

# 사이클로이드 곡선 및 3차 다항식 곡선기어의 치형 설계에 관한 연구

최종근\*, 윤경태<sup>+</sup>

(논문접수일 2001. 2. 18, 심사완료일 2002. 4. 15)

## A Study on The Tooth Creating Algorithms of The Cycloid Curve Gear and The Third Polynomial Curve Gear

Jong-Geun Choi\*, Kyung-Tae Yoon<sup>+</sup>

### Abstract

The free curve gear is a non-circular gear without any rotating center, which can perform free curve motion for complicated mechanisms, and minimize the work area. In this study, an algorithm for tooth profile generation of free curve involute gear is developed. The algorithm uses the involute gear creating principle in which a gear can be generated by rolling with another standard involute one. Cycloid curve and third polynomial curve gears were designed and verified by computer graphics. These gears are manufactured in the Wire-cut EDM and examined in engagement with a standard spur gear. The results showed that the proposed algorithm is successful to design and to manufacture the free curve gear with concave and convex profiles.

**Key Words :** Involute Gear(인볼류트 기어), Free Curve Gear(자유곡선 기어), Gear Tooth Profile(기어치형), Gear Generation Process(기어 생성법), Cycloid Curve gear(사이클로이드 곡선 기어), Polynomial Curve Gear(다항식 곡선 기어)

## 1. 서론

기어장치는 큰 동력을 정확한 회전운동으로 전달할 수 있고, 높은 전동효율과 순간 가감속이 가능한 중요 기계 요소이다. 따라서 기어전동 장치는 기계산업은 물론 가전산업에

서 널리 활용되고 있으며, 근래에는 제품의 고급화에 따른 경쟁의 심화로 소형화, 경량화가 요구되고 있다. 이러한 요구조건에 맞는 기계요소 중 하나가 비원형기어이다. 이는 자동차의 전동모터, 가정용 VTR과 DVD, OA기기를 비롯한 각종 기구 등에 사용되고 있다. 비원형기어의 활용 예를

<sup>+</sup> 주저자, 순천대학교 기계자동차공학부 (jgchoi@sunchon.ac.kr)  
주소: 540-742 전남 순천시 매곡동 315번지, Tel: 061-750-3820  
<sup>\*</sup> 순천대학교 기계공학과 대학원

살펴보기 위하여 Fig. 1의 두 메커니즘을 생각한다.

