大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 12 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.2, 275-290, May 2002

수학적 추론으로서의 가추법[1)]

김선희* 이종희**

Ⅰ. 서론

정보화 사회는 산재해 있는 수많은 정보들 중에서 인간 자신에게 가치가 있고 필요한 정보를 선택해서, 실생활에서 일어나는 문제를 스스로 해결하고 논리적으로 사고할 것을 요구하고 있다. 어떤 진술의 참과 거짓을 확인하고, 주어진 사실 이상의 결론을 이끌어내고, 새로운 지식을 창조해 내는 것은 일상 생활과 과학뿐 아니라 수학 학습에서도 중요하다. 논리적인 사고력 신장은 수학 교육에서 강조하는 목표 중 하나이며, 지금까지의 수학교육은 엄밀한 증명 다시 말하면, 연역적인 사고를 강조해 왔다. 그러나 수학 학습은 누군가 만들어 놓은 훌륭한 학문으로서의 수학을 답습하기보다는 수학적 내용과 사고를 학생들 스스로 창조하고 재발명할 수 있는 기회를 주는 것이라 할 때, 수학적 추측을 생성하는 논리로서의 개연적 추론(plausible reasoning) 또한 수학 학습에서 신장되어야 한다.

Polya(1954)는 수학이 연역적 추론을 배우는데 훌륭한 기회를 제공한다는 것을 누구나 알고 있지만, 개연적 추론을 배우는데 있어서도 수학과 필적할 만한 기회를 제공하는 교과는 없다고 하면서 수학 교과에서 추론 지도의 필요성을 언급하였다. Polya는 개연적 추론으로서 귀납 논리를 생각하였다. Polya는 독특한 단순성과 명확성으로 인해 수학이 다른 어떤 교과보다도 귀납적 추론을 경험시키기가 용이하고, 모방과 실행을 통해서 학습될 수 있으며, 귀납에 의한 수학의 발견과정에 대한 풍부한 예와 함께 그것을 모방하도록 하기 위한 많은 예와 실행을 위한 기회를 제공하는 것이 가능하다고 하였다.

그러나 개연적 추론을 연역적 방법으로 전개되지 않는 여타의 추론 방식으로 본다면, 개연적 추론 내에는 여러 사실들의 관찰을 통해 결론을 도출하는 귀납 뿐 아니라 법칙과 결과로부터 사례에 대한 가설을 세워 새로운 지식이나 정보를 알아낼 수 있는 추론 논리가 사용되기도 한다. 예를 들어, 정사각형의 대변의 길이가 같다는 결과를 얻었을 때, 평행사변형의 대변의 길이는 같다는 기존의 규칙으로부터, 정사각형이 평행사변형이라는 가설을 세우는 것은 수학 학습에서 흔히 발생하는 추론이다. 새로운 사실을 알아내기 위해 가설을 세울 때는 기존의 규칙과 관찰된 결과로부터 추측을 할 수밖에 없고, 여기서 새로운 수학적 사실의 발견과 발명이 이루어진다. 그러나 이것은 연역이 아니기 때문에, 반드시 참이 성립한다고 할 수 없다. 단지 개연적 추론일 뿐이며, 바로 가

---

* 광장중학교
** 이화여자대학교
1) 이 논문는 2001년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2001-030-D00015)에 의하여 이루어졌음.

가추법(假推法, abduction)에 해당하는 것이다. 가추법은 Peirce가 제안한 추론으로서, 귀환법(retrodution), 가정(hypothesis), 추정(presumption), 독창적인 주장(originary argument) 등으로 불리기도 하며, 현상학에서 일차적인 방식으로 분류되는 추론이다.

가추법은 문제를 해결하는 과정동안 학습자가 구성하는 수학적 지식에서 중대한 역할을 할 수 있으며, 문제 해결 활동의 발달을 촉진하는 것을 돕는다(Cifarelli, 1997). Mason(1995)은 학습자의 추측이 나오는 배경을 조사하는 것에 대한 중요성을 언급했고, 거기서 가추적 과정의 조사가 보증될 것을 제안하였다(Cifarelli, 1997, 재인용).

본 연구는 논리학과 기호학의 저명한 학자인 Peirce의 관점에서 가추법이 수학적 추론으로서 활용될 수 있는지를 알아보고자 한다. 이를 위해 먼저 추론의 한 종류로서 가추법이 무엇인지 알아보고, 수학적 추론으로서 가추법의 유형을 유추에 속하는 은유와 환유로 제시한 후, 기호학적 관점에서 문제 해결의 한 예시를 분석하여 수학 학습에서 가추법의 유형인 은유와 환유가 활용됨을 보여줄 것이다.

II. 추론의 종류

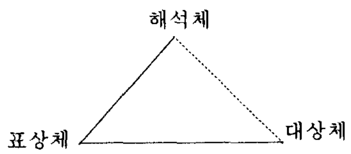
Peirce는 추론을 세 가지 유형으로 구별하였는데, 첫째는 연역법, 설명적 추론이며, 둘째는 귀납법, 평가적 추론이고, 셋째는 가추법, 창의적 추론이다. 본 연구의 중심이 되는 가추법은 Peirce의 독창적인 추론 방식이며, 그의 기호학적 배경에서 등장하였다. 가추법이 등장하게 된 Peirce의 기호학적 배경을 먼저 살펴본 후, 가추법을 중심으로 여러 추론에 대해 알아보도록 한다.

1) Peirce의 기호학

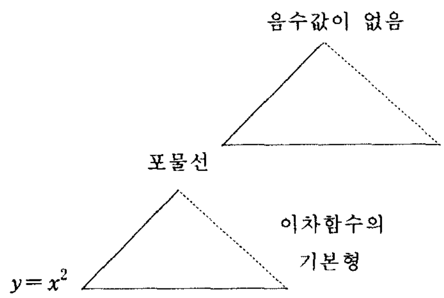
Peirce는 Saussure와 더불어 현대 기호학의 거목이며, 다방면에서 두드러진 그의 연구는 기호학의 범주 안에 속한다. 기호와 기호 현상에 대한 논의는 아리스토텔레스 이전의 고대 그리스 철학에서부터 지금까지 진행되어 왔으며, 프래그머티즘, 현상학, 실존주의, 구조주의, 정신분석학, 포스트모더니즘에 이르기까지 철학과 과학이 있는 곳에 항상 함께 있어왔다. 각각의 분야가 나름대로 대상을 어떻게 지각하여 기호화하고 해석하는가를, 다시 지각하고 기호화하여 해석하는 학문이라고 할 때 기호학의 범주에 속한다 할 수 있다. Peirce는 수학 · 윤리학 · 형이상학 · 중력 · 열역학 · 광학 · 화학 · 비교해부학 · 천문학 · 심리학 · 음성학 · 경제학 · 과학의 역사, 침묵, 남자와 여자, 포도주, 도량역학 그 어떤 것에 대한 연구도 기호학을 통해서 접근할 수 있다고 하면서 기호학이 모든 학문에 대한 학문임을 주장했고, "우주가 기호로 가득 차 있다"는 격언을 남겼다(이두원, 1997).

