

점진적 구조 최적화 기법을 응용한 철근콘크리트 부재의 배근

A Study on the Reinforcement of Reinforced Concrete using Evolutionary Structural Optimization

윤 성 수* · 이 정 재**

Yoon, Seong Soo · Lee, Jeong Jae

Abstract

Due to the fact that the design of a reinforced concrete structure changes in accordance with its shape and assigned load, total automation of the design system has not been achieved. For instance, since there is no general rule about setting up reinforcing steel quantity and arrangement location, it is simply not feasible to automatically decide the reinforcing arrangement location. In this study, the ESO(evolutionary structural optimization) technique and its related issues will be discussed. The ESO techniques is determined the reasonable load path which is traveling of load between in-flow and out-flow at a concrete structure using numerical analysis. And the results applied to the steel arrangement in reinforced concrete structures. The optimal algorithm, which determines the terminal criteria during ESO process, has been updated by using the obtained results. And the load path within the member has been determined automatically.

Keywords : ESO, Terminal condition, Reinforced concrete

I. 서 론

철근콘크리트 구조물은 작용하는 하중과 구조물의 형태에 따라 설계 내용이 달라지므로 설계의 완전 자동화는 아직 달성되지 못하고 있다. 왜냐하면 철근콘크리트 구조물의 설계를 위해서는 사용되는

철근량과 배근 위치의 설정이 필요한데, 철근 배근 위치를 결정하는 일반적인 원칙이 제시되지 않고 있어 기계적인 철근 배근위치를 결정이 곤란하기 때문이다.

철근의 배근을 위한 여러 연구 중 Strut-And-Tie 모델은 콘크리트 구조설계 자동화에 가장 이용성이 높은 것으로 판단된다. Strut-And-Tie 모델은 주어진 철근콘크리트의 외형으로부터 응력의 경로를 경험적으로 알아내는 방법이지만 응력 경로가 밝혀지면 응력경로를 따라 철근과 같은 보강재를 배치할 수 있으므로 Strut-And-Tie 모델을

* 충북대학교 농과대학

** 서울대학교 농업생명과학대학

* Corresponding author. Tel.: +82-43-261-2575

fax: +82-43-271-5922

E-mail address: yss@trut.chungbuk.ac.kr

자동으로 생성할 수 있다면 설계자동화에 상당한 진전을 이룰 수 있을 것으로 보여진다.⁷⁾ 아울러 주목할 만한 기술로는 컴퓨터를 이용한 점진적 구조 최적화 기법이 있다.

그 동안 철근의 자동화 배근에 관련되는 많은 연구가 이루어 졌는데, 그 중에서 괄목할 만한 연구로는 배근의 관련 지식을 지식베이스로 구축하고, 배근 위치를 미리 정의된 도면으로 제시하는 전문가시스템을 이용하는 방법, 표준도면을 설정한 후 주어진 조건을 입력하여 이를 매개로 도면을 찾는 표준화 방법, 건축학에서 주로 발달된 Strut-And-Tie 모델을 이용하는 방법¹³⁾ 등이 있었으나 자동화 작업을 지원하는 데는 여전히 부족한 상태였다. 1980년대 후반부터 구조물의 거동을 해석하여 최적 형상을 결정하는 구조 최적화 기법이 소개되면서 진전을 보게 되었다.

1993년에 Steven과 Xie는 구조최적화 기술을 응력경로 탐색에 접목한 점진적 구조최적화 기법을 제안하였다. 이 방법은 구조물을 작은 요소로 분할하고, 유한요소해석을 통해 요소의 응력을 구한 후 응력이 작은 요소를 점차로 제거하면 구조물의 목적달성에 꼭 필요한 부분만을 나타내는 트러스와 유사한 Strut-And-Tie 형태를 얻을 수 있다는 점에 착안하고 있다.¹⁰⁾

점진적 구조 최적화 기법은 최적 구조물의 형상을 결정하는 문제와 트러스 구조물의 최적 배치 등에 이용되었으며,⁷⁾ Liang에 의해 자동적인 Strut-And-Tie 모양으로 변환하기에 이르렀지만, 철근콘크리트 부재의 철근 배치의 문제엔 아직 논의하지 못하고 있다.