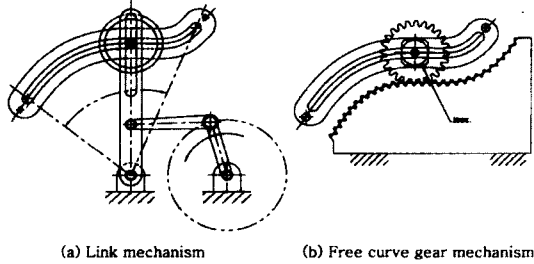


Fig. 1 Comparison of the link and the gear mechanisms

Fig. 1(a)의 링크기구를 이용하여 슬라이딩 왕복운동을 실현하는 데는 적지 않은 공간과 많은 부품이 필요하지만 (b)에서 보는 바와 같이 자유곡면 기어를 이용하게 되면 필요공간을 최소화할 수 있을 뿐만 아니라 사용되는 부품의 수 또한 크게 감소시킬 수 있음을 보여준다. 이렇듯 최신 기기들에서 사용되는 비원형 기어는 비원형 운동의 실현, 비정속 운동전달의 기능의 수행뿐만 아니라 필요한 기구의 설치 공간을 최소화할 수 있어 그 활용범위가 더욱 확대되고 있다. 따라서 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔으며<sup>(1,2)</sup>, 窪田雅男은 비원형 기어에 응용될 수 있는 피치곡선의 수학적성질에 대한 연구를 하였고<sup>(3)</sup>, 横山良明등은 보조기구에 의한 치절장치의 개발에 관해서 연구하였다<sup>(4)</sup>. Litvin은 비원형 기어의 기하학적 해석에 관해 연구를 하였으나 전체적인 기어 이 형상에 대한 연구 중 기어의 필렛부에 대해서는 취급되지 않아 완전한 수학적 모델로 이루어지지 않았다<sup>(5)</sup>. 유명섭은 타원계 비원형 기어에서 이심율의 변화에 따라 치형을 설계하고 CNC 와이어컷 방전가공기로 가공하였다<sup>(6)</sup>. 조승래는 와이어컷 방전가공기로 기어 제작을 위한 연구는 AutoCAD로 설계한 기어 데이터와 NC공작기계를 이용하여 실제로 기어 가공이 가능함을 보여주었다<sup>(7)</sup>. 한홍삼은 비원형기어에 대한 정확한 설계방법으로 타원곡선 상에 정확한 좌표 값을 계산할 수 있다는 것을 보여 주었다<sup>(8)</sup>. 본 연구는 주어진 자유곡선 상에 정확한 치형을 생성시킬 수 있는 기어 생성 알고리즘을 개발하고자 하였다. 기어의 생성원리는 자유곡면 상에 기어를 생성하는 방법으로 Fig. 2를 참고하여 다음을 생각한다.

그림에서와 같이 표준 인볼류트 기어가 탄성이 없고 소성이 용이한 재료-예를 들면 철류과 같은-위를 구르게 하면 재료에는 새로운 인볼류트 기어가 생성될 것이다. 그리고 이 자유곡면 상의 접촉점의 좌표는 기하학적으로 계산되어 질 수 있다. 이러한 원리를 이용하여 본 연구에서 자유곡선

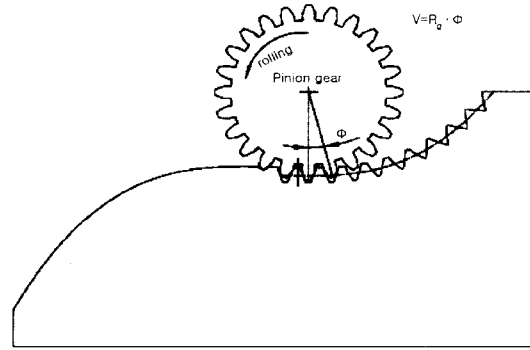


Fig. 2 Gear creation on the free curve by a rolling pinion

기어의 생성 알고리즘을 개발하고, 이를 사이클로이드 곡선과 3차 다항식 곡선에 적용하였다.

## 2. 자유곡선 기어 생성 이론

인볼류트 치형은 원형기어의 경우 일정 각속도비를 만족시키므로 두 기어의 물림점은 작용선이라 부르는 직선 위를 이동한다. 이러한 성질을 이용하면 한쪽이 원형기어이고 맞물리는 상대기어의 치형 정보가 없는 경우에도 상대기어의 물림점들을 계산하여 치형 정보를 얻을 수 있다. 먼저 이 과정을 수식화하기 위하여 인볼류트 치형에 대한 관계식을 다음과 같이 얻는다.  $\alpha$ 를 인볼류트 기어의 압력각이라 할 때 인볼류트 함수(Involute function)는 다음 식(1)과 같이 정의된다.

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (1)$$

식 (1)을 이용하여 인볼류트 치형의 곡선을 반경  $R_i$ 되는 곳의 이두께  $T_i$ 를 구해 보면 다음 식 (2)로 나타난다.

$$T_i = 2R_i \left( \frac{\pi m}{4R} + \text{inv } \alpha_i \right) \quad (2)$$

where  $\alpha_i = \cos^{-1} \left( \frac{R}{R_i} \right)$

여기서  $m$ 은 기어의 모듈(Module)이며,  $R$ 은 피치원의 반지름이다.

다음으로 피니언 기어가 피치선 위를 구를 때 형성되는 각각의 기어들의 물림점들은 Fig. 3에 보여주는 기하학적 원리를 이용하면 아래와 같은 식으로 나타낼 수 있다.

