 결과이다. 각각의 A/c 에 대해 3가지 W_0 에 대한 $k_j(A/c, c/B)$ 값을 표시하였는데 $k_j(A/c, c/B)$ 는 W_0 값에 무관하게 c/B 에 의존함을 보여준다. 본 연구에서는 $k_j(A/c, c/B)$ 를 다음과 같이 4차 다항식으로 표현하였다.

$$k_j\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) = f_0\left(\frac{A}{c}\right) + f_1\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right) + f_2\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^2 + f_3\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^3 + f_4\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^4 \quad (21)$$

Fig. 4의 실선은 함수 k_j 를 c/B 에 대해 4차 다항식으로 근사한 결과인데 각 항의 계수는 A/c 에 의존하게 된다. c/B 가 0.5보다 큰 영역에서 A/c 의 영향이 거의 없어진다. 여섯 가지의 A/c (3/4, 3/5, 3/6, 3/7, 3/8, 3/9)에 대해 Fig. 4에서 얻어진 각 항의 계수를 이용하여 3차 다항식으로 근사하여 함수 $f_k(A/c)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$ 를 얻었다.

위에서 전개된 바와 같이 $k_j(A/c, c/B)$ 는 단지 $W_0=2[\text{kJ}/\text{m}^3]$ 값에 대한 기하학적 보정함수인데 변형을 영향을 나타내는 C_j 값으로 나누면 기하학적 함수 $k_1(A/c, c/B)$ 을 얻을 수 있다.

한편 선형 탄성재료에서 무한체 내의 원형균열에 대한 에너지 방출을 J 는 다음과 같이 표현된다.⁽¹⁶⁾

$$J = \frac{6}{\pi} W_0 c \quad (22)$$

위 식에 기하학적 효과를 나타내는 함수가 포함되면 J 는 본 연구에서와 같이 다음 식으로 표현될 수 있을 것이다.

$$J = \frac{6}{\pi} W_0 c k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) \quad (23)$$

식 (18)에서 $W_0=2[\text{kJ}/\text{m}^3]$ 에 대한 $k_2(\epsilon_0)$ 값을 C_j 로 정의한바 있다. C_j 는 식 (23)과 식 (15)를 비교하여 다음과 같이 얻어질 수 있다.

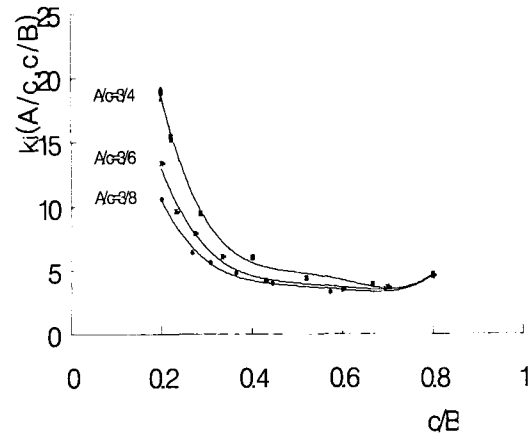


Fig. 4 Geometry function for $W_0=2[\text{kJ}/\text{m}^3]$

$$\frac{J_{\text{linear}}}{J_{\text{nonlinear}}} \Big|_{W_0=2, \text{ geometry}} = \frac{k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) \frac{6}{\pi} W_0 c}{k_1\left(\frac{A}{c}, \frac{c}{B}\right) C_j W_0 c} \quad (24)$$

$$C_j = \frac{6}{\pi} \frac{J_{\text{nonlinear}}}{J_{\text{linear}}} \Big|_{W_0=2, \text{ geometry}}$$

여기서 J_{linear} 와 $J_{\text{nonlinear}}$ 는 각각 소변형 선형 탄성재료(식 (23))와 대변형 비선형 탄성재료(식 (15))에 대해 얻어진 J-적분값이고 $|_{\text{geometry}}$ 는 같은 기하학적 조건에 대해 비교됨을 의미한다. $A=3[\text{mm}]$ 와 $c/B=6/14, 6/18, 6/22, 6/26$ 에 대해 수행한 수치해석 결과를 비교한 결과 C_j 값은 각 조건에 대해 1.81, 1.812, 1.81, 1.308(평균:1.81)로 일정한 값을 나타내었다. 식 (21)을 상수 1.81로 나누어 J 에 대한 결과식을 정리하면 다음과 같다.