본 장에서는 점진적 구조 최적화 방안을 살펴보고, 이를 기반으로 하는 알고리즘을 구성하여 콘크리트 부재에서의 응력흐름을 결정하고, 적용 예를 통하여 Strut-And-Tie 모델과 비교하며, 철근콘크리트 구조물에 대한 배근의 적용성을 고찰한다.

II. 점진적 최적화 기술

1. 점진적 최적화 기법의 발달

점진적 구조 최적화 기법(ESO : Evolutionary Structural Optimization)은 연속체의 외부와 내부 경계, 혹은 요소 재료의 유무 분포를 결정하는 위상 설계 기법의 하나로 연구되었다. 위상설계는 해석과정에서 재료가 존재하면 1, 존재하지 않으면 0을 가지는 지시함수(indicator function)을 통해 구조부재의 위상을 표현하였다. 그러나 0 과 1을 가지는 함수를 사용할 경우 위상 최적화 문제는 일반 해를 가지지 못한다는 점이 발견되었다. 이 문제를 해결하기 위해 구조물의 모든 요소에 공극을 포함하는 균질화법으로 발전하였다.²⁾ 균질화법은 초기 설계조건을 위상학적으로 동일하게 하고, 유한 요소해석 등의 방법으로 해석한다.²⁾ 그러나 이 균질화법은 민감도 해석과 반복적 해를 찾아 많은 계산이 필요하게 되고, 대규모의 기억 용량이 요구되며, 최적화 속도가 느릴 뿐 만 아니라, 해석결과가 불분명한 경우가 발생하는 문제점이 밝혀지게 되었다.⁶⁾ 그 후 구조물의 내부에너지와 균질화 재료 상수를 보다 간단히 계산하는 방법을 제시하였으나 중간 밀도 값을 내삽함수로 결정하여 해석결과가 불분명해지는 단점을 가지고 있다. Yang은 재료의 탄성과 밀도의 관계를 가정하고, 밀도 값의 보간에 벌칙함수(penalty function)을 이용하여 최적화 함으로서 해의 정밀도를 높이고, 벌칙함수를 이용하여 구조물의 요소를 제거하는 방법을 제시하였다. 그 후 요소의 제거 방법과 해석에 있어 유한요소법의 이용 등의 특징을 갖는 점진적 구조 최적화법이 제안되었다.¹¹⁾

2. 점진적 구조 최적화 알고리즘

연속체의 경우 구성요소 중 외부 하중에 저항하는 요소는 하중경로에 해당하는 요소뿐이므로 외부

하중에 저항하지 않는 부재는 제거되어도 전체 강성에는 거의 영향이 없게 된다. 따라서 구조물의 강성에 기여하지 않는 부분은 제거하는 것이 경제적인 것이다. 이에 따라 구조물의 재료를 제거하는 기준이 필요하다. 재료 제거 과정의 정식화는 다음과 같다.

유한요소정식화 과정에서 정적 구조물의 평형방정식은 다음과 같다.

$$[K] \{u\} = \{R\} \dots\dots\dots(1)$$

여기서, $[K]$: 구조물의 강성도 행렬
 $\{u\}$: 하중에 따른 변위벡터
 $\{R\}$: 절점 하중벡터

만약 e번째 요소가 설계영역에서 제거된다면, 그 강성과 변위는 변할 것이므로 위 식은 다음과 같이 변화되고,

$$([K] + [\Delta K]) (\{u\} + \{\Delta u\}) = \{R\} \dots\dots\dots(2)$$

여기서, $[\Delta K]$: 강성 행렬의 증분
 $\{\Delta u\}$: 절점 변위 벡터의 증분

강성 행렬의 증분은 식 (3)과 같다.