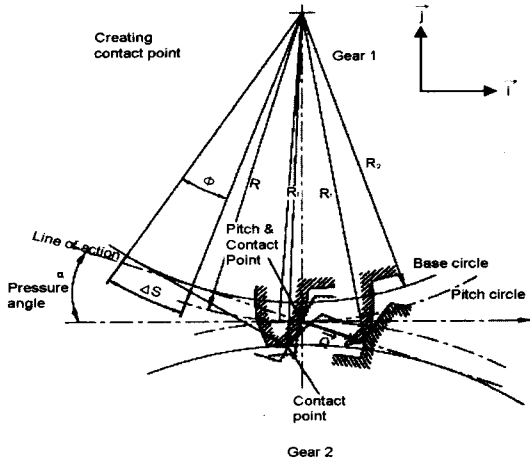


Fig. 3 Kinematic relationship of a pair of engaged gears

$$Q \cos \alpha = R_t \sin \lambda \quad (3)$$

$$R + Q \sin \alpha = R_t \cos \lambda \quad (4)$$

이들 식으로부터  $\vec{R}_t$  벡터와  $\vec{Q}_t$  벡터의 크기를 각각 구하면 다음과 같다.

$$|\vec{R}_t| = \frac{R}{\cos \lambda - \sin \lambda \cdot \tan \alpha} \quad (5)$$

$$|\vec{Q}_t| = \frac{R \sin \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)} \quad (6)$$

여기서  $\lambda$ 는 기어의 회전각  $\phi$ 에 따른 두 물림점 사이의 회전각으로서 Fig. 3의 기하학적 원리를 이용한 식 (7)와 식 (8)으로 나타낼 수 있다.

$$|\vec{Q}_t| = \Delta S = R_g \phi \quad (7)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left[ \frac{\phi(1 + \cos 2\alpha)}{2 + \phi \sin 2\alpha} \right] \quad (8)$$

이상의 식들은 Fig. 4에서 보여주는 바와 같이 생성하고자 하는 기어가 고정되어 있고, 그 위에 표준 인볼류트 기어가 구름 운동 할 때, 구름 기어의 중심에서 계산되는 물림점의 좌표이다.

따라서 구하고자 하는 고정기어의 좌표를 기준으로 물림점을 얻기 위해서는 좌표변환식 식 (9)와 식 (10)을 적용해야 한다.

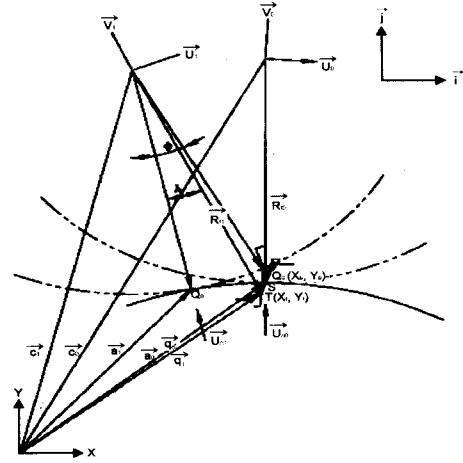


Fig. 4 Creation of free curve gear by rolling of a standard pinion

$$\vec{c}_1 = \vec{a}_1 + R \vec{u}_{n1} \quad (9)$$

$$\vec{q}_1 = \vec{c}_1 + [T] \vec{R}_t \quad (10)$$

$$\text{where } [T] = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix}$$

여기서  $\vec{u}_{n0}$ 과  $\vec{u}_{n1}$ 는 피치곡선과 접하는 두 점  $\vec{Q}_0$ ,  $\vec{Q}_1$ 에서의 단위 법선벡터(Unit normal vector)이고,  $\eta$ 는  $u_1 - v_1$ 좌표계와  $u_2 - v_2$ 좌표계 사이의 이동 좌표계의 회전각이다.