전통적으로 기호는 자신에 의해 생성되거나 한정되어지는 다른 무엇인가를 대신하는 것으로 인식되어 왔으나 Peirce는 기호를 표상체(representamen), 대상체(object), 해석체(interpretant)로 구성된 것으로 본다. 시각과 같이 감각을 통해 얻을 수 있는 표현으로 기호를 나타낸 것이 표상체이고, 기호가 대신하고 있는 것이 바로 대상체이며, 기호에 의해 떠오르는 생각이 바로 기호의 해석체이다. 이러한 기호구조는 <그림 1>과 같은 도식으로 표현될 수 있다. 표상체는 다른 '대상'을 대표할 수 있는 모든 것이 다 될 수 있으며, 상징될 수 있는 모든 것은 대상이 될 수 있다. 그리고 느낌, 생각, 행위 등이 모두 해석체가 될 수 있으며, 이것은

일종의 개념이다. 한 기호에 의해 떠오르는 생각 즉 해석체 역시 또 하나의 표상체로, 다시 그 표상체에 의해 다른 해석체가 떠오르는 기호의 무한대적 생성과정이 발생하며 이것은 곧 사고의 연속 과정을 나타낸다. 이러한 표상체, 대상체, 해석체 사이의 상호작용과 발전과정을 세미오시스(semiosis)라 부르고, 수학 개념의 형성 또는 문제 해결 과정도 이러한 세미오시스를 겪으면서 발전하게 된다. 세미오시스는 수학의 표현과 해석에서도 등장하는데 예를 들어, <그림 2>와 같이 이차함수의 기본형인 대상체를 표상체로 표현하면 $y=x^2$이 된다. 사람마다 다르긴 하지만, $y=x^2$을 포물선의 식으로 해석할 수도 있고, 다시 포물선이라는 해석체는 음수값을 갖지 않는다는 해석체의 표상체가 될 수도 있다.



<그림 1> 기호의 구성 요소(Trabant, 1996)



. <그림 2> 수학 개념의 세미오시스 분석의 예

기호의 본질에 대해서는 두 가지 원근법이 병존한다. 하나는 기호가 부재 하는 무엇인가를 대신하거나 연상시킨다는 전통적인 기호에 대한 생각인 표상적·대체적 관점이며, 다른 하나는 지각 가능한 대상과 사태로부터 지각되지 않는 대상이나 사건의 추론을 가능케 하는 추론적 본질을 강조하는 관점이다. 이것들은 각각 지시작용과 추론작용이란 표현으로 응축될 수 있다(김성도, 1997). Peirce의 기호 이론은 두 가지 관점을 모두 통합하고 있다. 기호를 다른 무엇을 지시하는 것으로 정의했을 때는 전자의 관점으로 표상체와 대상체의 관계를 언급하지만, 기호가 세상에 대한 지식의 성장을 제공하는 근원으로 파악한 경우는 해석체가 개입된 두 번째 관점을 따르는 것이며, 이러한 Peirce의 기호적 본질은 그가 제시한 추론 형식인 가추법에서 잘 나타난다.

2) 추론의 종류

Peirce는 모든 논증(arguments)을 하나의 상징적 법칙기호라 불렀다(Sebeok, 1980). 각각의 논증은 사례, 결과, 규칙이라는 세 개의 명제로 이루어진다. 이들은 세 가지 방식으로 결합될 수 있으며 <표 1>과 같은 형태의 논증형태를 만들어낸다. 연역법은 규칙과 사례를 통해 결

<표 1> 추론의 세 종류의 예 (김성도, 1997)

연역법: 규칙 + 사례 ⇒결과
규칙: 이 가방 속에 들어있는 모든 완두콩은 하얗다 사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다 결과: 이 완두콩들은 하얗다
귀납법: 사례 +결과 ⇒ 규칙
사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다 결과: 이 완두콩들은 하얗다 규칙: 이 가방 속에 들어 있는 모든 완두콩들은 하얗다
가추법: 결과 + 규칙 ⇒ 사례
결과: 이 완두콩들은 하얗다 규칙: 이 가방 속에 들어 있는 모든 완두콩들은 하얗다 사례: 이 완두콩들은 이 가방에서 나왔다

과를 도출하는 추론이고, 귀납법은 주어진 사례와 결과를 통하여 규칙을 도출하는 것이다. 연역과 귀납이 모두 사례를 통해 결론을 이끌어내는데 반해 가추법은 결과와 규칙으로부터 사례에 대한 짐작을 하게 한다. 가추법을 통해 일반적인 예측을 할 수는 있지만, 성공할 것이라는 보장은 없다. 가추법은 절대적으로 확실한 것을 도출할 수 없으며, 귀납법과 마찬가지로 개연적 추론에 속하게 된다.

연역법은 형식적인 체계 속에서 정의, 공리, 정리들을 이용하여 규칙을 따라 결론을 이끌어내는 엄밀한 증명으로 사실을 언급하는데 사용된다. 아리스토텔레스의 삼단 논법이 가장 잘 알려진 연역적 추론이며, 수학의 정리는 거의 모두 연역법에 의해 증명되고 있다. 그러나 연역법은 규칙에 의해 이미 알려진 정보 이외의 어떤 새로운 사실을 생성할 수 없으므로, 새로운 사실의 발견이나 추측을 하는 과정에 적용될 수 없다.

수학자의 창조적인 연구 결과는 연역적 추론에 의해 확보되지만, 그 증명은 개연적 추론에 의해 발견된다. 개연적 추론 중 가장 대표적인 귀납법은 "관찰된 개개의 사례를 총괄하여 그들 사례의 규정이 필연적으로 거기에서 도출될 수 있는 그 일반적 주장인 판단을 확립하는 추론 즉, 특수한 사실로부터 일반 진리를 이끌어내는 추론"이다(강영선 외, 1989; 박교식, 1991, 재인용). 수학의 개연적 추론을 연구한 Polya (1954)는 "경험을 다루는 과학자의 처리 절차"를 귀납이라 부르는가 하면, "발견적인 추론의 본성과 관계되며, 더 나아가 중요하지만 논증적인 것이 못되는 일종의 추론과 관련된" (Polya, 1957) 개연적 추론을 '발견적인 추론' 또는 '귀납적인 추론'이라고 불러 귀납을 넓은 의미로 사용하였다. 그러나 논증적인 연역이 아닌 것을 모두 귀납이라고 부르는 것은 귀납의 정의에 위배되는 추론을 포함하기도 한다. Peirce에 의하면, 과학적 주장에 있어서 서로 다른 여러 가지 논증 형태들을 구분해내지 못하는 것이 바로 과학의 논리에 혼란스럽거나 잘못된 개념들을 낳게 한 주된 요인이며, 이런 혼란 중에서 가장 흔하고도 나쁜 것 중 하나는 가추법과 귀납법을 (때로는 연역법과 혼동하기도 해서) 하나로 뭉뚱그려 취급하는 일이라고 했다(8.228[2)], Sebeok & Umiker-Sebeok, 1980, 재인용).

본 연구에서는 귀납법을 Peirce가 내린 고전적인 정의로만 받아들이고, 귀납이 아닌 개연적 추론의 유형을 가추법에서 찾고자 한다. 정의에 따르면, 귀납법은 여러 사례의 관찰과 그 결과를 통해 규칙을 만드는 추론이다. 연역과 마찬가지로 새로운 정보나 사실을 생성하기보다 지금까지 관찰된 사례와 결과에만 해당하는 '진술'을 할뿐이다. 따라서 귀납에 의해 얻어진 규칙은 새로운 상황에 대한 예측을 할 수 없고, 새로운 정보를 생성할 수 없고(이두원, 1997), 독창성이 결여되어 있다고 할 수 있다.