$$[\Delta K] = [K_r] - [K] = -[k_e] \dots\dots\dots(3)$$

여기서, $[K_r]$: 설계 결과의 강성행렬
 $[k_e]$: e번째 요소의 강성행렬

식 (2)를 전개하면,

$$[K] \{\Delta u\} + [\Delta K] \{u\} = \{R\} - [K] \{u\} - [\Delta K] \{\Delta u\} \dots\dots\dots(4)$$

가 되고, $[\Delta K] \{\Delta u\}$ 는 고차 미분항이므로 무시하면

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1} [\Delta K] \{u\} \dots\dots\dots(5)$$

가 된다.

구조물의 변형에너지는 다음 식으로 나타낼 수 있으며,

$$C = \frac{1}{2} \{R\}^T \{u\} \dots\dots\dots(6)$$

e번째 요소의 제거로 인한 구조물의 변형에너지의 변화는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{1}{2} \{R\}^T \{\Delta u\} \dots\dots\dots(7) \\ &= \frac{1}{2} \{u_e\}^T [k_e] \{u_e\} \end{aligned}$$

여기서, $\{u_e\}$: e 번째 요소의 변위 벡터

이 과정은 e번째 요소의 제거에 따른 구조물의 변형에너지의 변화는 e번째 요소의 변형에너지의 계산에 의해 근사적으로 계산될 수 있음을 보이고 있다. 그러므로 요소 변형에너지는 전체 구조물의 강성을 구성하는 요소의 변형에너지의 합으로 계산될 수 있고, 각 요소의 변형에너지는 다음과 같다.

$$c_e = \frac{1}{2} \{u_e\}^T [k_e] \{u_e\} \dots\dots\dots(8)$$

목적달성하기 위해 가장 낮은 변형에너지 요소는 설계 영역에서 점차로 제거한다. 만약 연속체 설계영역이 여러 크기의 요소로 나뉘어 진다면, 가장 낮은 요소의 변형에너지는 재료 제거 기준에서 중량으로 나누어진 값이 사용된다. 가장 낮은 변형에너지 밀도를 받는 요소는 초기의 설계영역에서 요소의 수에 따른 요소 제거율에 따라 지정한 만큼 반복 제거된다. 본 연구에서는 이 정식화 과정을 프로그램으로 구성하였다.

3. 제거율과 제거기준

유한요소해석을 통해 각 요소의 최대 주응력이 계산된다. 이런 응력을 점진적 최적화에서는 응력 수준(stress level)이라 한다. 이때 한 요소의 응력 수준이 전체 요소 중 가장 큰 응력 수준에 제거율(Rejection Rate)를 곱한 값보다 작으면 그 요소

의 응력이 매우 작다고 할 수 있으므로 점진적으로 제거한다. 이 제거 기준은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_e < RR_i \times \sigma_{\max} \dots\dots\dots(9)$$

여기서, σ_e : e 번째 요소의 응력

σ_{\max} : 구조물 요소 응력의 최대값

RR_i : i 번째 과정의 제거율

점진적 최적화 과정을 거치는 동안 점차로 요소들이 제거됨에 따라 소거비율도 계속 증가하여야 한다. 즉, 어떤 제거비율 값을 유지한 채 점진적 최적화 과정을 반복한 후 더 이상 식(9)의 기준에 의해 소거될 요소가 없다면 이전 단계의 제거율의 증분값 만큼 큰 값으로 소거 비율이 대체된다.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER, i = 0, 1, 2, \dots \dots\dots(10)$$

여기서, ER : 제거율의 증분값

이 반복과정은 모든 요소의 응력 수준에 어떤 범위 안에 속할 때까지 반복되며, 본 연구에서도 이 과정을 준용하였다.