### 3. 사이클로이드 곡선과 치형 생성

자유곡선기어의 한 예로서 사이클로이드 곡선(Cycloid curve)에 인볼류트 기어(Involute gear)를 창성시키는 경우를 생각한다. 사이클로이드 곡선의 방정식은 매개변수 방정식으로써 곡선에 대한 접선 벡터를 구할 수 있고, 곡선의 길이 구간을 따라 구할 수 있는 장점이 있다. 이러한 사이클로이드 곡선식은 식 (11)과 식 (12)으로 쓸 수 있다.

$$x = r_c(\phi_c - \sin \phi_c) \quad (11)$$

$$y = r_c(1 - \cos \phi_c) \quad (12)$$

여기서  $r_c$ 는 곡선의 궤적을 긋는 원의 반지름이고  $\phi_c$ 는 사이클로이드 곡선의 궤적을 그리는 원이 구르는 각도이다. 피니언이 곡선 위를 구르는 동안에는 법선방향의 벡터 상에 항상 피니언의 중심이 존재한다는 원리를 이용한다. 이에

곡선의 법선벡터의 정의는 식 (13)과 같고

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{dT}{dt} / \left\| \frac{dT}{dt} \right\| \quad (13)$$

사이클로이드 곡선의 법선벡터 일반식은 다음 식 (14), 식 (15)와 같다.

$$\vec{u}_{nc} = \frac{1 - \cos \phi_c}{\sqrt{2\sqrt{1 - \cos \phi_c}}} \quad (14)$$

$$\vec{v}_{nc} = \frac{\cos \phi_c}{\sqrt{2\sqrt{1 - \cos \phi_c}}} \quad (15)$$

또한 기어의 창성은 피니언이 회전하는 일정 구간에서 이루어지므로 다음 식 (16)에서와 같이 구간길이를 계산한다.

$$L_{pitch} = R \left( \frac{360}{Z} \right) \quad (16)$$

여기서 Z는 피니언 기어의 잇수이다. Fig. 5와 같이 기어가 창성되는 구간에서는 피니언이 회전하는 길이  $L_{pitch}$ 와 사이클로이드 곡선의 길이가 같으므로, 사이클로이드 곡선의 길이를 구하는 식 (17)을 이용한 식 (18)를 이용한다.

$$L = \int_{\phi_a}^{\phi_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi_c}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi_c}\right)^2} d\phi_c \quad (17)$$

$$L_{cyc} = 4r \left( \cos \frac{\phi_a}{2} - \cos \frac{\phi_b}{2} \right) \quad (18)$$

여기 식(18)에서는 생성 기어의 이 높이를 계산하는데  $L_{pitch}$

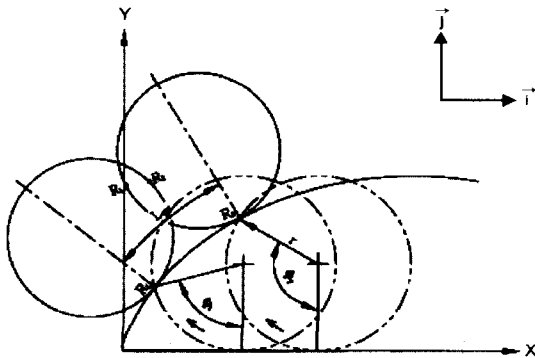


Fig. 5 Rolling distance on the cycloid curve

를  $L_{cyc}$ 에 대입하면  $\phi_a$ 를 구한다. 그리고 치형창성 구간의 길이를 늘려 가는데 물림점이 위로 생성되는 동안은 이 끝 높이(Addendum)에 이르고, 아랫쪽으로 생성될 때는 이 뿌리 높이(Deddendum)에 이르렀을 때 기어의 이 높이를 제한하여 준다. 물림점으로 얻어지는 이 높이는 Fig. 6을 참고하면, 물림점  $Q(X_q, Y_q)$ 로 부터 곡선상의 임의의 점  $P(X, Y)$ 의 길이가 최소가 될 때, 구하고자 하는 이 높이가 되며, 이는 두 점 사이를 잇는 직선의 기울기를 나타내는 식(19)의  $m'$ 가 피치선상의 수직벡터를 나타내는 식 (20)의  $m$ 과 일치 할 때 얻어진다. 식 (21)과 식 (22)은 이들 관계로부터 얻어지는 결과이며, 이를 계산하기 위한 수치 계산법으로 Newton-Raphson method를 사용하였다.