이에 반해, 가추법은 설명력 있는 가설을 형성해 가면서, 새로운 생각을 도입해내는 논리적인 작용이다. 관찰된 사실에 주목하고, 그 다음에 어떤 규칙이 떠오르게 해서 그 관찰된 사실의 기원을 설명할 수 있게 된다. 결과적으로 가정된 규칙에 따라 관찰된 사실을 해독하게 되고 사례를 추론하게 된다(Harrowitz, 1980).

1. 관찰된 사실(결과) ....> 규칙
2. 관찰된 사실(결과) <.............................. 규칙
    ↓   ↓
3. ....> 사례

2) Peirce의 방대한 업적은 그가 남긴 수고(手稿)로 남아 있으며, C. Hartshorne, P. Weiss, A. W. Burks가 1933년에서 1966년까지 편집한 8권의 Collected Papers of Charles Sanders Peirce안에 들어 있다. Peirce의 인용은 일반적으로 권수와 단락으로 단축한다.

가추법은 가설의 결과가 실험적으로 증명된다는 전제 아래 가설을 잠정적으로 받아들이는 추론 방식이며, 지각-기호화-해석에 이르는 기호현상과 가장 밀접한 관계를 지닌다(김치수 외, 1998). 가추법을 통해 인간은 기호로 만들어진 세상에 대해 '본능적으로 또는 직감적으로' 추측을 하고, 이해하고, 지식과 정보를 확장한다(이두원, 1997). 기호를 이해한다는 것은 단순히 특정한 표상체의 등장을 근거로 자동적으로 진행하는 의미의 인식이 아니다. 어떤 낱말의 의미를 이해한다는 것은 언제나 의미를 실질적 맥락과 연관지어야 한다. 예를 들어, x를 보고 이것이 단항식인지, 변수인지 등을 결정하기 위해 이 문자가 사용되는 맥락을 이해해야 하고, 여기에는 연역도 귀납도 아닌 가추법이 사용된다.

대개 수학적 추론은 가설을 제기하여 그로부터 일체의 필연적 파급 결과들을 연역하는 연역적 추론이라고 여겨져 왔다. 그러나 수학을 창조와 발명, 발견의 학문으로서 학습하기 위해서는 확실하지 않은 사실에 대한 추론이 필요하며, 지금까지는 여기에 사회학이나 심리학과 같은 경험 과학에서 주로 다루어져온 귀납법이 사용되어 왔다. 그러나 가추법 이야말로 일상 생활에서 거의 매순간 실천하는 추론형식으로서, 과학적 사유의 출발점이다(김주환, 한은경, 1994). 사람들은 땅이 젖은 것을 보고 비가 왔다고 생각을 하지(가추법), 비가 왔다는 사례를 통해 땅이 젖었다고 연역하지도, 비가 올 때마다 땅이 젖는다는 사실을 일일이 확인해서 규칙을 귀납적으로 도출하지도 않는다. 수학 학습에서도 연역적 증명이 이루어지기 전 학생들이 제시하는 논증들은 가추법의 예가 많다. 예를 들어, 두 대각선이 수직인 사각형을 보고 혹시 마름모가 되지는 않을까 추측하거나, y축과 평행인 직선을 일차함수라고 하는 등은 연역도 귀납도 아닌 가추법이다. 물론 그 진위는 연역법을 통해 증명되어야 하지만, 새로운 사실을 발견하거나 무언가를 대신해서 사용할 수 있는 것은 가추법의 추론을 통해서이다.

Bonfantini & Proni(1980)은 다음과 같이 가추법의 특징을 정리하고 있다. 첫째, 가추법은 하나의 추론 방식이다. 두 개의 전제에서 결론을 도출해 내는 가추법은 연역법이나 귀납법과 마찬가지로 형식적이고 기계적이라 할 수 있다. 둘째, 가추법은 자동적인 과정이긴 하지만, 형식적으로 전제의 의미론적 내용을 명백하게 할 뿐 아니라 그 의미론적 내용을 재구성하고 있다. 그래서 가추법은 합성적이고 혁신적이며, 결론의 진위가 전제의 타당성으로 결정되는 문제가 아니기 때문에 어느 정도의 위험 부담도 안고 있다. 셋째, 가추법을 야기하는 해석학적 과정은 자료를 시작점으로 삼고, 그 자료를 설명하고 정당화하기 위해 그것을 일반 원칙의 결과라고 간주해야 한다.

가추되는 의미는 절대적으로 확실한 것이 아니며, 단지 무엇인가가 아마도 어떠할 수도 있다는 것을 제시할 뿐이다. 수학 기호나 개념을 제대로 파악하기 위해서 그 토대가 되는 규칙을 잘 알고 있을 필요는 있지만, 규칙이 아주 명백하게 의미를 지시하는 것이 아닐 수 있다. 그래서 수학 문제 해결 과정에서도 어떤 전략을 사용할지 고민하고, 전략들을 조정하는 추론을 할 수밖에 없다. 가추된 의미는 언제나 불확실한 지위를 가지며, 기호가 의미를 얻게 해 주는 체계를 매우 위험하고 시험적으로 찾아내는 시도는 가추법이다(Eco, 1985: Trabant, 1996, 재인용). 따라서 가추법을 추론 방식으로서 인정해야 하는지는 논란이 될 수 있다. 다음 절에서 이에 대한 Peirce의 생각을 알아보기로 한다.

(3) 가추법의 검증

가추법은 결국 짐작해보기일 따름이지만, Peirce는 짐작하기가 이성에 토대를 두고 있다는 점에서 엄밀한 의미에서의 추론임을 분명히 밝히고 있다(김성도, 1997). 개연적 추론에 있어 추론의 힘과 타당성을 구분하면서, Peirce는 지극히 취약한 추론도 얼마든지 타당한 것으로 밝혀질 수 있다고 말한다. 가추적 추론은 취약하다고 할 수 있지만, 그 타당성은 규칙 또는 방법론에 견주어 정의되는 것이므로 주어진 추론과 방법론의 일반적 원칙과의 일치에 의해 규정된다. Peirce(2.782; 김성도, 1997, 재인용)는 "가추법은 그 파급 결과가 실험에 의해 테스트될 수 있고 관찰된 사실들이 그 가설로부터 필연적 결론으로서 도출될 수 있으며, 그 가설이 궁극적으로 진리의 발견에 이를 수밖에 없는 방법론에 따라 선별된다"고 하면서 연역이나 귀납과 마찬가지로 가추법도 그 방법론적 원칙에 일치됨에 따라 타당한 추론으로 받아들여져야 한다고 했다.

가추법은 또한 지각적 지식의 영역을 포함한다. 가추법과 지각은 서로 중첩되어 있으며, 둘을 분할하는 것을 Peirce는 부질없는 일이라고 했다. 귀납과 가추법이 개연적 추론 내에서 연속성을 가지듯이, 과학적 추론의 근본적 명제와 지각적 판단 사이에도 연속성이 존재한다. 지각적 판단은 가추법적 판단의 "극단적인 경우"이다(김성도, 1997). 따라서 가추법을 인간의 본능적인 관찰에 따른 심리적인 추론으로 여긴다면, 그 추론이 취약하다 해도 연역과 귀납과 더불어 하나의 추론 방식으로서 받아들일 수 있을 것이다.