$$J = k_2(\epsilon_0) W_0 c \left[f_0\left(\frac{A}{c}\right) + f_1\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right) + f_2\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^2 + f_3\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^3 + f_4\left(\frac{A}{c}\right)\left(\frac{c}{B}\right)^4 \right] \quad (25)$$

$$f_0 = -64.62 + 472.25\left(\frac{A}{c}\right) - 837.35\left(\frac{A}{c}\right)^2 + 543.45\left(\frac{A}{c}\right)^3$$

$$f_1 = 622.87 - 4346.6\left(\frac{A}{c}\right) + 8012.2\left(\frac{A}{c}\right)^2 - 5203.3\left(\frac{A}{c}\right)^3$$

$$f_2 = -2036.7 + 14160\left(\frac{A}{c}\right) - 26767\left(\frac{A}{c}\right)^2 + 17442\left(\frac{A}{c}\right)^3$$

$$f_3 = 2742.1 - 19156\left(\frac{A}{c}\right) + 36842\left(\frac{A}{c}\right)^2 - 24097\left(\frac{A}{c}\right)^3$$

$$f_4 = -1300.4 + 9172.4\left(\frac{A}{c}\right) - 17862\left(\frac{A}{c}\right)^2 + 11722\left(\frac{A}{c}\right)^3$$

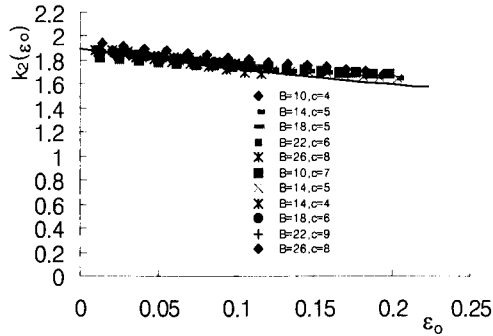


Fig. 5 Deformation function $k_2(\epsilon_0)$ obtained by Eq. (23) for the various geometries. Solid line: by the modified Lindley⁽¹⁰⁾ equation

Fig. 5는 식 (25)를 이용하여 $k_2(\epsilon_0)$ 를 변형률 ϵ_0 에 따라 나타낸 결과이다. $k_2(\epsilon_0)$ 는 기하학적 형상에 관계없이 일정한 양상을 보인다. 또한 미소변형영역($\epsilon_0 \rightarrow 0$)에서 $k_2(\epsilon_0) = 1.9$ 을 보이는데 이 결과는 식 (23)에 선형탄성재료의 $6/\pi$ 과 일치한다. 실선은 Lindley⁽¹⁰⁾의 실험식(식 (2))에서 계수 π 를 $6/\pi$ 로 바꾸어 나타낸 결과인데 2차원 시편에 대해 얻어진 변형보정함수는 3차원 형상에 대해서도 잘 적용될 수 있음을 알 수 있다. Fig. 6에서 실선은 $A=3[\text{mm}]$, $B=10[\text{mm}]$ 에 대해 식 (25)을 이용하여 얻어진 $J-c/B$ 관계이고 데이터 점은 수치해석에서 얻어진 결과이다. 균열 반경이 작을 때 섬유 영향으로 인하여 높은 J 값 보이고 균열반경 c/B 가 0.7보다 커지면서 시편 반경(만약 일정간격으로 배열된 섬유-끝 균열 진진으로 가정한다면 근사적으로 섬유 간격에 해당한다.)의 영향으로 J 값이 c/B 에 대해 증가함을 알 수 있다. 본 연구에서 제시한 J 식의 타당함을 검증하기 위해 고무 재료의 물성을 달리하여 수치해석을 수행하였다. 다양한 외부하중 ϵ_0 에 따른 J 값 변화를 Fig. 7에 나타내었다. 여기서 실선은 식 (25)와 Fig. 5의 $k_2(\epsilon_0)$ 결과를 이용하여 얻은 결과이고 기호는 유한요소해석 결과인데 다양한 고무재료에 대해 비교적 정확한 J 값을 평가할 수 있었다.

5. 결론

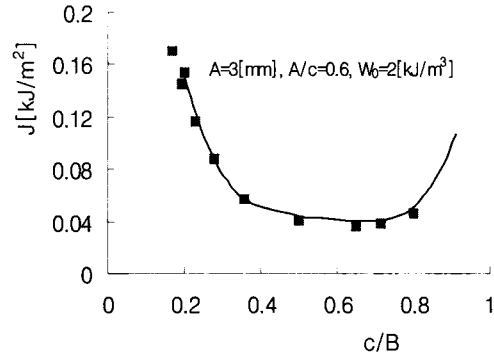


Fig. 6 The energy release rate J with c/B under a constant remote loading, $W_0=2[\text{kJ}/\text{m}^3]$