$$m' = \frac{Y - Y_q}{X - X_q} \quad (19)$$

$$m = \frac{\vec{u}_{nc}}{v_{nc}} \quad (20)$$

$$\vec{v}_{nf}(Y - Y_q) = \vec{u}_{nf}(X - X_q) \quad (21)$$

$$L_{lim} = \sqrt{(X_q - X)^2 + (Y_q - Y)^2} \quad (22)$$

#### 4. 3차 다항식 곡선과 치형 생성

자유곡선기어의 다음 예로 3차 다항식 곡선의 경우를 생각한다. 3차의 다항식 곡선의 특징은 곡선의 형상을 보았을 때 각각 한 부분의 오목한 부분과 볼록한 부분을 가지고 있다. 이러한 3차 다항식은 식 (23),식 (24)과 같은 매개 방정식으로 나타낼 수 있다.

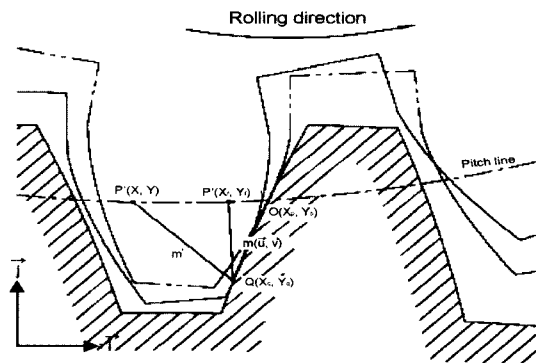


Fig. 6 Tooth height of rolling gear on free curve

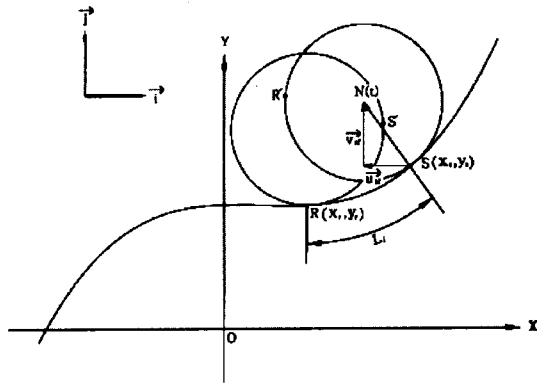


Fig. 7 Third order polynomial curve

$$x_f = t \quad (23)$$

$$y_f = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (24)$$

이 때의 식(24)의 a, b, c, d는 지름 120mm의 피니언이 구를 수 있도록, 계수를 각각 a=0.0002, b=-0.0018, c=0.02, d=100으로 하였다. 이 때 곡선의 모양은 Fig. 7과 같고, 앞서 사이클로이드 곡선에서의 기어생성원리와 같이 3차원 일반곡선식에서도 기어의 위치를 찾기 위해서 법선 방향 단위벡터를 구하면 다음 식 (25), 식 (26)이 된다.

$$\vec{u}_{nf} = \frac{1}{\sqrt{et^4 + gt^3 + ht^2 + st + w}} \quad (25)$$

$$\vec{v}_{nf} = \frac{xt^2 + yt + z}{\sqrt{et^4 + gt^3 + ht^2 + st + w}} \quad (26)$$

여기 3차 다항식곡선에서는 치형의 한계를 구하는데 사이클로이드 곡선에서처럼 길이를 구하는 정형화된 수식이 존재하지 않는다. 이러한 이유로 곡선의 길이는 식 (25)과 식 (26)을 이용하여 곡선상의 좌표값을 이용하여 거리를 더해 준다. 이후 과정은 사이클로이드 경우에서와 같이 식 (21)과 식 (22)를 이용하여 임의의 점과 물림점 사이의 법선벡터 관계를 이용하여 치형 좌표를 구한다.

