韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 5. 제 41권, 제 1호, 91-100.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2002, Vol. 41, No. 1, 91-100.

대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근

김 병 무 (충주대학교)

I. 서 론

급수의 합을 구하는 여러 가지 방법을 학습함으로써 합리적인 사고력과 체계적인 계산법을 터득하는 데 도움을 주고, 수학이 때로는 응용과 상관 없이 보이지만 그 자체로 만족감을 얻을 수 있음을 이 기회를 통해 맛보게 하고자 한다. 단지 산이 있어 산을 오른다는 산악인들처럼 수학이 있기에 수학을 즐기게 하는 도구로 급수의 합을 구하게 한다.

고교 시절에 배운 무한급수의 합을 구하는 방법을 포함하여 다양한 접근 - Bernoulli 수 이용, 적분 이용, 오일러의 공식 유도과정 이용, Fourier급수 이용을 통해 대학수학에서 급수를 배우는 단원에서 시도해 본다.

폭 넓게 이해할 수 있는 수업, 흥미를 끄는 수업, 감동과 자극을 줄 수 있는 수업이 되도록 하며, 또 숫자 속에서 미와 우아함을 느끼도록 접근해 본다(김병무, 1997).

수업욕구나 동기가 침체된 학생들에게 활력을 불어넣는 방법으로 한가지 내용에 대해 다양한 접근을 통해 배우고 싶어한다(김병무, 1999).

이러한 시도는 급수의 합 구하기뿐만 아니라(Glaister, 2001), 좌표에 대한 다양한 접근(Temple H. Fay, 2000), 파이의 계산에 대한 다양한 접근(Osler and Wilhelm, 2000), 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산(김병무, 2001), Journal "Mathemaics and Computer Education"의 내용들이 대학수학 수업에 흥미를 돋우기 위해 새로운 자료를 제공하고 있다.

이 논문에서의 시도는 대학 1학년에서 다루는 내용이외에 몇 가지 급수의 합을 구하는 방법이 더 있다는 것을 알게 하여 흥미를 갖고 학습에 관심을 얻게 하려는 것이다. 다음의 여러 가지 급수의 합을 구하는 방법을 알아보고 지금까지 배운 내용을 통해 구할 수 없는 것과 또 다른 방법으로 구할 수 있는 것을 알아보며, 컴퓨터 프로그램을 이용한 계산과도 비교할 기회를 가져본다.

II. 본 론

1. 고등학교에서 배운 급수의 합

Karl Gauss의 천재성은 어린 시절부터 분명히 알 수 있었다. 그의 학교 선생님은 단순한 계산법으로 학급을 장악할 희망을 갖고 학생들에게 1부터 100까지 더하도록 말했다. 그의 학급 동료들이 열심히 계산하는 동안 가우스는 단지 몇 초만에 정확한 답을 구했다. 그는 그것을 어떻게 계산했을까? 주요 관점은 고등학교 대수과정에서 학생들에게 강조되는 n번째와 101- n번째의 합이 일정하다는 생각이다.

$$\begin{array}{rl} & 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ +) & 100 + 99 + 98 + \cdots\cdots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 101 + 101 + 101 + \cdots\cdots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

100 개의 항이므로 $100 \times 101 = 10100$, 따라서 1부터 100까지의 자연수의 합은 이것의 반 5050이다. 어린 시절의 가우스는 이것을 간단히 했다. 일반으로 처음 n개의 자연수의 합은 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 이다.

그러면 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots n^2 = ?$ 은 어떻게 계산하면 되겠는가?

즉 처음 n^2의 합은 얼마인지 구해보자. 이것은 가우스의 방법으로는 해결할 수 없다. 다음과 같이 생각해 보기로 한다.

---

* 2001년 5월 투고, 2002년 4월 심사 완료.
* ZDM분류 : D15
* MSC2000분류 : 97D99
* 주제어 : 수학의 흥미, 여러 가지 급수의 합.