III. 수학적 추론으로서의 가추법

Polya(1954)는 수학에서 사용되는 두 종류의 추론을 논증적 추론과 개연적 추론으로 나누고, 수학적 지식은 논증적 추론에 의해 확립된다고 보았다. 그리고 개연적 추론을 귀납적 추론으로 부르고 여기에 일반화, 특수화, 유추가 포함된다고 하였다. 일반화는 하나의 대상에 대한 고찰에서 그 대상을 포함하는 집합의 고찰로 이행하는 것으로, 고찰의 대상을 구체적인 대상에서 그 대상을 품는 집합으로 넓히는 것이며 반대로, 특수화는 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮아가는 것이다. 유추는 부분적인 유사성을 바탕으로, 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 어떤 관계 체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계 체계를 추측하게 하며, 부분적인 닮음을 근거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추론이다(우정호, 1998).

<표 1>에서 사례와 결과를 통해 규칙을 유도하는 Peirce의 귀납 논리에 비추어보면, 일반화는 한 대상의 고찰로부터 얻은 결과가 그 대상을 포함하는 집합에도 성립된다는 규칙을 얻어내고, 특수화도 대상의 고찰로부터 얻은 결과가 그 하위 집합이나 대상에도 성립한다는 규칙을 찾아낸다는 점에서 귀납법에 속한다 할 수 있다. <표 2>에서는 피타고라스 정리의 일반화와 그 일반화로부터 피타고라스 정리를 특수화하는 과정을 예를 들어 살펴보았다.

유추는, 인지구조 이론의 관점에서 볼 때, 비례적 추론으로서 A: B = C: ?라는 일반적인 형태로 나타낼 수 있다. 비례식에서 두 번째 항이 첫 번째 항과 관련된 것과 같이, 네 번째 항은 세 번째 항과 관련되는 것이라고 짐작할 수 있다. C라는 결과를 얻었을 때, A: B라는 규칙에 빗대어 ?라는 사례를 추출하는 것이 유

<표 2> 귀납법의 관점에서 본 일반화와 특수화의 해석

귀납법: 사례 +결과 ⇒ 규칙	
일반화	사례: 직각삼각형의 세 변 a, b, c, d 위에 닮음인 도형이 있다 결과: $a^2+b^2=c^2$ 규칙: $\lambda a^2+\lambda b^2=\lambda c^2$
특수화	사례: 직각삼각형의 세 변 a, b, c위에 닮음인 도형이 있다 결과: $\lambda a^2+\lambda b^2=\lambda c^2$ 규칙: $a^2+b^2=c^2$

<표 3> 가추적 관점에서 본 유추의 해석

가추법: 결과 + 규칙 ⇒ 사례	
유추	결과: a, b, c, d가 실수일 때, $a+bi=c+di$ 규칙: a, b, c, d가 유리수이면, $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow a=c,\ b=d$ 사례: $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

추이며, 이는 귀납법보다는 가추법에 속하는 것으로 생각할 수 있다. <표 3>에서와 같이, 복소수체에서의 동치관계를 유리수체 $Q(\sqrt{2})$에서의 동치 관계에서 유추하여 추론하는 것은 가추법을 따른다.

Polya가 유추를 귀납에 포함시킨 것은 귀납법을 논증적 추론의 상대되는 넓은 의미로 사용하였고, A와 C의 구조적 관계를 파악하는 것은 경험에 의한 통찰이라고 생각했기 때문일 것이다. Harrowitz(1980)는 관찰된 사실을 설명하기 위하여 "이미 알려진 법칙이나 자연법칙 또는 다른 일반적인 진리를 제안해서 그 사실을 가추법적으로 설명할 뿐 아니라 그 연관성 또한 희망적으로 밝혀내야 한다"고 하여, 유추가 가추법의 일부가 될 수 있음을 시사하였다. 이러한 관점에서 볼 때, 수학 개념학습이나 문제 해결에서의 유추는 개연적 추론으로서, 귀납법보다는 가추법에 속하는 것이다.

片桐重男(1988)은 유추와 유추적인 생각을 구별하였는데, 유추는 추론 논리에 해당하나 유추적 생각은 A: B= C: ?라는 비례식에서 어떤 C에 대해 그 성질 또는 법칙을 알고 싶으나 그것을 모를 때, C와 닮은 기지의 것 A를 생각해 내어, A에 대한 성질 또는 법칙인 B와 동일한 성질 또는 규칙 ?가 C에 대해서도 존재하지 않을까 하는 생각을 해 나가려는 것이다. 유추는 <표 3>과 같은 가추법적 논리를 따를 뿐 아니라 A와 C의 구조를 먼저 파악하고 그것을 추론에 ⇔적극적으로 사용하려는 유추적인 생각이 의식적으로 존재해야 한다. 복소수체 C에서 $a+bi=c+di$와 동치인 사례를 찾고자 할 때도, 허수 i는 실수 범위 안에 존재하지 않는 $x^2=-1$의 근이고 $\sqrt{2}$는 $x^2=2$의 근으로 유리수 범위 안에 존재하지 않는 무리수라는 것을 생각해 내어, 유리수체 $Q(\sqrt{2})$에서

$$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow a=c,\ b=d$$

이라는 규칙에서

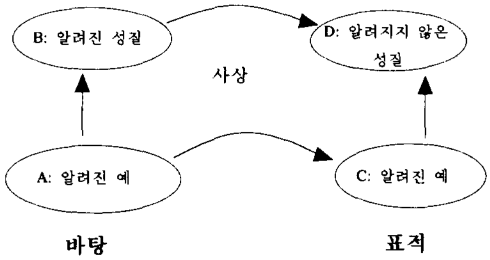
$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$$

를 유추해낼 수 있는 것이다.

구조사상 이론에 따르면, 유추적 추론은 일반적으로 바탕(base; 근원source)이 되는 한 체계로부터 표적(target; 화제tenor)이 되는 다른 체계로의 구조적인 정보의 전이로 정의되기도 한다(Gentner, 1989). 지식의 이러한 전이는 두 체계 사이의 관계적인 대응을 발견하는 것을 포함하는 <그림 3>과 같은 사상 과정을 통해 이루어진다. 수학적인 유추를 의미 있게 추론하기 위해서 학습자는 바탕과 표적의 구조를 이해하고 그 둘 사이에 대응하는 관계 즉, 사상을 분명히 인식할 수 있어야 한다.

최근 수학 개념이나 기호 학습에서 진행되고 있는 연구는 은유와 환유의 추론에 대해 언급하고 있는데, 여기서는 가추법으로서 은유와 환유에 대해 자세히 알아보기로 한다.

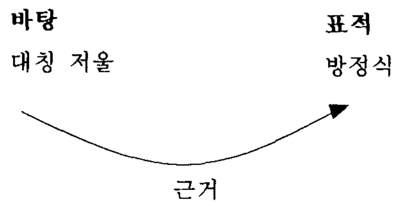
1) 은유



<그림 3> 유추의 사상

Oxford 사전은 은유를 "문자 그대로 적용될 수 없는 대상에 대한 이름이나 서술적 용어의 적용"으로 정의한다. 은유는 문학 뿐 아니라 모든 사고체계의 기본이 되는데, 작가 Shoham Smith는 문장에서 e라는 알파벳을 사용하지 않을 수 없는 만큼 은유를 사용하지 않을 수 없다고 했으며(Sfard, 1997), Lakoff와 Johnson(1980)은 인간의 사고체계는 기본적으로 은유적이며 수학도 은유를 통해 이해되고 표현된다고 주장한다. Pimm(1987)도 은유는 일상 언어에서 의미의 표현만큼이나 수학적 의미의 표현에 중심적인 것이라고 했다. 새로운 수학적 아이디어를 표현하고 전달하는 것은 일상 생활 언어나 기존의 수학 언어에 의존할 수밖에 없으며, 이러한 과정은 은유적이다. 예를 들어, 정수를 수직선 위의 점이라 생각하고, 방정식을 대칭저울로 생각하는 것은 은유적인 추론이다.