4. 공 요소

점진적 최적화 과정에 의하여 구조물을 최적화할 때, 매 단계마다 유한요소해석의 결과로 나온 요소들의 응력 분포를 바탕으로, 응력이 매우 작아 효과적으로 쓰이지 않는 미소응력을 수반하는 요소들이 소거되기 때문에 새로운 기하적 자료를 입력하여 유한요소해석을 수행해야 한다. 그러나 이때 새로운 기하 자료를 구성하기 위해 요소를 재구성한다는 것은 상당히 번거롭고, 자동화하기 어렵다. 이를 해결하기 위해 점진적 최적화 과정의 첫 단계에서 사용한 요소들의 구성을 계속적으로 이용하기 위해 기존의 자료에서 소거할 요소를 탄성계수가 0인 공요소(blank element)로 치환하여 제거된 요

소를 표시할 수 있다. 본 연구에서 작성된 프로그램도 공요소를 이용하였다.

5. 종료기준

점진적 최적화 방법은 같은 과정을 반복적으로 수행하게 되어 이를 종료시킬 기준이 필요하다. 이 종료 기준을 설정하는 방법으로는 더 이상 제거할 요소가 없을 때까지 반복하는 방법과 삭제율을 제한하는 방법, 그리고 전체요소에 대한 남아있는 요소의 체적비율로 결정하는 방법 등이 있다.

제거할 요소가 없을 때까지 점진적 최적화 과정을 계속 수행하는 방법은 제거되어서는 구조체를 형성할 수 없는 요소까지 제거될 위험성이 있어 점진적 최적화과정을 이행한 후 재 보정이 필요하다. 삭제율을 제한하는 방법은 반복 한계에 대한 설계자의 제한 등 설계경험에 종속된다. 체적의 비율로 결정하는 방법은 최근에 개발되어 적용되고 있지만 체적 비율 역시 초기에 결정해야 하므로, 설계 경험에 의존한다.

본 연구에서는 종료 기준을 결정하는 최적화 알고리즘을 2단계 최적화 과정과 제거 한계 값을 제한하는 방식으로 개선하였다. 2단계 최적화 과정은 제거율의 증가가 없는 조건에서의 기하조건 및 재료조건을 변경하는 단계와 제거율이 증가된 상태에서 기하조건 및 재료조건을 변경하는 2단계로 구분된다.

III. 점진적 최적화 프로그램의 개발

1. 점진적 구조 최적화 단계

점진적 최적화 기법을 개발하기 위하여 정의할 요소의 변환, 정식화, 초기 소거값, 점진적 최적화율, 종료기준, 제거기준을 결정하고, 유한요소해석 프로그램을 기본 프로세스로 점진적 최적화 프로그램 모델을 개발하였다.

점진적 구조 최적화 기법에서 최적의 해는 한번의 해석으로는 구해지지 않고 반복 수행할 때마다 구조물에서 일부 요소가 제거되는 진화 과정을 통해 구해진다. 최종 해를 얻기 위한 제거율의 영향은 매우 중요하다. 해의 정확도는 제거율을 줄일수록 높아지지만 반면에 처리해야 할 자료의 양은 늘어난다.

점진적 구조 최적화 기법을 프로그램에 이용하기 위하여 Fig. 1과 같이 5단계로 알고리즘을 구성하였다.

1. To discrete the structure using a fine mesh of finite elements
2. To analyze the structure for given loads
3. To calculate the stress for each element
4. To remove elements which have lower stress than remove criteria
5. To repeat second step to fourth step until one of the constraints reaches its limit

Fig. 1 ESO Algorithm

2. 프로그램 흐름도

본 연구에서 점진적 구조 최적화이론을 이용하여 하중경로를 알아내기 위한 프로그램 ESOwork을 개발하였다. ESOwork은 유한요소해석 프로그램을 해석의 엔진으로 이용하였다. ESO 처리과정은 입력된 대상영역을 해석하기 위해 8절점 iso-parametric rectangular element을 작성하였으며, 전처리 프로그램을 이용하여 자동으로 요소를 분할하였다.

Fig. 2는 ESOwork의 처리 흐름도이며, 여기에 이용되는 주요 변수는 다음과 같다.