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}$$
$$=(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots$$
$$+\{n^2-(n-1)^2\}+\{(n+1)^2-n^2\}$$
$$=-1^2+2^2-2^2+3^2-3^2+\cdots$$
$$+(n-1)^2-(n-1)^2+n^2-n^2+(n+1)^2$$
$$=(n+1)^2-1.$$

한편, 처음 식은 다음과 같이 간단히 할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2-k^2\}=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1-k^2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

따라서, $2\sum_{k=1}^{n}k+n=(n+1)^2-1$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(n+1)^2-1-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

이 방법은 $(k+1^3)-k^3$ 의 합에 적용할 수 있다.

$$(n+1)^3-1$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n)$$
$$=\frac{1}{3}(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n)$$
$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

일반으로 처음 n^m의 합을 $(k+1)^{m+1}-k^{m+1}$ 꼴의 식을 더하는 것은 생각하여 구할 수 있다. 그러나 이 식을 간단히 하기 위하여는 처음 n, n^2, n^3, $\cdots$, n^{m-1} 의 합에 대한 공식을 알 필요가 있다. 이런 방법은 반복적이고 조금 번거롭다. 처음 n^m의 합을 구하는 좋은 방법은 없는가?

대답은 yes이다. 그러나 답을 얻으려면 급수전개의 배경이 필요하다. 일변수함수의 Taylor와 Maclaurin 급수전개를 이용하면 된다.

2. n^k의 합과 Bernoulli 수

함수 $B(Z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ 의 $Z=0$에 대한 급수전개를 생각해 보자.

즉 $\dfrac{Z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\dfrac{Z^n}{n!}$, B_n은 n번째 Bernoulli number이다 ($n\geq 0$).

이식을 B_n에 대하여 풀면,

$$Z=(e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{Z^n}{n!}$$
$$=(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z^n}{m}-1)\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{Z^n}{n!}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{Z^m}{m!}\frac{Z^n}{n!}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{Z^{m+n}}{m!\,n!}$$

이 된다. 이 때, $k=m+n$이라 하면,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{Z^{m+n}}{m!\,n!}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{B_0}{k!0!}+\frac{B_1}{(k-1)!1!}+\cdots+\frac{B_{k-1}}{1!(k-1)!})Z^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B_j}{j(k-j)!})Z^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k!}{j!(k-j)!}B_jZ^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}B_jZ^k=Z$$

이므로 $k>1$의 모든 멱은 0이다.

따라서,

$$B_0=1,\quad \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}B_j=0\quad (k>1)$$

이것은 Bernoulli 수를 찾는데 간단한 관계식을 준다. 처음 몇 개를 계산해 보면 다음과 같다.

n	0	1	2	3	4	5
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0
n	6	7	8	9	10	11
B_n	$\frac{1}{142}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0
n	12	13	14	15		
B_n	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0		

$n=1$인 경우를 제외하고는 홀수항의 Bernoulli 수는 0이다. 더욱이 0이 아닌 항은 부호가 교대로 바뀌는 유리수이다.

이제, 처음 n^k의 합과 어떤 관계가 있는가?

Bernoulli 수를 표현하는 또 다른 방법은 다음 이항정리를 사용한다.

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

이제 Bernoulli 수를 설명해 보기로 한다.

$$B_0=1,\quad \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}B_j=0$$

이항전개식에서 "멱"으로 B에 대한 첨자(아래에 쓰인 문자)를 다음과 같이 쓴다.

$$B_k=\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}B_j+B_k$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B_j=(B+1)_k \quad (k>1)$$

한편,

$$(v+B+1)_k-(v+B)_k$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}v^{k-j}(B+1)_j-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}v^{k-1}B_j$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}v^{k-j}\{(B+1)_j-B_j\}$$

$$=\binom{k}{0}v^k(1-1)+\binom{k}{1}v^{k-1}(B_1+1-B_1)+\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}v^{k-j}0$$

$$=0+kv^{k-1}+0$$

$$=kv^{k-1}$$

이다. 이 식에 $v=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 을 대입하면,

$$k\cdot 1^{k-1}=(B+2)_k-(B+1)_k$$

$$k\cdot 2^{k-1}=(B+3)_k-(B+2)_k$$

$$k\cdot 3^{k-1}=(B+4)_k-(B+3)_k$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k\cdot(n-1)^{k-1}=(B+n)_k-(B+n-1)_k$$

$$k\cdot n^{k-1}=(B+n+1)_k-(B+n)_k$$

위의 식들을 변끼리 더하면,

$$k\sum_{j=1}^{n}j^{k-1}=(B+n+1)_k-(B+1)_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}j^k=\frac{(B+n+1)_{k+1}-(B+1)_{k+1}}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\{(n+1)^{k+1-j}-1\}B_j$$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\{(n+1)^{k+1-j}-1\}B_j$$