은유는 A의 도움으로 C를 제시하는 것으로, <그림 4>와 같이 두 영역을 연결하는 것으로 제안할 수 있다. 바탕은 몇몇 방법으로 표적에 대한 신념에 기여하며, 여기서 근거(ground)는 유추의 사상에 해당한다. 유추는 이미 알려된 두 가지 개념 사이의 유사성을 우리가 지각하여 관계를 사상 짓지만, 은유는 표적의 구조에 대해 알지 못하는 상태에서 두 구조를 연결한다. 두 개의 개념 구조가 서로 대응된다는 것을 알기 위해서는 <그림 3>처럼 두 가지 구조를 모두 이해하고 있어야 하며, 그러한 구조적 파악을 통해 유추적 사고가 발생한다. Vosnidou와 Ortony(1989)는 유추가 바탕 영역과 표적 영역간의 유사성을 인식하고 개발해 내는 것이라 하면서, 두 영역 사이에 관련된 항목들이 개념적으로 매우 멀거나 혹은 다른 영역에서 도출될 때를 영역간의(between-domain) 유추라 했다. 이것은 다른 말로 은유적 유추라고 할 수도 있으며 따라서 은유는 유추에 속한다. Sfard(1997)도 은유가 두 개념 구조 사이의 비교를 통해 표적 영역에 대한 새로운 정보를 바탕 영역의 도움으로 얻어낸다는 점에서 유추에 속한다고 했다. "A는 B와 같다"는 형태로 표현되는 직유 <그림 4> 은유의 구조를 설명하는 예는 외적 유추, 'A는 B이다'라는 형태의 은유는 내적 은유에 해당하는 것으로 직유와 은유는 유추에



<그림 4> 은유의 구조를 설명하는 예

포함된다. 은유는 유추의 특별한 경우이며, 유사한 것으로 분류된 대상들 사이의 거리에 의해서 직유와 차별된다.

유추는 문제 제기나 문제 해결의 발견술로서 사용될 수 있다. 새로운 개념이나 기호를 도입할 때는 이미 존재하는 개념에서 새로운 표적 개념으로 은유적 투사가 암묵적으로 이루어진다. 수학의 역사적 발전이나 기호화 과정에서 이러한 은유적 투사의 예가 많이 설명될 수 있다(Sfard, 1997).

예를 들어, 기존의 수직선 개념을 통해 음의 정수를 도입한다고 하자. 수직선에서 0을 중심으로 기본 단위만큼씩 오른쪽으로 이동하여 점

을 찍어 지금까지 자연수 즉 양의 정수를 표기해 왔다. 자연수는 바로 0으로부터의 거리, 절대값에 대응한다고 볼 수 있다. 그렇다면 0을 중심으로 왼쪽으로 기본 단위만큼씩 이동할 때는 어떻게 할까? 0에서부터의 거리를 나타내는 수를 가지면서, 양의 정수와 다른 기호를 만들기 위해 $-1, -2, -3, \cdots$이라고 쓰고 이를 음의 정수라 한다. 이때, 학습자는 음의 정수에 대한 개념이 전혀 없이도 수직선 개념에 비추어 음수라는 것이 존재한다는 것을 받아들인다. 유추적 사고를 통해 이제 음의 정수를 포함한 정수는 수직선으로 표현된다. 물론, 여기서 음수 개념이 모두 파악된 것은 아니지만, 새로운 개념이나 기호를 도입할 때 이처럼 기존 개념의 도움을 받는 은유적 투사가 일어난다. 이렇듯 은유는 새로운 개념이나 기호를 구성하는 힘을 갖고 있으며 개념화 과정 즉 새로운 개념 구조의 창조 과정과 관련되어 있고, 유추는 추론의 맥락 즉 존재하는 개념을 조사하여 적용하는 사고 과정으로 생각하는 것이 유용하다(Sfard, 1997).

이러한 은유의 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, 은유의 편재(遍在)성이다(Sfard, 1997). 일상 생활에서 그리고 수학 학습에서 은유는 너무 깊이 숨겨져 있어 그 존재를 깨닫지 못하는 경우가 많지만, 집합을 벤다이어그램으로 바꾸어 표현하고, 방정식의 풀이에서 이항으로 수를 물건처럼 움직이게 하고, 괄호를 그릇처럼 생각해서 공통 인수를 괄호 밖으로 꺼낸다는 표현 등 너무나 많이 존재한다. Bruner(1986)는 은유를 "추상의 산에 오르도록 돕는 버팀목"이라 말한 후 산의 정상에 오르자마자 그것을 제거하려 한다고 했다(Sfard, 1997, 재인용).

둘째, 은유는 체계적인 개념을 사상한다(Sfard, 1997). 이때의 은유는 문제해결 전략 후에 요구되는 재개념화의 수단이 될 수 있고, 문화적으로 구현되기도 한다. 예를 들어, Presmeg(1992)의 연구에서 한 학생은 예각, 둔각의 삼각함수 값을 구할 때, 90˚ 보다는 180˚를 이용하는 것을 선호하면서, x축에서 시작하여 각을 움직여 사인값을 구하였다. 그리고 x축을 '수면'이라고 하는 은유적인 표현을 하면서 삼각함수 값을 구하는 방법을 재개념화하였다.

셋째, 은유는 지각적 기원을 갖고 있다(Sfard, 1997). 은유적 추론을 할 때 인간은 지각적으로 경험될 수 없는 수학 개념을 '마치 ~인 것으로' 생각한다. 1/2 + 1/3을 계산할 때도, 피자의 1/2조각과 1/3조각이 합쳐질 때 어느 정도의 양이 되는지 눈으로 보려고 한다. Johnson(1987)은 이미지-스키마가 공간 추론을 특징지으며 시각-운동 경험에 언어를 연결시키는 역할을 하고 개념 체계는 궁극적으로 이미지-스키마로 분해될 수 있다고 하면서, 추론 구조가 은유적 사상 아래서 보존될 수 있다고 하였다.

넷째, 은유는 개성적이다(Presmeg, 1997). Presmeg(1992)의 연구에 참여한 학생처럼 모든 학생이 사인값을 구할 때 '수면'을 생각하지는 않는다. 따라서 은유적 추론은 주관적인 추론이라 할 수 있다.

다섯째, 은유와 개념은 다대다 대응이다. 하나의 개념에 대해서 사람마다 다른 은유를 생각할 수 있고, 다른 개념에 대해 같은 은유를 생각할 수 있다. 예를 들어, 유리수 개념은 '분할로서의 분수, 조각으로서의 분수'와 같은 구체적인 은유와 '수로서의 분수'라는 순수한 수학적 은유의 상호작용에서 나올 수 있다. 그리고 복소수나 벡터 개념을 생각할 때 좌표평면이 은유적으로 사용될 수 있다. 이런 점에서 Sfard(1997)는 은유적 개념화를 은유와 개념의 변증법적 과정이라고 하였다.