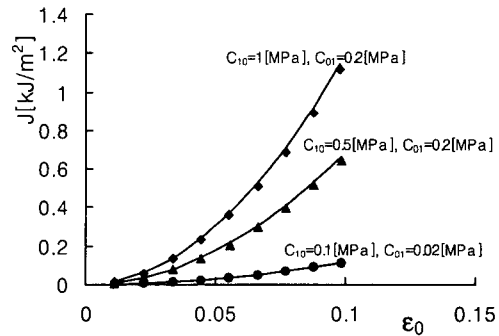


Fig. 7 The energy release rate J under the various material properties

본 연구에서는 고무-섬유 복합체 섬유 끝에 원형균열이 존재할 때 파괴 및 피로균열진전을 지배하는 매개변수 J 에 관한 연구를 수행하였다. 차원해석과 에너지 방출률 개념으로부터 J 의 일반식을 도출하였다. J 는 변형함수와 기하학적함수로 변수분리됨을 분리변수를 정의하여 검증하였다. 유한크기효과를 나타내는 기하학적 보정함수 $k_1(A/c, c/B)$ 는 LEFM에서와 같이 다항식 형태로 표현되었다. 재료의 비선형성을 보정하는 함수 $k_2(\epsilon_0)$ 는 기하학적 형상에 관계없이 일정한 분포를 보였고 $\epsilon_0 \rightarrow 0$ 일 때 선형 탄성재료에 대한 값과 일치하였다. 또한 함수 $k_2(\epsilon_0)$ 는 2차원 시편에 대해 얻어진 Lindley⁽¹⁰⁾의 실험식을 보정하면 잘 일치되는데 이는 변형보정함수가 형상에 관계없

이 적용될 수 있음을 나타낸다. J식의 타당성을 검증하기 위해 고무재료의 물성을 다양하게 하여 수치해석을 수행하였는데 비교적 정확한 J값을 평가할 수 있었다(Fig. 7). 일정반복하중하에 섬유 끝 균열 특성을 조사하기 위해 균열길이-J 관계를 도시한 결과 다음과 같은 특성을 관찰할 수 있었다. 균열이 작을 때 섬유 영향으로 큰 J값을 보이고 균열이 커짐에 따라 J값은 감소하는 경향을 나타내었고 균열이 깊어지면서 시편 크기(반경) 효과로 J값이 다시 증가하는 특성을 보였다. 본 연구에서 제안한 J식은 고무가 모재로 이용되고 있는 다양한 고무-섬유 복합체의 피로수명평가에 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 전남대학교 BK 사업단 연구비 지원(BK21, 2000)에 의하여 수행되었으며, 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

- (1) Breidenbach, R. F. and Lake, G. J., 1978, "Mechanics of Fracture in Two-Ply Laminates," *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 52, p. 96.
- (2) Ford, J. L., Patel, H. P. and Turner, J. L., 1982, "Interlaminar Shear Effects in Cord-Rubber Composites," *Fibre Science and Technology*, Vol. 17, p. 255.
- (3) Kim, R. Y. and Soni, S. R., 1984, "Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites," *J. Composite Mat.*, Vol. 18, p. 70.
- (4) Daniewicz, D. and Frantziskonis, G., 1992, "Edge Delamination in Laminated Composites," *Composite Struct.*, Vol. 21, p. 141.
- (5) Rivlin, R. S. and Thomas, A. G., 1953, "Rupture of Rubber. I. Characteristic Energy for Tearing," *J. Polym. Sci.*, Vol. X, pp. 291~318.
- (6) Lake, G. J., 1994, "Application of an Energetics Approach to Fatigue and Fracture in Elastomers," To be Presented at a Meeting of the Rubber Division. ACS.
- (7) Gent, A. N., Lindley, P. B. and Thomas, A. G., 1964, "Cut Growth and Fatigue of Rubbers. I. The Relationship Between Cut Growth and Fatigue," *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 8, p. 455.
- (8) Greensmith, H. W., 1963, "Rupture of rubber. X. The Change in Stored Energy on Making a Small Cut in a Test Piece Held in Simple Extension," *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 7, p. 993.
- (9) Lake, G. J., 1970, "Application of Fracture Mechanics to Failure in Rubber Articles with Particular Reference to Groove Cracking in Tyres," *Conf. Yield, Deformation and Fracture of Polymers*.
- (10) Lindley, P. B., 1972, "Energy for Crack Growth in Model Rubber Components," *J. Strain Analysis*, Vol. 7, p. 132.
- (11) Andrews, E. H., 1974, "A Generalized Theory of Fracture Mechanics," *J. Mater. Sci.*, Vol. 9, pp. 887~894.
- (12) Ghfiri, H., Nait-Abdelaziz, M. and Mesmacque, G., 1993, "Experimental Determination of J on Rubbery Materials: Influence of Finite Dimensions," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 44, No. 5, pp. 681~689.
- (13) Sharobeam, M. H. and Landes, J. D., 1991, "The Load Separation Criterion and Methodology in Ductile Fracture Mechanics," *Int. J. Fract.*, Vol. 47, pp. 91~104.
- (14) Huang, Y. S. and Yeoh, O. H., 1989, "Crack Initiation and Propagation in Model Cord-Rubber Composites," *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 62, p. 709.
- (15) Hocine, N. A., Abdelaziz, M. N., Ghfiri, H. and Mesmacque, G., 1996, "Evaluation of the Energy Parameter J on Rubber-Like Materials: Comparison between Experimental and Numerical Results," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 55, No. 6, pp. 919~933.
- (16) Sack, R. A., 1946, *Proc. Phys. Soc.*, London Vol. 58, p. 729.