(Dorrie, Heinrich, 1965)

이식에 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots$ 을 대입하여 계산하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{n}j^0=n$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^3=\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^4=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{3n^2+3n-1}{5},$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^5=\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2\frac{2n^2+2n-1}{3},$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^6=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{3n^4+6n^3-3n+1}{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}j^7=\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2\cdot\frac{3n^4+6n^3-n^2-4n+2}{6}$$

3. $\sum_{i=1}^{n}i^k$의 또 다른 접근

또 다른 방법으로 $\sum_{i=1}^{n}i^k$을 계산해 보자. 우선

$P_0(x)=1,$

$P'_1(x)=P_0(x)=1,$

$P'_2(x)=P_1(x),$

$P'_3(x)=P_2(x),$

$\vdots \qquad \vdots$

$P'_{k+1}(x)=P_k(x)$

라 놓으면

$$I=\int_0^1 P_0(x)g(x)dx$$

$$=[P_1(x)g(x)]_0^1-\int_0^1 P_1(x)g'(x)dx$$

$$=[P_1(x)g(x)]_0^1-[P_2(x)g'(x)]_0^1+\int_0^1 P_2(x)g''(x)dx$$

$$=[P_1(x)g(x)]_0^1-[P_2(x)g'(x)]_0^1$$

$$+[P_3(x)g''(x)]_0^1-\int_0^1 P_3(x)g'''(x)dx$$

이다. $k>0$에 대하여 $\int_0^1 P_k(x)dx=0$ 라 하면 각 다항식의 상수항은 이 식에 의해 정해지고,

$m>1,\ P_{2m}(0)=P_{2m}(1)$

$P_{2m+1}(0)=P_{2m+1}(1)=0$

이 된다.

$$I=\frac{1}{2}[g(2)+g(1)]+P_2(0)[g'(0)-g'(1)]$$

$$+P_4(0)[g'''(0)-g'''(1)]+\int_0^1 P_4(x)g^{(4)}(x)dx$$

이므로 구간 $[0,\ 1]$를 $[k,\ k+1]$로 바꾸면

$$\frac{1}{2}[g(k)+g(k+1)]=\int_k^{k+1} g(x)dx$$

$$-P_2(0)[g'(k)-g'(k+1)]$$

$$-P_{4(0)}[g'''(k)-g'''(k+1)]$$

$$-\int_0^1 P_4(x)g^{(4)}(k+x)dx$$

이다. 여기서 $k=0$에서 $k=n-1$까지 대입하여 변끼리 더하면,

$$\frac{1}{2}g(0)+g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)+\frac{1}{2}g(n)$$

$$=\int_0^n g(x)dx+P_2(0)[g'(n)-g'(0)]$$

$$+P_4(0)[g'''(n)-g'''(0)]+E_4$$

단, $E_4=-\int_0^1 P_4(x)\{g^{(4)}(x)+g^{(4)}(x+1)+\cdots+g^{(4)}(x+n-1)\}dx$

이다. 이 방법을 계속 적용하면,

$$\frac{1}{2}g(0)+g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)+\frac{1}{2}g(n)$$

$$=\int_0^n g(x)dx$$

$$+\sum_{i=1}^{m}P_{2i}(0)[g^{(2i-1)}(n)-g^{(2i-1)}(0)]+E_{2m+2}$$

단,

$$E_{2m+2}=-\int_0^1 P_{2m+2}(x)[\sum_{k=0}^{n-1}g^{(2m+2)}(x+k)]dx$$

를 얻는다. 이 때,

$g(x)=x^k,\ k=2m+1$, 또는 $k=2m$

라 하면

$g^{(2m+2)}(x)=0,\ E_{m+2}=0$

를 얻는다. 한편,

$\beta_0(x)=1,$

$\beta'_n(x)=n\beta_{n-1}(x),\ \int_0^1 \beta_n(x)dx=0$ 을 만족하는 다항식을 Bernoulli 다항식이라 하는데,