이러한 특징을 가진 은유는 수학적 아이디어를 형성하는데 있어 두 가지 기본적인 형태로 구분할 수 있다(Lakoff & Nunes, 1997). 첫째는 기초은유로 수학적 아이디어의 기초를 일상적인 경험에 두는 것이며, 친근하게 알고 이해하고 있는 일상적인 영역으로부터 얻은 이미지 양식과 일상적인 체계에 대한 추론을 수학에 사영한다. 덧셈을 물건을 모아 놓은 것으로 말하는 등에서 사용될 수 있다. 둘째, 연결 은유는 한 분야의 수학을 다른 분야와 관련짓게 한다. 예를 들어, 수를 직선 위의 점으로 은유적으로 이해할 때 대수와 기하를 연결하여 기하 지식을 대수로 사용하게 된다. 이승우(2001)는 이밖에 교수 영역에 속하는 은유로서 자연스러운 기초 은유를 혼합하고 새롭게 확장하는 인공적인 은유인 교육적 은유와, 특정한 수학적 사실을 강조하기 위해 수학적으로는 받아들일 수 없는 추론을 포함하는 특이 은유를 설명하기도 했다.

은유는 개념 학습 과정에서 어려움을 일으키기도 한다. 이 어려움을 Sfard(1997)는 세 가지로 언급하고 있다. 첫째는 여러 은유를 통합하는 어려움이다. 개념과 은유의 다대다 대응이 이루어지고, 하나의 개념이 성립하기 위해 여러 은유가 상호작용하지만, 하나의 개념이 세워지기 위해 필요한 여러 은유 중 하나가 부족하다거나 다른 은유로 대체되지 않고 남아 사라지기 거부하는 은유가 있다. 예를 들어, 피자 조각으로 분수를 은유적으로 표현한 것은 분수끼리의 나눗셈에서 사라지지 않을 때 분수 계산을 힘들게 한다.

두 번째, 지나친 은유적 투사를 들 수 있다. 예를 들어, x가 1에 가까이 갈 때 함수값 $f(x)$는 -3에 가까이 간다. 이것을

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -3$$

이라는 기호로 나타낸다. 여기에서 은유적으로 투사된 무한대 ∞는

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

에 사용되고 마치 수인 것처럼 여겨질 수 있으나, 지나친 은유적 투사로 인해

$$\frac{\infty}{\infty} = 1$$

이라는 오류를 범할 수도 있다. 또, 양립될 수 없는 은유를 통합하려는 시도를 할 때 지나친 은유적 투사가 일어난다. 복소수의 구성 과정에서 지금까지 수의 개념에 기본이 되었던 양으로서의 수 은유는 포기되어야 하는 것이었다.

셋째, 은유적 감금으로 인해 상상이 제약될 수 있다. 어떤 직선 밖의 점을 지나는 하나 이상의 평행선이 있을 수 있다는 것은 유클리드 기하의 지각적 은유와 조화될 수 없는 것으로, 이러한 은유적 제약은 추상적인 수학의 발달을 저해할 수도 있었던 것이다.

(2) 환유

Lakoff(1987)에 따르면, 환유는 "어떤 카테고리나 구성원 또는 하위 모델이 카테고리를 전체로 이해하는데 (종종 제한되고 즉각적인 목적으로) 사용되는 상황"이다(Presmeg, 1992, 재인용). Johnson(1987)은 부분이 전체를 대표한다는 '제유(synecdoche)'와 두드러지거나 관련된 특성이 전체를 대표하는 '적정 환유(metonym proper)'라는 것으로 환유를 분류하였는데, 기호의 의미작용은 제유를 넘어 적정 환유로 진행한다고 했다.

환유가 가추법의 추론 논리에 해당된다는 것은 <표 4>로 제안할 수 있다. "이등변삼각형의 밑각은 같다"를 증명할 때, 이 정리는 모든 이등변삼각형에 적용되어야 하지만 대개 우리는 하나의 이등변삼각형만 그려서 이를 증명한다.

<표 4> 가추법적 관점에서 본 환유의 해석

가추법: 결과 + 규칙 = 사례	
환유	결과: 어떤 대상에서 많은 성질이 관찰된다 규칙: 그 많은 성질들은 어떤 부류의 대상들에 속한 것이다 사례: 그 대상은 그 부류의 모든 성질을 포함한다

이때 이 이등변삼각형은 모든 이등변삼각형의 성질을 포함한 것으로 생각하고 그 대표로서 환유적으로 사용되고 있는 것이다.

환유는 귀납적 일반화와는 구분되어야 한다. 환유에서는 특정한 한 부류에 속해 있는 수많은 성질이 어느 특정한 대상에서 발견되면 그 부류의 다른 특질들 모두가 그 대상에 속해 있다고 추론되므로 귀납적 일반화와 마찬가지 논리인 것 같으나, 무엇보다 그 대상들이 하나하나 나열할 수 있는 것이 아니고, 가정을 만들어 나갈 때 하나 또는 기껏해야 두세 개의 특질을 조사해 볼뿐이지 그 이외의 표본을 찾지 않기 때문에, 모든 대상에 적용되는지 가능성을 탐색하는 귀납과는 다른 의미를 갖는다 (Peirce, 2.632; Sebeok & Umiker-Sebeok, 1980, 재인용). 그리고 귀납적 일반화는 연역적인 증명을 통해 확증될 수 있으나 환유는 증명되지도 증명될 필요도 없다.

수학의 용어와 기호의 도입에서 환유는 은유와 마찬가지로 은연중에 많이 사용되고 있다. '임의의 삼각형을 △ABC라고 하자', 또는 하나의 삼각형을 그려서 그것을 모든 삼각형을 대표하는 것으로 사용할 때 우린 환유를 사용하고 있다. 그러나 환유적 추론 또한 가추법에 속하는 것으로 그 논리적 정당성이 항상 보장되지는 않는다. 시각적 이미지에 근거한 환유적 추론의 어려움에 대해 Presmeg(1992)은 다음을 말하고 있다. 환유적으로 사용된 도형이 원형(prototype)에 맞지 않을 때 그것을 학생들이 인식하지 못하는 경우, 예를 들면 정사각형의 원형적 이미지를 떠올려 밑변이 수평으로 놓이지 않은 정사각형을 정사각형으로 인식하지 못하는 때가 있다. 또, 일반적인 경우 필요하지 않은 도형에 존재하는 외적인 성질을 생각함으로써 다이어그램의 필수적인 특징과 임의적인 특징이 분리되지 않아 어려움이 생긴다 (Presmeg, 1992, 재인용; Vlardimirskii, 1971). 예를 들어, 학생들이 아래로 볼록한 포물선의 원형으로 대칭축이 y축이면서 아래로 볼록한 이미지를 갖고 있다면, 대칭축이 y축이 아닌 포물선을 아래로 볼록한 포물선의 환유적 표현으로 받아들이기 힘들다.

