

3차원 와전류 해석을 위한 등가자기회로방법의 개발

Development of Equivalent Magnetic Circuit Network Method for 3 Dimensional Eddy current Analysis

許 眞* · 洪 正 杓** · 玄 東 石***

(Jin-Hur · Jung-Pyo Hong · Dong-Seok Hyun)

Abstract - A computational method for analysis of the 3 dimensional electro-magnetic induction problems has been developed. The developed method is capable of modeling the induced current and analyzing its characteristics using only scalar potential at each node. A benchmark model of asymmetrical conductor with a hole is analyzed to verify the application of the developed method. The calculated value of magnetic flux density are compared with the measured value, and the results indicate that the developed method is valid. Also, Comparing with 3-D finite element method (FEM) results, we conformed effectiveness of the developed method for the accuracy and computation times.

Key Words : Induced current, asymmetrical conductor with a hole, 3-D Electromagnetic field analysis, New EMCN

1. 서 론

유도기뿐 아니라 다른 여러 전기기기에서도 전자유도현상의 모델링은 전자기 시스템의 동작특성 해석에 있어서 매우 중요한 요소이다. 또한, 대부분의 전자기 시스템이 고정밀화 고효율화 되어감에 따른 해석 및 설계과정에서 시스템의 정확한 전자기적 분포특성계산에 대한 요구는 실제모델과 근사해석 모델의 근본적인 접근차이로 발생하는 오차를 줄이기 위해서 실제모델에 충실한 3차원해석을 더욱 필요로 하게 되었다. 따라서 3차원 해석문제로서의 전자유도현상에 관한 문제를 해석하기 위한 수치 해석적인 방법이 중요하게 되었고, 이를 위하여 3차원 유한요소법(Finite Element Method, FEM)과 경계요소법(Boundary Element Method, BEM)이 주로 이용되고 있다[1]-[4]. 3차원 유한요소법을 적용하는 데는 계변수의 선택에 따라 여러 가지 방법이 있을 수 있으나 해석영역에서의 전체적인 미지수를 벡터포텐셜로 사용하는 경우 엄청난 미지수의 증가로 인하여 해석에 큰 어려움이 있어, 일반적으로 미지수의 수를 줄이기 위하여 벡터포텐셜과 스칼라 포텐셜을 혼용하여 사용하는 즉, 일반적으로 와전류가 유기되는 도체영역에서는 전류벡터포텐셜 \vec{T} 와 자기스칼라포텐셜 Ω 를 계변수로 하고, 그 이외의 영역 즉 공기와 철심 등 전류원이 존재하지 않는 영역에서는 자기스칼라포텐셜 Ω 를 계변수로 사용하는 $\vec{T}-\Omega$ 법 등이 이

용되고 있다 [3]-[6]. 그럼에도 불구하고, 3차원 유한요소해석에서는 미지수가 엄청나게 증가하게 되어 많은 기억용량과 빠른 프로세서를 가진 컴퓨터의 사용이 필수적이며, 계산 시간도 매우 길어지게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 그린함수(Green's function)를 이용한 경계 적분방정식법을 이용하기도 하나 매질의 비선형성 및 경계면이 복잡할 경우 적용하기가 어렵고, 이에 유한요소법과 경계요소법을 혼용하여 사용하는 방법이 연구되고 있다[4]-[6]. 또한, 많은 계산시간 및 기억용량을 줄이기 위하여 스칼라포텐셜만을 이용한 수치해석 방법으로 Flux tube를 이용한 자기회로방법(Flux Tube Method, FTM), 퍼미언스망법(Permeance Network Method, PNM), 등가자기회로방법(Equivalent Magnetic Circuit Network Method, EMCNM) 등이 제안되었으나, FTM은 유도현상에서 정확한 Flux tube를 계산하기가 어렵고, 농형유도전동기의 도체바(Bar)와 같이 전류의 path가 결정되어진 경우에만 적용할 수 있다. 또한, PNM은 유한요소법을 이용하여 회로망내의 퍼미언스를 계산함으로써 이에 대한 많은 계산이 요구될 뿐만 아니라 기존의 EMCNM과 마찬가지로 전자유도현상을 해석할 수 없는 단점을 가지고 있었다[1]-[9].