## 5. 가공 및 검사

자유곡선 기어의 생성 원리를 이용한 창성알고리즘으로 컴퓨터 프로그래밍한 좌표 값은 Fig. 8과 같이 오토캐드 (AutoCAD)를 통하여 컴퓨터 그래픽으로 나타내었다. 이를

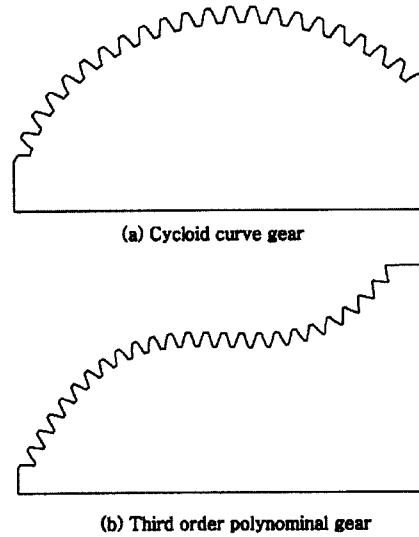


Fig. 8 Free gears designed by the proposed algorithm

다시 G코드로 전환하여 와이어 컷 방전가공기(Wire-cut EDM)로 자유곡선 기어를 제작하였다.

일반적인 기어의 정도측정은 이 두께 마이크로미터(Gear tooth micrometer), 이 두께 버니어 캘리퍼스(Gear tooth Vernier calipers) 등과 같은 계측기나 광학 프로젝트를 이용한 이상치차(理想齒車)와의 비교 등으로 이루어진다. 그러나 본 연구에서 제작된 기어의 경우, 이러한 측정기구들로 기어의 치형 높이나 피치, 그리고 기어 형상검사 등의 극히 일부의 측정만 가능할 뿐이다. 자유곡선 기어는 치형 위치에 따른 형상의 자유도가 매우 다양하므로 기존의 측정방법에 의한 측정은 적합하지 않거나 측정의 의미를 가질 수 없다. 따라서 대안방법으로 이들의 맞물림 운동이 얼마나 정확하고 원활한지를 확인하는 방법이 고려될 수 있다. 그 방법으로는 피니언과 비원형기어의 물림운동 시 피니언의 중심점의 자취가 그리는 궤적(Rolling trace)과 이에 대응하는 이상적인 자유곡선궤적(Ideal trace)을 비교하여 피니언의 중심궤적이 이상궤적을 따라 이동하는지의 여부를 확인하는 것이다. Photo. 1은 사이클로이드 곡선기어와 피니언이 맞물린 것으로 기존의 원형기어와 비교하여 원형이 아닌 곡선에 기어의 치형을 창성한 것입니다. Photo. 2는 3차 다항식 곡선기어와 피니언이 맞물린 모습으로 볼록한 부분과 오목한 부분에도 본 연구의 이론이 적합한 것을 보여준 것입니다. 따라서 각각의 사진에서와 같이 피니언 중심의 궤적은 자유곡선의 피치선인 사이클로이드 곡선의 궤적과 3