IRR(Initial Rejection Ratio)은 초기 소거 비율이며, 초기 값이 0이고, ER(Evolutionary Ratio)은 소거비율 증가율이며, RR(Rejection Ratio)은 제거율이다. RR은 IRR에 iteration 된 수와 ER을 곱한 값을 갖게 되는데 구조물의 요소를 제거하는 기준이 된다. 구조요소의 제거는 von Mises

Table 1 List of name and function for evolutionary structural optimization program

Name	Function	Input	Output
dialog	FEM condition input generated interactively		inp, input1
feminput	FEM input generation by dialog result	input1	input2, excelout
	Assign load	input2	eso.in
ESOwork	ESO main processor		eso.out, esodeform, esoprinciple, history

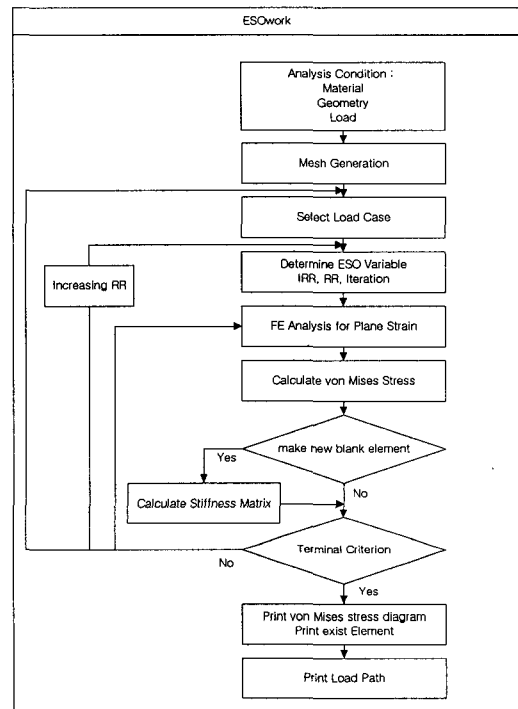


Fig. 2 Flow chart of ESOwork

stress를 요소 단위로 계산하여 그 구조물의 최대 von Mises stress와 해당 요소의 von Mises stress의 차가 RR 보다 큰 경우가 해당된다. 종료 조건은 두 경우로 구분된다. 첫째는 구조 요소의 변경없이 비교되는 조건이며, 다른 하나는 구조 요

소의 변경을 수반하는 조건이다. 모든 경우 더 이상의 재료의 요소 변경이 없는 경우에 종료하게 된다.

3. 적용 예

개발된 ESOwork이 점진적 최적화 과정을 어떻게 수행하는지 알아보기 위해 Deep beam에 적용하였고, 기존의 이론들과 비교하였다. Beam은 Plane stress 요소로 가정하였다.

예제의 해석결과 응력이 Arch 형태로 지지점에 전달됨을 알 수 있다. 해석결과와 Fig. 4에서 보인 Strut-And-Tie Model과 결과를 비교해 보면 상당히 유사함을 알 수 있어 ESOwork가 자동적으로 응력 경로를 결정하여 줌을 알 수 있다. Strut-And-Tie 모델은 구조물 내의 응력교란 부분에 대한 힘의 내적 전달 경로를 간단히 직선으로 표현하고, 극한 상태의 외부 하중과 내적 힘들의 평형을 고려하여 힘을 구하는 방법이다. 따라서 Strut-And-Tie 모델로 하중 경로가 표현되면 이를 이용하여 철근 콘크리트 구조물을 배근할 수 있다. 그러나 Strut-And-Tie 모델의 배치는 정식화 되지 않아 구조공학자들이 잘못 배치할 우려가 있어 자