본 논문에서는 기존의 등가자기회로방법(EMCNM)을 이용하여 와전류에 의한 기자력을 기존의 회로망 내에 수동소자(Passive components)로 나타내고, 이에 따라 자기저항 및 기자력을 복소수로 나타내어 와전류를 해석하는 방법을 제안하였다. 따라서 기존의 등가자기회로방법에서와 같이 한 개의 절점에 대하여 한 개의 미지변수로서 구성된 시스템 행렬식을 이용하여 미지변수의 추가 없이 빠른 계산시간 내에 3차원 전자유도현상을 해석할 수 있었다. 제안된 방법을 그림 1의 비대칭 홀(hole)을 갖는 도체에 적용하여, 실험 결과 및 3차원 유한요소법에 의한 해석결과와 비교하여 제안한 해석방법의 타당성을 검증하였다.

* 正 會 員 : 電子部品研究員 精密器機研究센터 先任研究員

** 正 會 員 : 昌原大 工大 電氣工學科 副教授

*** 正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 教授

接受日字 : 2001年 9月 12日

最終完了 : 2002年 2月 28日

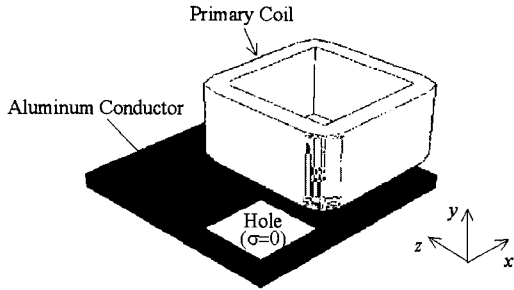


그림 1 해석모델
Fig. 1 Analysis model

2. 제안된 해석 방법

2.1 유도전류의 모델링

등가자기회로를 이용한 전자계의 모델링은 전기회로와 자기회로가 각각 정의되고, 이 회로들의 구성은 각각 암페어의 법칙과 패러데이 법칙에 의하여 이루어진다. 이를 위한 변위 전류가 무시되는 준 정상상태(Quasi-static fields)에서의 맥스웰 방정식과 보조방정식 및 오옴의 법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_s + \vec{J}_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \quad \Phi = BA, \quad \vec{J}_e = \sigma \vec{E}_e \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{J}_s , \vec{J}_e 는 각각 전기장의 세기 [V/m], 자계의 세기[A/m], 전속밀도[C/m²], 자속밀도[T] 및 여자 전류밀도[A/m²] 와 유도전류밀도를 나타낸다.

위식으로부터 유도전류밀도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\nabla \times \vec{J}_e = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

이는 다음의 식(3)과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{ez}}{\partial y} - \frac{\partial J_{ey}}{\partial z} &= -\sigma \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial J_{ex}}{\partial z} - \frac{\partial J_{ez}}{\partial x} &= -\sigma \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial J_{ey}}{\partial x} - \frac{\partial J_{ex}}{\partial y} &= -\sigma \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $\partial J_{ev} / \partial u$ 는 Taylor시리즈의 1차 미분항을 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\left[\frac{\partial J_{ev}}{\partial u} \right]_{i+1/2,j,k} \approx \frac{\Delta J_{ev}}{\Delta u} \tag{4}$$

여기서, ΔJ_{ev} 는 두 절점(ij,k)와 ($i+1,j,k$)를 흐르는 각 방향으로의 유도전류밀도이고, Δu 는 각 방향으로의 미소변위를 나타내며, i, j, k 는 절점번호이다. 또한, 일반적인 자기회로에서의 자속은 자기저항의 역수인 퍼미언스와 절점의 자위의 차 (또는 기자력)의 곱과 같다. 계변수로 자기스칼라 포텐셜을 사용하는 임의의 (ij,k)와 ($i+1,j,k$)에서의 자속과 자속밀도는 다음과 같다.