$\beta_0(x)=1, \quad \beta_1(x)=x-\frac{1}{2},$

$\beta_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$

$\beta_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\ \cdots$

$\beta_{k+1}(x+1)-\beta_{k+1}(x)=(k+1)x^k$

이 된다.

$P_k(x)=\beta_{k+1}(x+1)-\beta_{k+1}(x)$

라 놓으면

Brenoulli 수 $B_n=\beta_n(0)\ (n\geq 0)$ 는

$B_n=n!P_n(0)$

$$P_0(0)=1$$

$$P_k(0)=-\sum_{j=0}^{k}\frac{P_{k-j}(0)}{(j+1)!},$$

$$B_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!B_j}{j!(k-j)!}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}$$

이다.

한편, Mathematica 로 B_k 값을 $k=1$에서 $k=20$까지 구하려면 다음과 같이 시행한다.

```
P[0]: = 1
P[k_]: = P[k]
= − Sun[P[k − j]/Factorial[j + 1], {j, 1, k}]
Table[P[k] * Factorial[k], {k, 1, 20}]
```

k가 홀수일 때, $k=2m+1$, $g^{(2m+2)}(x)=0$

$$\frac{1}{2}g(0)+g(1)+g(2)+\cdots+g(n-1)+\frac{1}{2}g(n)$$

$$=\int_0^n g(t)dt+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}[g^{(2i-1)}(n)-g^{(2i)}(0)]$$

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

$$=\frac{1}{2}g(0)+g(1)+g(2)+\cdots$$

$$+g(n-1)+\frac{1}{2}g(n)+\frac{1}{2}g(n)$$

$$=\frac{1}{2}g(n)+\int_0^n g(t)dt$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}[g^{(2i-1)}(n)-g^{(2i-1)}(0)]$$

$$=\frac{n^k}{2}+\frac{n^{k+1}}{k+1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}g^{(2i-1)}(n)$$

$$=\frac{n^k}{2}+\frac{n^{k+1}}{k+1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}k(k-1)(k-2)$$

$$\cdots(k-2i+2)n^{k-2i+1}$$

$$=\frac{n^k}{2}+\frac{n^{k+1}}{k+1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{k-2i+1}\binom{k}{2i}n^{k-2i+1}$$

같은 방법으로 $k=2m$(짝수) 일 때,

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$

$$=\frac{n^k}{2}+\frac{n^{k+1}}{k+1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{k-2i+1}\binom{k}{2i}n^{k-2i+1}$$

$$=\frac{n^k}{2}+\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

$$\{(k+1)n^k+\sum_{s=1}^{k+1}B_{k+1-s}\binom{k+1}{s}n^s-B_{k+1}\}$$

$$S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k$$

$$=\frac{1}{k+1}\{(k+1)n^k+\beta_{k+1}(n)-B_{k+1}\}$$

$$=\frac{1}{k+1}\{\beta_{k+1}(n+1)-B_{k+1}\}$$

$$=\frac{1}{k+1}\int_0^{n+1}\beta_k(x)dx$$

$$k=2m\ ;\ S_k=\frac{1}{k+1}\beta_{k+1}(n+1)$$

$$k=2m+1\ ;\ S_k=\frac{1}{k+1}\beta_{k+1}(n+1)-B_{k+1}$$

$$\frac{S_{2m}}{S_2}=\frac{3}{2m+3}\frac{\beta_{2m+1}(n+1)}{\beta_3(n+1)}$$

$$\beta_3(x)=x(x-1)(x-\frac{1}{2}),$$

$$\beta_{2m+1}(0)=\beta_{2m+1}(1)=0$$

$$\beta_{2m+1}(x)=x(x-1)q(x)$$

$q(\frac{1}{2})=0$에서 $S_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\frac{S_{2m+1}}{S_3}=\frac{4}{2m+2}\frac{\beta_{2m+2}(n+1)-B_{2m+2}}{\beta_4(n+1)-B_4}$$