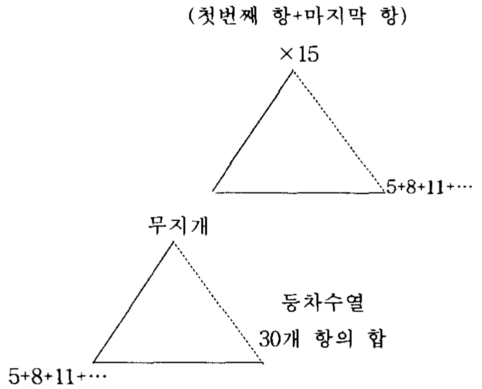
Ⅳ. 수학 문제 해결에서 은유와 환유

과거에는, 기호는 참조물과 분리된 것으로 지시 기능만을 한다는 견해가 일반적이었다. 이후 기호의 의미가 동료와의 사회적 상호작용에서 나오고 생겨난다는 구성주의가 나왔지만 이 또한 의미와 상징을 분리하여 의미가 기호에 선행한다는 관점을 갖는다. 현대 기호학자인 Peirce와 Saussure는 기호와 의미가 통일된 것으로 보면서 기표(signifier)와 기의(signified)를 독립적으로 보지 않는다. 그러나 Saussure는 동전의 양면처럼 기호가 기표와 기의를 갖고 있는 이원론적 입장을 취했고, Peirce는 표상체, 대상체, 해석체의 삼원적인 모델로 기호를 보았다. 본 장에서는 수열의 합을 구하는 문제에서 나타난 기호화 과정을 Peirce의 기호학적 관점에서 분석하여 은유와 환유가 어떻게 활용되는지 설명하려 한다.

수열 5, 8, 11, …에서 30번째 항까지의 합을 구하라는 문제가 주어졌을 때, 한 학생이 이

수열의 구조를 파악한다[3]. 즉, 일정한 수 3이 각 항에 더해져서 다음 항이 생기는 등차수열이라는 것을 깨닫는다. 첫 번째 항이 가장 작고 마지막 30번째 항이 제일 클 것이다. 두 번째 항은 첫 번째 항보다 3만큼 크고, 29번째 항은 30번째 항보다 3만큼 작다. 여기서 이 학생은 수열의 합을 구하는 좋은 방법 즉 가우스 방법을 생각해 낸다. 첫 번째 항과 30번째 항, 두 번째 항과 29번째 항, …의 합은 같으므로 그것들을 먼저 더해서 15를 곱하는 것이다. 이 방법을 이 학생은 무지개라고 말한다. 수학 용어 중 무지개는 교과서나 교사에 의해 사용된 적이 없고, 모든 사람이 이런 방법을 무지개라 부르지 않는다. 이 학생의 기호화를 Peirce의 도식으로 나타내면 <그림 5>와 같다.

여기서 은유와 환유적 추론을 엿볼 수 있다.



<그림 5> Peirce의 기호 해석으로 본 수열의 합을 찾는 과정

먼저 기호가 표현으로서 기능할 때 환유적 추론이 개입된다. <그림 2>에서와 같이 이차함수라는 대상을 표상체(기표) x^2이 대신하는 것 또는 <그림 5>의 아래쪽 삼각형에서 5+8+11+…을 등차수열 30개 항의 합이라고 대신한 것은 환유적 추론이라 할 수 있다. 5+8+11+…이라는 대상에서 등차수열의 성질이 관찰되고(결과), 등차수열의 성질은 일정한수가 더해진 수들에서 보여지며(규칙), 그래서 5+8+11+…은 등차수열 30개 항의 합의 성질을 모두 포함하고 있다(사례)는 가정을 할 수 있다. 이렇게 환유적 추론은 관련된 특성, 여기서는 표상체가 대상체를 나타내어 대표하는 추론으로 기호의 표상체가 대상체를 대신하는 지시작용에서 사용된다. 표상체는 대상체가 가진 특성을 모두 갖고 있다고 여겨지기 때문에, 표상체가 대상체를 대신하여도 된다고 생각할 때 바로 환유적 추론이 사용되는 것이다.

은유적 추론은 기호의 지시 기능에 해석체가 개입되었을 때 나타날 수 있다. 은유는 두 개념 구조 사이의 비교를 통해 표적 영역에 대한 새로운 정보를 바탕 영역의 도움으로 얻어내는데, <그림 5>의 위쪽 삼각 구도에서 무지개는 바탕 영역이고 5+8+11+…은 표적 영역이다. 무지개는 이라는 이미지를 통해(규칙), 5+8+11+…이라는 결과를 가지고 (첫번째 항+마지막 항)×15이라는 사례에 대한 해석을 할 수 있다. 즉, 타인의 입장에서 별 관련이 없어 보이는 '무지개'와 '5+8+11+…'을 무지개의 특징에 근거해서 (첫번째 항+마지막 항)×15로 해석함으로써 5+8+11+…의 값을 구할 수 있고, 여기에 은유적 추론이 개입되어 있다. 이때 은유는 학생의 지각적 이미지에서 도출된 것으로, 이 학생은 수열의 합을 두 개씩 묶을 때 생기는 모양을 무지개라는 것으로 표현한 것이다.

환유는 기호의 대상체와 표현체를 조합했을 때, 은유는 구조나 원리가 유사한 요소를 찾아 해석체에 의해 기호를 해석할 때 사용되었다.

3) 이 예는 Presmeg(1997)의 연구에 참여한 학생의 반응이다. 본 연구에서는 이것을 Peirce의 관점에서 해석하려 한다.

Walkerdine(1982)은 형식적 추론이 가능하게 되는 것은 환유적 조합이 이루어져서 기호화가 이루어지는 때이며, 여기에 의미가 주어지는 것은 새로운 은유의 구성을 포함한 탓이라고 하였다(Presmeg, 1997, 재인용). 즉, 의미에 대한 은유적 추론과 기호 체계에 대한 환유적 추론이 수학적 구조의 이해에 그리고 문제 해결 과정에 필수적인 요소인 것이다.

Ⅴ. 요약 및 결론

본 연구는 수학적 추론으로서 가추법이 사용될 수 있는지 알아보고자 했다. 가추법은 미국의 프래그머티즘의 창시자이자 기호학자, 논리학자인 Peirce가 제안한 추론 방식으로 일상 생활에서 많이 활용되는 추론이다. Peirce는 현상학적 관점에서 존재하는 세 가지 추론에 대해 다음과 같이 말했다(5.171; 김성도, 1997, 재인용).

> 가추법은 하나의 설명적 가설을 형성하는 과정이다. 그것은 하나의 새로운 관념을 도입하는 유일한 논리적 조작이다; 왜냐하면 귀납법은 하나의 가치를 규정할 뿐이며, 연역법은 어떤 것이 반드시 어떠해야 한다는 것을 증명하기 때문이다. 귀납법은 어떤 것이 실재적으로 작용하는 것을 보여준다; 가추법은 어떤 것이 무엇인가가 될 수 있다는 것을 암시한다. 가추법의 규명은 그것의 암시로부터 연역법이 하나의 예측을 도출시킬 수 있다는 점이며, 그 예측은 귀납법을 통해 시험될 수 있다는데 있으며, 아울러 우리가 현상들로부터 무엇인가를 터득하거나 이해한다면 이것은 가추법에 의한 것이라는데 있다.