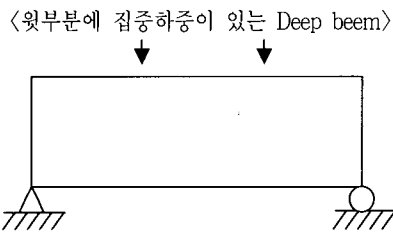


Fig. 3 Example problem

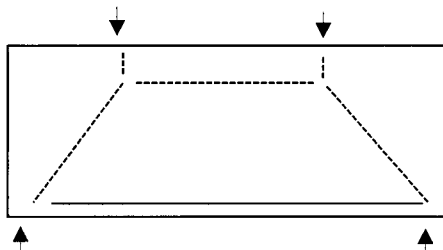
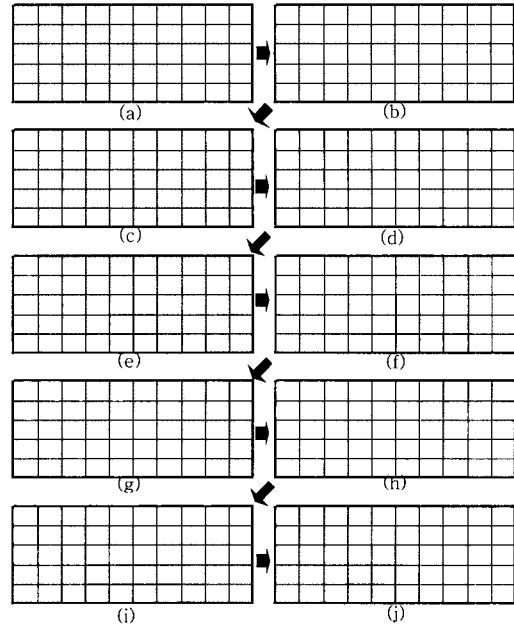


Fig. 4 Load path by Strut-And-Tie



(◻):Exist element, (□):Blank element

Fig. 5 Evolutions of element

동화된 Strut-And-Tie 이 개발이 필요하다.³⁾ ESOwork은 Strut-And-Tie 모델의 수학적 기반 없이도 하중 경로를 표현하여 주어 철근콘크리트 배근에 유용하게 이용할 수 있다.

4. ESOwork의 적용성 평가

ESOwork는 점진적 구조 최적화 기법에 응용하여 작성된 프로그램으로 결정한 응력경로를 이용하여 철근콘크리트 구조물의 배근 위치를 결정한다. 본 연구에서는 ESOwork의 결과를 이용하여 철근콘크리트 배근 적용성을 평가하기 위해 개거형 수로에 적용하여 Strut-And-Tie 모델을 작성하고, 2경간 구형 연속보의 예제를 설정하여 응력경로를 검토하며, 배근 정보를 고찰한다.

ESOwork의 적용성을 알아보기 위해 개거형 수로에 적용하였다. 개거형 수로는 하중 경로가 비교적 복잡하고, 계산에 의한 배근이 어려운 D 부분을 가지고 있다. D 부분은 베르누이 이론이 적용되지

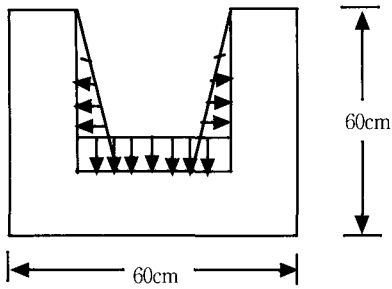


Fig. 6 Example of open channel

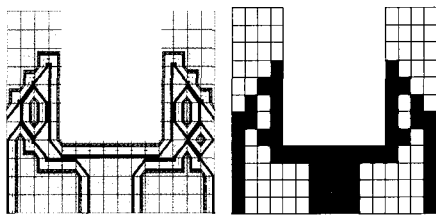


Fig. 7 ESOworks result of the example

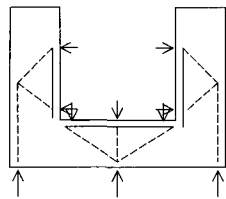


Fig. 8 Strut-And-Tie Model according to ESOworks Result

않는 지역으로 배근 위치를 정형화 하기 곤란하다. 설정한 문제는 Fig. 6 와 같다.