$$\Phi_{i,j,k}^u = P_{i,j,k}^u (U_{i,j,k} - U_{i+1,j,k} + E_{i,j,k}^u) \tag{5}$$

$$B_{i,j,k}^u = \Phi_{i,j,k}^u / \Delta S_{i,j,k}^u \tag{6}$$

여기서, $U_{i,j,k}$ 는 절점(ij,k)의 자위 값에 해당하는 미지의 값이며, $P_{i,j,k}^u$ 와 $S_{i,j,k}^u$ 는 u 방향의 두절점사이의 퍼미언스와 단면적이며, $E_{i,j,k}^u$ 은 Source내부에 해당하는 기자력이다. 이로부터, 자속밀도에 대한 시간미분항은 자기스칼라 포텐셜인 절점에서의 자위 $U_{i,j,k}$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial B_{i,j,k}^u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{U_{i,j,k} - U_{i+1,j,k}}{\Delta S_{i,j,k}^u} \tag{7}$$

2.2 등가자기회로망의 구성

유도전류에 의한 기자력을 포함한 지배방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{J}_F \cdot d\vec{s} + \int \vec{J}_e \cdot d\vec{s} \tag{8}$$

이로부터 해석모델에 대하여 전체영역을 매질의 종류에 따라 영역을 구분한 후, 영역을 세밀히 요소분할하고, 각요소의 중점에 절점을 잡고 이를 잇는 등가자기회로망을 구성하게 된다. 식(3)-(7)를 위의 지배방정식에 적용하여 얻은 유도전류에 의한 기자력과 그에 따른 퍼미언스의 변화를 고려한 임의의 절점 (ij,k)에서의 x, y, z 방향에 따른 3차원 등가자기회로망의 기본적인 구성이 그림 2에 나타나 있다.

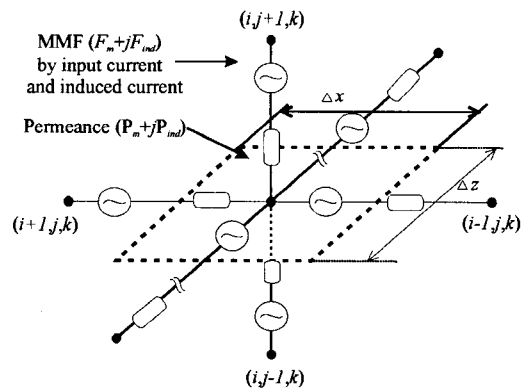


그림 2 임의의 한 절점에서의 자속의 흐름도
Fig. 2 Flow of magnetic flux at a node

그림 2와 같이 구성된 복소함수로 표현된 기자력과 퍼미언스로 구성된 등가자기회로망으로부터 각 절점에서 자속과 자기저항의 곱이 기자력과 등가라는 조건과 자속량의 유출입양이 불변이라는 식(9)의 자속의 연속조건을 적용하면 식(10)과 같은 절점방정식을 얻을 수 있다.

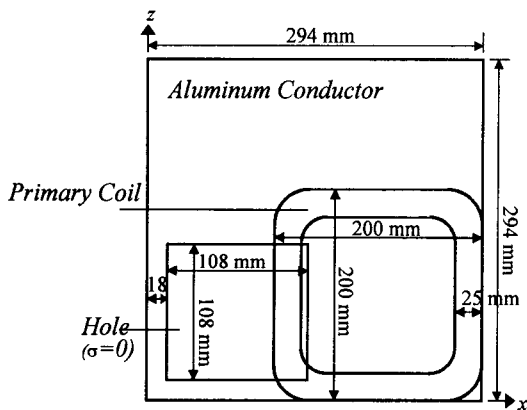
$$\sum_{x,y,z} \Phi_{i,j,k} = 0 \quad (9)$$