$$\beta_4(x)-B_4=x^2(x-1)^2,$$

$$\beta_{2m+2}(0)=\beta_{2m+2}(1)=B_{2m+2}$$

$$\beta_{2m+2}(0)=(2m+2)\beta_{2m+1}(0)=0$$

$$\beta_{2m+2}(1)=(2m+2)\beta_{2m+1}(1)=0$$

$$\therefore S_{2n+1}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}P(n+1)$$

(Jiu Ding & Temple H. Fay, 1996)

4. 적분을 이용한 급수의 합

적분을 이용하여 급수의 합을 구하는 방법을 알아보자. 우선,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}+\cdots$$

의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1}$$
$$=\frac{1-x^{2n}}{1+x}$$

$|x|<1$에서 위의 식의 양변을 적분하면,

$$\int_0^1(1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1})dx$$
$$=\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x}\,dx$$
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\int_0^1\frac{1-x^{2n}}{1+x}\,dx$$
$$\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}-\int_0^1\frac{dx}{1+x}\right|=\left|-\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}\right|<\left|\int_0^1 x^{2n}dx\right|$$
$$\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k)}-\ln 2\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$$

이 된다. 따라서,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5-6}+$$
$$\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}+\cdots=\ln 2$$

이제 비슷한 방법으로 다음 급수의 합을 구하여 보자.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\cdots$$
$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15\cdot 17}+\cdots$$

우선,

$$\frac{1}{\beta(\beta+1)}=\int_0^1\frac{x^\beta}{\beta}\,dx=\int_0^1 dx\int_0^x y^{\beta-1}dy$$
$$=\int_0^1 dy\int_y^1 y^{\beta-1}dx=\int_0^1(1-y)y^{\beta-1}dy$$
$$(\beta>0)$$

위의 식에서 β대신 $\alpha, \alpha+2,\cdots,\alpha+2n$을 대입하면,

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$$
$$+\cdots+\frac{1}{(\alpha+2n)(\alpha+2n+1)}$$
$$=\int_0^1(1-y)y^{\alpha-1}(1+y^2+\cdots+y^{2n})dy$$
$$=\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y+y^2-y^3+\cdots-y^{2n+1})dy$$
$$=\int_0^1\frac{y^{\alpha-1}(1-y^{2n+2})}{1+y}\,dy\qquad(\alpha>0)$$
$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{(\alpha+2n)(\alpha+2n+1)}-\int_0^1\frac{y^{\alpha-1}}{1+y}\,dy$$
$$=-\int_0^1\frac{y^{\alpha+2n+1}}{1+y}\,dy$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\alpha+2k)(\alpha+2k+1)}-\int_0^1\frac{y^{\alpha-1}}{1+y}\,dy\right|$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\frac{y^{\alpha+2n+1}}{1+y}\,dy\right|\leq\lim_{n\to 0}\left|\int_0^1 y^{\alpha+2n}dy\right|\to 0$$

따라서,

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{(\alpha+2n)(\alpha+2n+1)}+\cdots=\int_0^1\frac{y^{\alpha-1}}{1+y}\,dy$$

이다. 위의 식의 α에 $\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$을 대입하면,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)2n}+\cdots$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+y}\,dy=\ln 2$$
$$4\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots\right)$$
$$=\int_0^1\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{1+y}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}\,dy$$
$$=\int_0^1\frac{2}{1+t^2}\,dt=2[\tan^{-1}t]_0^1=\frac{\pi}{2}$$
$$\therefore\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots=\frac{\pi}{8}$$

를 얻는다. 이번에는 같은 방법으로,

$$\frac{1}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}=\int_0^1\frac{x^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)}dx$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y z^{\beta-1}dz$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2 z^{\beta-1}dz \quad (\beta>1)$$