ESOWork을 이용하여 해석한 결과 Fig. 7 와 같이 총 128개의 요소 중 52개의 요소가 남았다. 남아있는 요소를 통해 절점의 합력의 규칙을 이용하여 Strut-And-Tie 모델을 작성한 결과 가능성 있는 하중경로 모델을 작성할 수 있었다.

IV. 철근 콘크리트 구조물의 배근 고찰

1. 연속보의 배근

ESOWork을 이용하여 배근을 고찰하기 위해

Fig. 9와 같은 중앙지간에 고정단을 갖고, 양 끝에 활절인 경간 10m의 2경간 연속보에 적용하였다.

주어진 보를 ESOwork를 이용하여 배근위치를 구하면 다음과 같다.

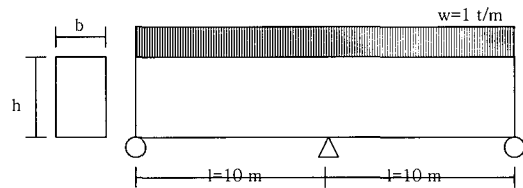


Fig. 9 Example of rectangular beam

- 요소수 : 100(20X5) element
 - 총제거된 요소 : 50 element
 - 반복 제거 횟수 : Rejection Ratio = 32%
 - 계산 시간 : 1.5시간
- (WorkStation : SunStation MP630)

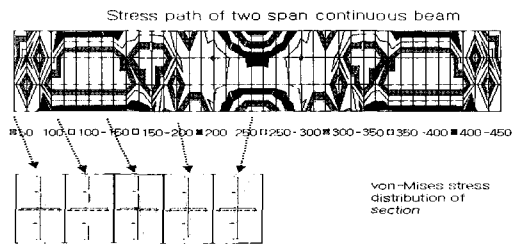


Fig. 10 Stress level and section stress after ESO processing using ESOwork

이 결과를 이용하여 배근한 결과 다음과 같다.

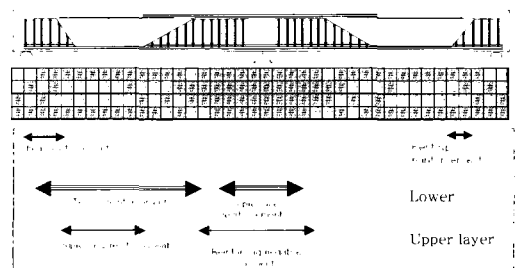


Fig. 11 Steel arrangement by ESOwork

2. 점진적 구조 최적화 기법에 의한 철근콘크리트의 배근 고찰

응력수준을 기반으로 한 점진적 최적화 과정을 이용한 ESOwork는 배근이 필요한 위치를 보여 주어 설계자가 이를 참조하여 응력경로에 맞는 배근을 선택할 수 있다. 배근 작업은 시방서의 모든 설계 개념을 준수하며, 따라서 해석적 결과와 상호보완적이어야 한다. 철근콘크리트 수리구조물의 배근을 위해 점진적 최적화 과정에서의 방법은 다음과 같다.

- 힘에 의한 경우 응력 경로는 압축과 인장을 모두 트러스 형태로 파악한다.
- 배근되는 위치는 응력이 전달되는 부분을 따르며, 인장부분의 tie의 위치를 배근의 위치로 한다.
- 배근의 양은 시방서에 의한다.
- 배근되는 철근은 힘과 전단보강이 목적이다.
- 힘 배근의 경우 단면에 대한 최대 모멘트를 기준으로 한다.
- 전단에 따른 배근을 배근량을 계산하여 배근의 분포를 정한다.
- 실용적인 배근을 위해 호형도와 Strut-And-Tie Model에 의한 것을 참조한다.
- 점진적 구조 최적화 과정의 규준은 von Mises stress로 한다.

점진적 최적화 과정을 통해 나타나는 하중 경로는 트러스 형태이므로, 이를 기반으로 트러스에 의한 해석을 추가할 수 있다. 또한 철근 배근이 완료된 후 배근된 요소를 철근의 물성값으로 변환하여, 재해석과정을 거쳐 최종적인 상세설계를 할 수 있다.