$$\Phi_N = P_{new} F_{new} \quad (10)$$

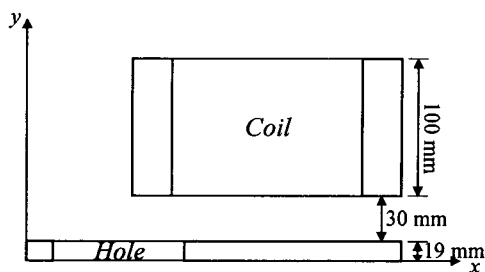
여기서, $P_{new} = P_{con} + jP_{ind}$, $F_{new} = F_{con} + jF_{ind}$ 이다.

P_{con} 과 F_{con} 는 각각 기존의 등가자기회로망에서의 모델의 형상과 재질 및 입력전원에 의하여 결정되는 퍼미언스와 기자력을 나타내며, P_{ind} 과 F_{ind} 는 유도전류에 의해서 변화되는 퍼미언스와 발생하는 유도기자력을 나타낸다. 식(10)과 같이 구성된 절점방정식을 해석영역내의 모든 절점에 적용하고, 이로부터 조합된 계방정식으로부터 전체영역의 각 절점에서의 자위를 계산한다.

계산된 각 절점에서의 자위와 절점사이의 자기저항과 단면적으로부터 자속밀도를 계산한다. 이때, 해석모델의 비선형특성은 기존의 정자계 문제에서 적용되었던 등가자기회로망법에서와 마찬가지로 Newton-Raphson법과 직접수렴법을 이용하여 고려할 수 있다[11].



(a) 측면도



(b) 정면도

그림 3 해석모델의 단면도 및 제원

Fig. 3 Plane view and Specification of the analysis model

위의 식(9)와 (10)을 모든절점에 대해 절점방정식을 구성하면 절점의 수만큼의 대수방정식을 얻을 수 있고, 이 대수방정식은 식(11)과 같이 행렬의 형태가 된다.

구성된 퍼미언스 계수행렬은 $n \times n$ 대칭행렬이며 주 대각 성분이 구하고자하는 절점과 인접한 6개의 절점사이에 존재하는 6가지의 퍼미언스들의 합으로 구성되므로 계수매트릭스의 주 대각 밴드폭(Bandwidth)이 좁고, 이산도(sparsity)가 매우 좋다.

$$[P] \{U\} = \{F\} \quad (8)$$

[P]: 복소 퍼미언스 계수행렬

{U}: 절점자위 행렬

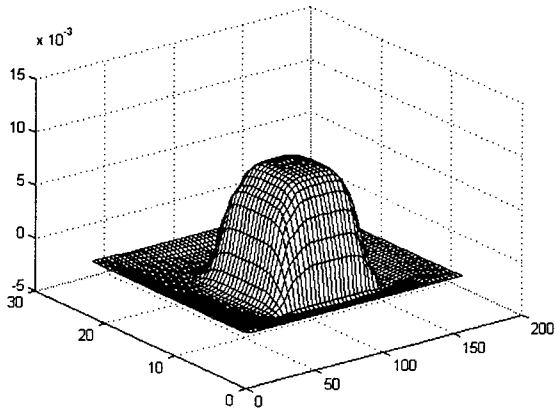
{F}: 복소 구동벡터 (기자력×퍼미언스)

개발된 방법의 효용성을 검증하기 위하여 IEEE Benchmark model인 그림 1의 비대칭 홀(Hole)을 갖는 Al 도체판에 대한 모델을 대상으로 개발된 방법을 적용하였다. 해석모델에 대한 제원은 그림 3에 나타나 있다.