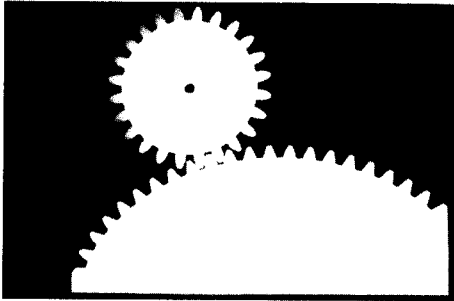


Photo. 1 Rolling test between the pinion and the cycloid curve gear

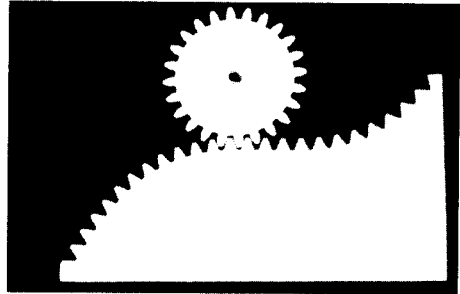


Photo 2. Rolling test between the pinion and the polynomial curve gear

차 다항곡선의 궤적과 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 물림운동 동안에 피니언의 흔들림은 거의 없었으며, 여타의 표준 인볼류트 기어끼리 물리는 경우와 비교하여 물림 정도에 차이가 없음을 확인하였다.

## 6. 결론

본 연구는 사이클로이드 곡선과 3차 다항식 곡선에 인볼류트 기어를 물림점의 자취를 찾아 치형곡선을 얻어 직접 제작하였다. 연구의 결과로 얻어진 내용을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 인볼류트 기어의 구름 원리를 이용한 치형 생성 알고리즘으로 자유곡선 상의 기어 설계가 가능함을 확인하였다.
- (2) 제시된 알고리즘이 자유곡선 위에 존재하는 오목한 부분과 볼록한 부분에도 정확한 치형 설계가 가능함을 증명하였다.
- (3) 제시된 알고리즘은 치형을 나타내는 정확한 수치 데이터를 산출할 수 있게 하였고 수치제어 와이어 컷 방전 가공기를 이용한 기어 제작에 직접 이용될 수 있었다.
- (4) 실제 제작된 자유곡선기어는 피니언이 자유곡선기어와 맞물렸을 때 여타의 표준기어와 동질의 물림정도를 보였으며 이로써 제시된 알고리즘이 유효함을 입증하였다.

이상으로 본 연구에서 제시된 알고리즘이 좌표로 표현 가능한 비원형 또는 자유곡선 형상 위에 필요한 치형 설계가 가능함을 보여주었으며 여러 메커니즘 분야에 활용될 수 있을 것으로 사료된다. 또 더 나아가 형상설계와 더불어 자유곡선기어의 특성에 대한 연구 및 개발이 지속된다면 기계장치의 고급화와 기계요소 연구에 많은 도움이 될 것으로 기대된다.

## 후 기

본 연구는 2000년도 순천대학교 공과대학 학술재단 및 BK21사업단의 지원으로 수행되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) A. Cardou and G. V. Tordion, "A study of Super Gear Geometry Factor Through Complex Potential Areas", *Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design*. ASME, Vol. 111, 1989.
- (2) Y. Cai and T. Hayashi, "The Linear Approximated Equation of Vibration of a pair of Spur Gears Theory and Experiment", *ASME 6*, Vol. 116, 1994.
- (3) 窪田雅男, "非圓形齒車に 關する 研究", *日本機械試驗所報告*, No. 30, 3月, 1959.
- (4) 廣山良明, "非圓形齒車 機構の設計, 製作", *日本設計製圖學會論文集*, Vol. 22, No.5, pp. 1~7, 1987.
- (5) Faydor L. Litvin, "Gear Geometry and Applied Theory", Ph.D. Univ. of Illinois at Chicago 1994.
- (6) 유명섭, "타원계 엽형기어의 설계 및 동특성에 관한 연구", *한국정밀공학회*, 제15권, 제4호, pp. 7~14, 1998.
- (7) 조승래, "spur Gear의 wire-cut EDM을 위한 NC-code 생성에 관한 연구", 석사논문, 1996, 창원대학교.
- (8) 한홍삼, 최종근, 이동주, "자유곡선 기어의 창성 알고리즘에 관한 연구", 1999, 한국공작기계학회지 pp. 96~101.
- (9) Peter Lywander, "Gear Drive System-design and application", MARCEL DEKKER, INC. 1983.