를 얻고, β에 α, $\alpha+3,\cdots,\alpha+3n$ 을 대입하여 더하면,

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{1}{(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)}$$
$$+\cdots+\frac{1}{(\alpha+3n)(\alpha+3n+1)(\alpha+3n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2 z^{\alpha-1}(1+z^{3+}\cdots+z^{3n})dz$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z)z^{\alpha-1}(1-z^{3n+3})}{1+z+z^2}dz \quad (\alpha>0)$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\alpha+3k)(\alpha+3k+1)(\alpha+3k+2)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z)z^{\alpha-1}}{1+z+z^2}dz\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z)z^{\alpha-1}(z^{3n+3})}{1+z+z^2}dz\right|$$
$$\leq\lim_{n\to 0}\frac{1}{2}\int_0^1 z^{3n}dz\to 0$$

이다. 따라서,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\alpha+3k)(\alpha+3k+1)(\alpha+3k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z)z^{\alpha-1}}{1+z+z^2}dz$$

위의 식의 α에 $\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$를 대입하면,

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8\cdot9}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-z}{1+z+z^2}dz$$
$$=\frac{3}{4}\int_0^1\frac{1}{1+z+z^2}dz-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2z+1}{1+z+z^2}dz$$
$$=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$
$$-\frac{1}{4}[\ln(1+z+z^2)]_0^1$$
$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]-\frac{1}{4}\ln 3$$
$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-\frac{3\ln 3}{12}=\frac{1}{12}(\sqrt{3}\pi-3\ln 3)$$

이 되고,

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{7\cdot9\cdot11}+\frac{1}{13\cdot15\cdot17}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-z)z^{-\frac{1}{2}}}{1+z+z^2}dz$$
$$=\frac{1}{16}\ln 3$$

이 된다. 한편,

$$\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}f(x_n)dx_n$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 f(x_k)(1-x_k)^{k-1}dx_k$$

(Watson Fulks, 1978)를 이용하면

$$\frac{1}{1\cdot2\cdots k}+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots 2k}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1\frac{(1-x)^{k-2}}{1+x+\cdots+x^{k-1}}dx$$

를 얻는다.

위와 같은 방법으로 하면 다음 값을 계산할 수 있다.

$$\frac{1!}{10!}+\frac{10!}{20!}+\frac{20!}{30!}+\cdots$$
$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8\cdot9}-\cdots$$

5. 오일러 공식 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 의 계산

Euler가 발견한 이 급수의 합을 추론하면 다음과 같다 (고석구 외, 2000).

a와 b가 0이 아닐 때, a, b는 방정식

$(1-\frac{x}{a})(1-\frac{x}{b})=0$의 근이다.

또 이방정식은 $1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})x+\frac{1}{ab}x^2=0$과 같이 쓸 수 있다.

x 대신에 x^2을, a, b 대신 a^2, b^2 을 각각 대입하면 $(1-\frac{x^2}{a^2})(1-\frac{x^2}{b^2})=0$에서

$1-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})x^2+\frac{1}{a^2b^2}x^4=0$ 이 되고

$x=\pm a$, $\pm b$는 근이 된다.

이 방법을 계속하면,

$(1-\frac{x^2}{a^2})(1-\frac{x^2}{b^2})(1-\frac{x^2}{c^2})=0$ 에서

$$1-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})x^2$$

$$+(\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2})x^4-\frac{1}{a^2b^2c^2}x^6=0$$이

되고, $x=\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ 는 근이 된다.

한편, 다음 두 방정식은 무수히 많은 해 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, …를 갖는 무한차방정식으로 생각할 수 있다.

$$\sin x=0$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=0$$

그러므로 $x\neq 0$ 일 때

$$\frac{\sin x}{x}=0$$

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0$$

의 근은 $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, … 이다.

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

$$=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})\cdots$$

이므로 양변의 x^2의 계수를 비교해 보면

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots=\frac{1}{3!}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

을 얻는다.

일반적으로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ 에 대한 오일러 공식은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\pi^{2k}$$

(단 $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$)

이고, 특별히 $k=1$, 2, 3 에 대하여는 다음 식을 얻게 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

이와 같은 방법으로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$, … 에 대한 합을 구할 수 있다.