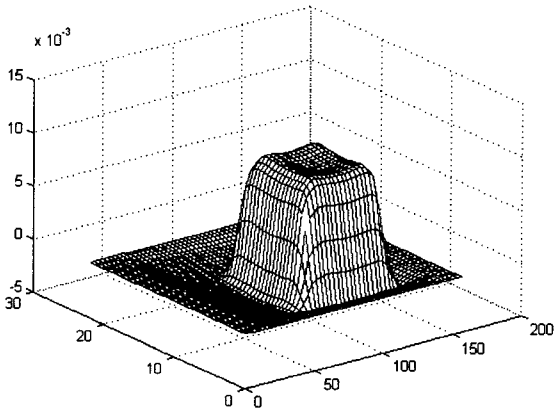
코일의 암페어턴수는 2742(AT)이고 주파수는 50(Hz)이다. 알루미늄의 도전율은 3.526×10^7 (S/m)이다. 제안된 해석방법을 이용한 비대칭 홀을 갖는 해석모델에 대한 자속밀도 분포 및 자속의 흐름 등에 대한 해석결과는 그림 4~그림 8과 같다.

그림 4(a)와 (b)는 코일에 시변전류가 가해졌을 때 Al 도체판이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우에 대하여 각각의 수직방향의 자속밀도를 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 그림 4(a)의 Al 도체판이 존재하지 않는 경우 단지 코일에 흐르는 전류에 의해 발생하는 자속만이 존재하므로 인해서 코일의 중심부에서 불룩한 형태의 자속밀도를 가지고 있음을 볼 수 있고 그림 4(b)의 Hole이 존재하지 않는 Al 도체판이 있는 경우 그 중심부에서 유기되는 전류에 의한 자속에 의해서 그 중심부가 오목해 짐을 볼 수 있다. 그림 4(c)에서는 비대칭 Hole을 갖는 Al도체판이 있는 경우 비대칭 Hole에 의해서 도체판에 유기된 와전류에 의한 자속과 Hole에 의하여 그 도체가 존재하는 부분에서만 오목한 형태를 가짐을 볼 수 있다. 그림 5는 위의 두 가지 경우에 대하여 각 방향에 대한 자속밀도의 성분을 정량적으로 비교한 것이다. 그림 5의 결과로부터 도체판에 유기되는 유도전류에 의한 영향으로 인하여 코일의 중심부에서 자속밀도의 수직 성분은 감소하고, x, z성분이 변화함을 알 수 있다. 또한, 그림 6은 비대칭 홀의 중심에서의 x-y평면에 대한 자속밀도의 분포를 벡터성분으로 나타내고 있고, 그림 7은 그때의 와전류 분포를 나타내고 있다.

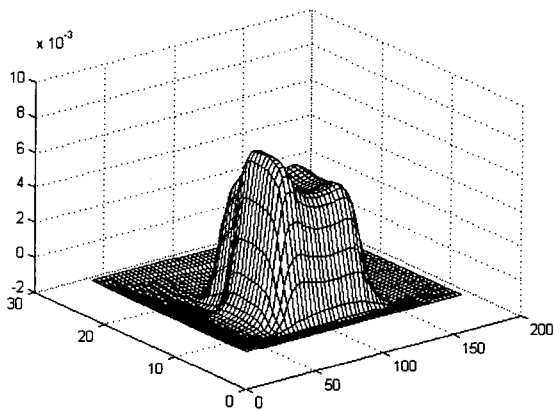
이상의 결과로부터 본 논문에서는 제안한 해석방법의 정밀성 및 효용성을 검증하기 위하여, 기존의 전자계시스템의 해석에서 그 해의 정확성과 유용성이 인정되어 전자장의 수치해석에 일반적으로 사용되고 있는 3차원 FEM과 실험치와의 비교를 시행하였다. 3차원 전자계문제의 해석을 위해서는 상용프로그램인 Infolytica사의 Magnet-V를 이용하여 해석을 시행하였다. 해석모델에 대한 FEM과 제안된 새로운 EMCN법에 의한 발생 요소와 절점수는 표 1에 나타내었다.