연역은 주어진 정보 내에서 다른 것을 창조할 수 없고 기존 사실의 진술일 수 있지만, 가추법은 새로운 것을 얻어낼 수 있는 창조적인 특징을 갖고 있다. 수학은 논리적인 엄밀한 기호체계로 이루어져 있어 수학에 필요한 추론이 연역이라고 생각하지만, 수학적 증명 뿐 아니라 수학 개념의 발명과 발견을 경험하는 수학 학습 과정에서 연역적 추론 뿐 아니라 개연적 추론의 중요성이 많이 인정되고 있다. 그러나 모든 개연적 추론을 귀납적 추론이라 일컫는 것은 귀납 논리에 합당하지 않은 점이 있다. 은유와 환유는 개연적 추론에 속하지만 Peirce의 관점에서 보면 이것을 귀납적 추론이라 볼 수 없다. 따라서 본 연구에서는 개연적 추론을 귀납법과 가추법으로 분리하고 Polya(1954)가 언급한 일반화와 특수화는 귀납법에, 유추, 은유, 환유는 가추법에 속하는 추론 유형으로 구분하였다. Polya는 유추를 귀납적 추론 안에 포함시키고 있으나 <표 2>에서 보았듯이 유추 논리는 가추법 안에 속한다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 가추법의 추론으로서 은유와 환유를 주로 다루었다. 은유는 'A는 B이다'라는 형식의 내적 유추로서, 수학의 개념화 과정과 문제 해결에서 부지불식중에 많이 사용되고 있다. 문학에서 비유법으로 생각되어 오던 은유는, 방정식을 대칭 저울의 균형으로 생각하는 것처럼, 수학 학습에서도 중요한 역할을 하고 있다. 환유는 부분으로서 전체를 대신하거나 관련된 특징이 어떤 부류를 대표하는 것으로 사용될 때의 추론으로서 수학 용어나 기호가 어떤 것을 대신한다고 할 때 사용된다.

본 연구는 수학 문제 해결 과정을 기호학적 관점에서 분석하여 은유와 환유가 어떻게 활용되고 있는지 알아보았다. 수열의 합을 구하는 문제에서 환유는 문제에 제시된 대상을 다른 표상체로 바꾸는 기호의 지시 기능에서 등장했으며, 표상체와 대상체를 해석하는 과정에서 사용되는 추론은 은유적이었다. 은유와 환유는

모두 개인적이며, 학습자 개인들 각각에게서 성숙하는 것이다. 그러나 '무지개'나 '수면'이라는 은유는 개인적이지만 방정식을 '대칭저울'이라 하는 것은 공유된 수학 문화로 정착되어 있다. 따라서 개인 뿐 아니라 학습자들이 은유적 추론을 서로 공유하는 것이 가능하며 이것은 환유에서 더 중요하다. 수학기호나 표현은 누가 봐도 동의할 수 있는 규약에 의해 정해져야 하기 때문이다. <그림 5>와 같은 기호화 과정이 이루어지기 위해서는 수학의 기호체계에서 수학적 의미를 의사소통하고 협상하는 것이 필요하며, 은유와 환유 등의 개연적인 수학적 추론을 증진시킬 수 있을 것이다. 앞으로 가추법을 수학의 개연적 추론으로서 인정하고 은유와 환유 뿐 아니라 다른 추론 유형도 발견함으로써 수학 학습 과정에서 적극적으로 가추법이 활용되어야 할 것이다. 이는 가추법이 일상 생활이나 수학 학습에서 학생들에게 가장 자연스럽게 받아들여질 수 있는 추론이라 할 수 있기 때문이다.

참 고 문 헌

김성도(1997). 기호와 추론 - 퍼스의 가추법을 중심으로. 한국기호학회 엮음. 삶과 기호 (pp.351-379). 서울: 문학과 지성사.

김주환, 한은경(1994). 역자서문. 김주환, 한은경(역) (1994). 논리와 추리의 기호학. 서울: 인간사랑.

김치수, 김성도, 박인철, 박일우(1998). 현대 기호학의 발전. 서울대학교출판부.

박교식(1991). 수학 학습-지도 원리의 고찰(V) 귀납적 원리에 대하여. 제 7회 수학교육학 세미나.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

이두원(1997). 찰스 퍼스의 커뮤니케이션 사상에 대한 연구- 기호 세계의 속성과 논리 중심으로. 한국기호학회 엮음. 삶과 기호 (pp.432-454). 서울: 문학과 지성사.

이승우(2001). 학교 수학에서의 유추와 은유. 서울대학교 대학원 교육학석사학위논문.

片棟重男(1988). 수학적인 생각의 구체화- 수학적인 생각·태도와 그 지도Ⅰ. 이용율, 성현경, 정동권, 박영배 (공역) (1992). 서울: 경문사.

Bonfantini, M. A. & Proni, G.(1980). 예측할 것인가, 말 것인가? 김주환·한은경 (역) (1994). 논리와 추리의 기호학. 서울: 인간사랑.(pp. 277-306)

Cifarelli, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. ED 408 167.

Eco, u & Sebeok, T. A.(eds.)(1980). *The sign of three : Dupin, Holmes, Peirce.* 김주환, 한은경 (역)(1994). 논리와 추리의 기호학. 서울 : 인간사랑.

Gentner, D.(1989). The mechanisms of analogical learning. In Vosniadou, S. & Ortony, A.(Eds.), *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge University Press.

Harrowitz, N.(1980) 탐정 모델의 실체-찰스 퍼어스와 에드가 알런 포우. 김주환·한은경 (역)(1994). 논리와 추리의 기호학(pp.383-412). 서울: 인간사랑.

Johnson, M. (1987). *The Body in the mind.* 노양진 역(2000). 마음 속의 몸. 서울: 철학과 현실사.

Lakoff, G. & Nenez, R. E. (1997). The

metaphorical Structure of Mathematics: Sketching out Cognitive Foundations for a mindbased mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*(pp.21-92). Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G. & Johnson, M.(1980). *Metaphors we live by.* 노양진, 나익주 (공역)(1995). 삶으로서의 은유. 서울: 서광사.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* NY: Routledge and Kegan.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* Prinston University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* 우정호 (역)(1986). 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: 천재교육.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*(pp.267-279). Lawrence Erlbaum Associates.

Sebeok, T. A.(1980). 하나, 둘, 셋 하면 풍성함이(서론에 대신하여). 김주환 · 한은경 (역)(1994). 논리와 추리의 기호학(pp.39-60). 서울: 인간사랑.

Sebeok, T. A. & Umiker-Sebeok, J. (1980). 자네는 내 방법을 알고 있네-찰스 퍼어스와 셜록 홈즈를 나란히 비교하기. 김주환 · 한은경(역) (1994). 논리와 추리의 기호학(pp.61-124). 서울: 인간사랑.

Sfard, A. (1997). Commentary: on metaphorical roots of conceptual growth. In L. D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*(pp.339-371). Lawrence Erlbaum Associates.

Trabant, J. (1996). *Elemente der Semiotik.* 안정오 (역) (2001). 기호학의 전통과 경향. 서울: 인간사랑.

Vosnidou, S. & Ortony, A.(1989). *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge University Press.

Abduction As A Mathematical Resoning.

Kim, Sun Hee(Gwangjang Junior High School)
Lee, Chong Hee(Ewha Womans University)

This Study takes Peirce' abduction which is Phenomenology' first reasoning mode, as a part of mathematical reasoning with deduction and induction. Abduction(retroduction, hypothesis, presumption, and originary argument) leads a case through a result and a rule, while deduction leads a result through a rule and a case and induction leads a rule through a case and a result. Polya(1954) involved generalization, specialization, and

analogy within induction, but this paper contain analogy in abduction. And metaphors and metonymies are also contained in abduction, in which metaphors are contained in analogy. Metaphors and metonymies are applied to semiosis i.e. the signification of mathematical signs.

Semiotic analysis for a student's problem solving showed the semiosis with metaphors and metonimies. Thus, abductions should be regarded as a mathematical reasoning, and we must utilize abductions in mathematical learning since abductions are thought as a natural reasoning by students.