6. Fourier 급수 이용

$f(x)=x(-\pi<x<\pi)$ 의 Fourier 급수을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 을 구하기 위하여, $f(x)=x$ 의 Fourier 계수를 먼저 구해 보면,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-x}^{x}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-x}^{x}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}conx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

이다. 따라서, Parseval의 등식에 의하여(김병무 · 윤주한, 2000)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\}^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 이다.

이번에는

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$ 을 구해보자.

$f(x) = x^2\ (-\pi < 0 < \pi)$ 에서 Fourier 계수를 구하면,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_{\pi}^{-\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n 4}{n^2} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0; \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

이다. 따라서 Parseval의 등식을 이용하면,

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ 에서,

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{4}{n^2}\right\}^2$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45}$$

이 되므로, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ 이 된다.

일반적으로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ 의 값을 Fourier 급수를 이용하여 구하는 것은 도전문제로 남겨 놓는다.

Ⅲ. 결 론

급수의 합을 구하는 몇 가지 방법을 알아보았다. 물론 컴퓨터의 도움으로 쉽게 답을 얻는 경우도 있으나 원리를 터득하여 알아내는 것이 수학적 개념의 이해에 도움을 주고 새로운 것을 찾아내려는 시도에 한 발 다가설 수 있을 것이다. 대학수학 수준에서 구할 수 있는 급수의 합에 더하여 적분을 이용, Fourier급수의 도움, Euler의 공식 추론과정을 통해 상당한 수준의 급수의 합을 구하는 문제를 해결할 수 있다. 더 나아가 일반화시킬 수 있는 힘을 기르는 데 도움이 될 것이다.

무한급수의 합을 구하는 것은 여러 가지 유용한 용도가 있다. 예를 들어, 열의 흐름, 진동, 화학변화, 신호전송과 같은 미분방정식의 문제풀이에 도움을 준다. 실제 학습현장에서는 각 계산과정에서 설명이 부족한 부분의 원리와 공식유도를 하여 주고, 이 논문에서는 참고문헌을 통해학습 할 기회를 열어 둔다. 급수의 합을 이용한 응용분야는 상당한 수준의 능력이 필요한 고급과정에서 다루므로 학생들의 수준이 높아짐에 따라 선택할 문제이다.

참 고 문 헌

고석구 외 16 (2000). 미적분학과 해석기하, 서울; 경문사

김병무 (1997). 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(2), pp.127-133, 서울: 한국수학교육학회.

김병무 (1999). 대학수학 수업과 평가의 다양화, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(2), pp.173-177, 서울: 한국수학교육학회.

김병무 (2001). 대학수학에서 Mathematica를 이용한 파이의 계산, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 11, pp.307-319, 서울: 한국수학교육학회.

김병무 · 윤주한 (2000). 미분방정식 기초, 서울; 교우사.

Dorrie, Heinrich (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, New York; Dover Publication, Inc

Jiu Ding & Temple H. Fay (1996). Benoulli Numbers and Calculating the Sum $1^k+2^k+\cdots+n^4$, *Mathematics and Computer Education* 32.

P. Gleister (2001). Evaluating Sums of Infinite Series Using Integrals, *Mathematics and Computer Education* 35(3).

Thomas J. Osler & Michael Wilhelm (2001), Variation on Viete's and Wallis' Products for pi, *Mathematics and Computer Education* 35(3).

Temple H. Fay (2000), An Introduction to Curves in Elliptic Coordinates, *Mathematics and Computer Education* 34(2).

Watson Fulks (1978). *Advanced Calculus,* Third Edition, Addison Wesley.

Several Approaches on the Sum of Series in College Mathematics

Kim, Byung-Moo

Dept. of General Arts, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk 380-702, Korea;

E-mail:bmkim6@hotmail.com

The purpose of this study is to help the students understand the concepts for the series and calculate the sum of series with diverse methods --- a) High School Algebraic Technique, b) Using Bernoulli Number, c) Integral Method, d) Euler Formular, e) Fourier Series

* ZDM classification : D15

* MSC2000 classification : 97D99

* key word : intelest of mathematics, sum of several series.