(a) 도체 판이 없는 경우

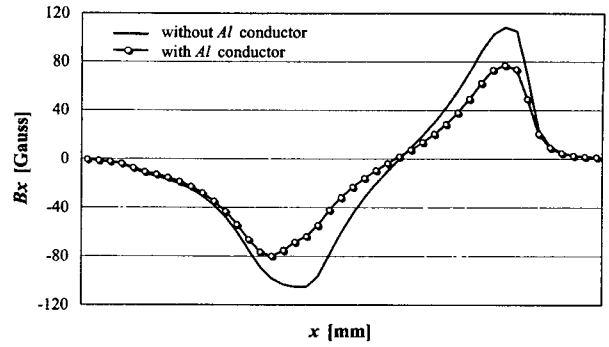


(b) Hole이 없는 도체 판이 있는 경우

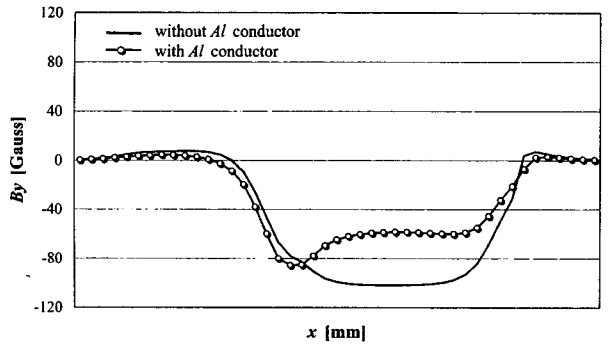


(c) 비대칭 Hole이 있는 도체 판이 있는 경우

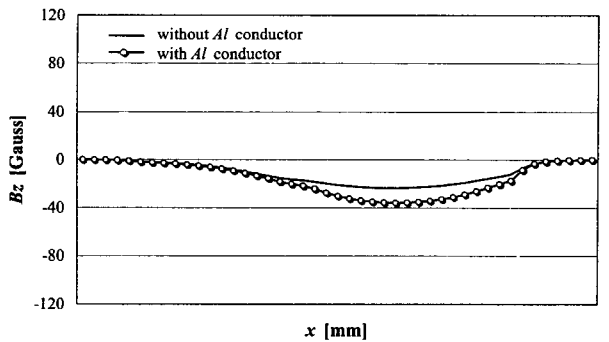
그림 4 공극 중심 면에서 수직 자속밀도의 공간분포
Fig. 4 Spatial distribution of Vertical magnetic flux density at the center of air gap



(a) B_x



(b) B_y



(c) B_z

그림 5 공극 자속밀도 분포

Fig. 5 Magnetic flux density at the air gap.

행렬의 크기를 결정하는 3차원 EMCN법에서 절점수가 3차원 FEM에서 절점수 보다 많음에도 불구하고 계산시간이 매우 큰 차이를 보이고 있음을 볼 수 있다. 이는 EMCN법의 경우 한 개의 절점에 대하여 자신의 절점과 연결된 절점수가 6개인 반면, FEM의 경우 이보다 많은 절점과 연결되어 있을 뿐만 아니라 유도전류를 고려하기 위한 전류벡터포텐셜로 인하여 실질적인 미지변수의 수가 증가하였을 뿐만 아니라, 계수행렬의 대칭성 및 이산도(sparcity)의 면에서 제안된 방법이 매우 좋기 때문이다.

따라서, 3차원 FEM 특성해석은 정밀한 해를 얻는다 할지라도 계산시간 등의 면에서 단점을 갖는 반면에 제안된 방법은 비교적 합리적인 계산시간을 가지고 해석모델을 3차원

해석을 할 수 있음을 확인할 수 있다. 그림 8은 해석된 결과와 실험치를 비교한 결과를 나타낸다. 해석결과로부터 개발된 방법이 비교적 정확한 결과를 가져옴을 알 수 있다.

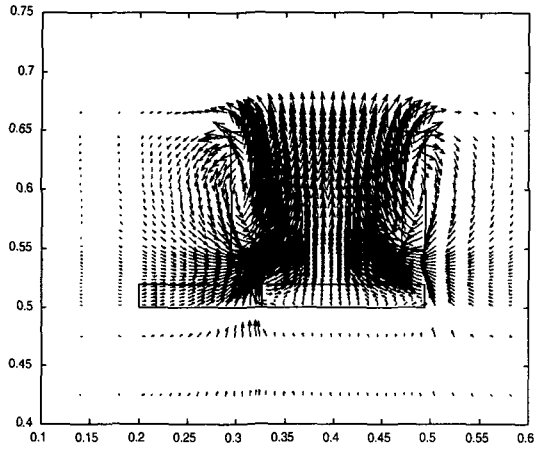


그림 6 자속밀도의 벡터분포 (x-y평면)
Fig. 6 Vector plot of Magnetic flux density at x-y plane

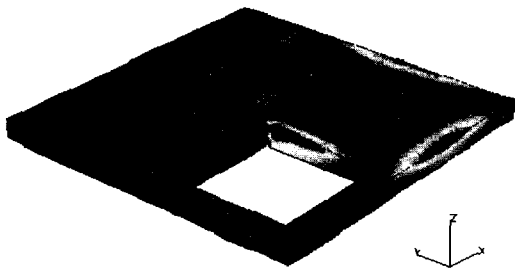


그림 7 도체판의 유도 전류 분포
Fig. 7 Distribution of the induced current in asymmetrical conductor with a hole

표 1 3차원 유한요소법과 3차원 등가자기회로방법의 비교
Table 1 Comparisons of 3D FEM and 3D EMCN method.

	3차원 유한요소법 (3-D FEM)	제안된 방법 (New 3-D EMCN)	EMCN/FEM
No. of node	47,432개	67,556개	1.424
No. of elements	197,456개	67,556개	0.342
CPU time (sec) (500MHz)	3638 (sec)	143 (sec)	0.039

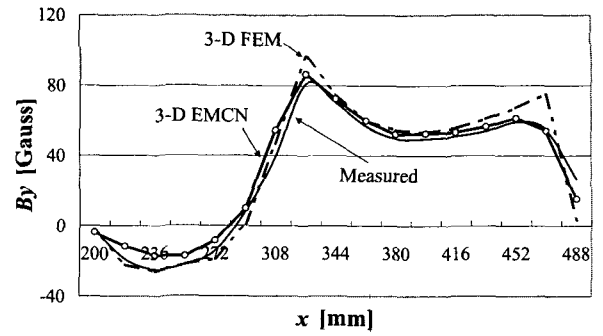


그림 8 공극 자속밀도 B_y 의 해석치와 실험치의 비교
Fig. 8 Comparison of Simulated value and Measured one for the air gap flux density B_y .

이상의 결과로부터 제안한 해석방법에 의한 3차원 전자계 해석 시에 전체적으로 추가적인 변수없이 단지 한 개의 절점에 대하여 한 개의 복소변수를 이용하여 해석을 행함으로써 해석시간이나 계산기의 기억용량 면에서 기존의 FEM 해석과 비교하여, 만족할만한 계산시간과 기억용량으로 정확한 해석이 가능함을 확인함으로써, 3차원 전자계해석 시 본 연구에서 제안된 해석방법은 매우 유용한 해석방법임을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 유도전류를 포함한 3차원 전자계 해석 시 유한요소법, 경계요소법 등과 같은 수치해석법이 갖는 방대한 계산시간의 단점을 보완한 새로운 3차원 등가자기회로방법을 제안하였다.

본 연구에서 제안한 방법은 유도전류에 의한 영향을 기존의 등가자기회로망에 수동소자로서 표현함으로써 추가적인 변수없이 단지 한 개의 절점에 한 개의 복소변수를 이용하여 해석을 행함으로써 계산시간 및 계산정밀도면에서 기존의 해석방법에 비하여 여러 가지 장점을 가짐을 해석 및 실험적인 연구를 통하여 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 한국과학재단의 해외 Post-doc. 연수지원에 의하여 연구되었음

참고 문헌

- [1] J. Hur, H. A. Toliyat and J. P. Hong, "Dynamic analysis of Linear Induction Motor Using 3D Equivalent Magnetic Circuit Network (EMCN) Method", *Journal of Electric Power Components and Systems*, Vol. 29, No. 6, pp. 531-541, 2001.
- [2] J. Hur, J. P. Hong and H. A. Toliyat, "3-D Time-Stepping Analysis of Induction Motor Using New Equivalent Magnetic Circuit Network Method",

IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 37, No. 5, pp. 3225-3228, September 2001.

[3] Li Lin and C. Xiang, "Analysis of 3D Nonlinear Eddy Current Problem Using the Field Variables H and E Directly", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, 1997.

[4] Dalian Zheng, "Three-Dimensional Eddy Current Analysis by the Boundary Element Method," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 1354-1357, March 1997.

[5] N. Takahashi, T. Nakata, K. Fujiwara and T. Nishimura, "Factors Affecting Errors Due to 2-D Approximate Analysis of 3-D Magnetic Fields with Eddy Current," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 27, No. 6, pp. 5223-5225, Nov. 1991.

[6] S. Ratnajeewan and H. Hoole, *Finite Elements, Electromagnetics and Design*, Elsevier, 1995

[7] M. E. Baran and A. J. Gpetze, "Equivalent Circuit AC Machine Based on Field Analysis", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 9, No. 2, 1994.

[8] D. Albertz and G. Henneberger, "Calculation of 3D Eddy Current Fields using both Electric and Magnetic Vector Potential in Conducting Regions", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, 1998.

[9] H. Roisse and P. Brochet, "Dynamic Simulation of a Synchronous Permanent Magnet Machine using a Coupled Permeance Network," *ICEM'96 Spain*, vol. 1, pp 39-44, Jun. 1996.

[10] I. Boldea and M. Baberscu, "A Multilayer Approach to Analysis of Single Sided LIMs," *Proc. IEE*, Vol. 125, No. 4, 1978, pp. 283-289.

[11] 전연도, 허진, 홍정표, 이주, 현동석, "3차원 등가자기회로방법을 이용한 브러시리스 DC모터의 코깅토크저감에 관한 연구," *대한전기학회 논문지*, Vol. 47, No. 12, pp. 2101-2107, 1998.

저 자 소 개



허진(許眞)

1968. 11. 13. 1999. 2 한양대학교 전기공학과 공학박사. 1999.3-1999.6 한양대학교 산업과학연구소 선임연구원. 1999. 7-2000. 6 Texas A&M University Postdoctoral Research Fellow. 2000.7-2001. 12 한양대학교 BK사업단 계약교수 현재 전자부품연구원 정밀기기센터 선임연구원
Tel : 031-621-2844, E-mail : hurjin@korea.com



홍정표(洪正杓)

1959년 4월 17일생. 1983년 한양대 공대 전기공학과 졸업. 1985년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1985년~1990년 LG정밀(주) 중앙연구소 주임연구원 1990년~1992년 삼성전기(주) 종합연구소 선임연구원. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1996년~1996년 한양대 산업 과학연구소 선임연구원. 현재 창원대 공대 전기공학과 조교수
Tel : 055-279-7517
E-mail : jphong@sarim.changwon.ac.kr



현동석(玄東石)

1950년 4월 8일. 1973년 한양대 공대 전기공학과 졸업. 1978년 동대학원 전기공학과 졸업(석사). 1986년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1984년~1985년 미국 토레도대 교환교수. 1988년~1989년 뮌헨공과대 교환교수. 현재 한양대 공대 전기전자공학과 교수
Tel : 02-290-0345, Fax : 02-290-0532
E-mail : dshyun@email.hanyang.ac.kr