앞으로 철근콘크리트의 배근 후 비선형 자료형을 이용한 철근 배근의 적합성을 확인할 수 있는 연구가 필요하다고 사료된다. 본 연구를 통하여 제작된 설계시스템은 배근 대상이 되는 시설물의 요소는 보, 개수로, 수로박스, 벽체에 대하여 각 부재는 점진적 최적화 과정에 따른 하중경로를 제안하도록 하고, 설계자가 Strut-And-Tie Model에 의한 배

근 모형, 그리고 기존의 배근도를 기본자료와 비교하여 판단하도록 하였다.

V. 결 론

철근콘크리트로 된 수리구조물의 배근 위치를 결정하기 위하여 점진적 구조 최적화 기법을 도입하였다. 배근의 위치는 부재의 응력 경로 중 인장부에 해당한다. 본 연구에서는 철근콘크리트 부재의 응력 경로를 점진적 구조 최적화 기법을 이용하여 결정하고, 이를 통해 철근 콘크리트의 배근의 문제를 고찰하였다.

기존의 점진적 구조 최적화 과정에 종료조건을 결정하는 최적화 알고리즘을 2단계 최적화 과정과 제거 한계 값을 제한하는 방식으로 개선하여 ESOwork를 개발, 그 결과로 부재내의 응력경로를 자동적으로 결정할 수 있었다. 점진적 구조 최적화 기법을 이용한 응력경로를 추적하면 기존의 Strut-And-Tie 과 유사한 형태를 얻을 수 있었으며 예제를 통하여 수작업과 유사한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 부재의 철근 배근 위치는 점진적 구조 최적화 기법에 의한 응력 경로의 인장부분을 대상으로 검토하였다.

References

1. Back, J. H., S. J. Hong, L. H. Lee, 1996, Topology Optimization under Multi-Loading Condition, *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea* 9(3): 179-186. (in Korean)
2. Bendsoe, M. P., N. Kikuchi, 1988, Generation Optimal Topologies in Structural Design using A Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71:197-224.
3. Elgaaly, M., Y. Liu, 1987, Analysis of Thin-Steel-Plate Shear Walls, *ASCE J. of Structural*

- Engineering*, 123(11): 1487-1496.
4. Haftka, R. T., Z. Gurdal, 1992, *Element of Structural Optimization*, 3rd revised and expanded edition, 239-242, Kluwer Academic Publishers.
 5. Kamat, M. P., 1993, *Structural Optimization : Status and Promise*, 517-546 American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc.
 6. Liang, Q. Q., Y. M. Xie, G. P. Steven, 2000, Optimal Topology of Bracing Systems for Multistory Steel Frames., *ASCE J. of Structural Engineering*, 126(7):823-829.
 7. Liang, Q. Q., Y. M. Xie, G. P. Steven, 2000, Topology Optimization of Stut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures using an Evolutionary Procedure, *ACI Structural Journal*, 97(2):322-330.
 8. Lim, O. K., J. S. Lee, 1998, Topology Optimum Design using Chessboard Patterns Search Algorithm and Virtual Load, *J. of the Computational Structural Engineering Institute of Korea* 11(4): 267-274. (in Korean)
 9. Marcellin, J. L., 1999, Evolutionary Optimization of Mechanical Structures : Towards an Integrated Optimisation, *Engineering with Computers*, 15: 326-333.
 10. Steven, G. P., Y. M. Xie, 1993, Evolutionary Structural Optimization with FEA, *Computational Mechanics*, 1993, Jul:27-34.
 11. Yang, X. Y., Y. M. Xie, G. P. Steven, O. M. Querin, 1999, Topology Optimization for Frequencies using an Evolutionary Method, *ASCE J. of Structural Engineering* 125(12): 1432-1438.
 12. Yoon, H. K, 1999, Development of Analysis Program for the Reinforced Concrete Structure using Strut-Tie Model, Degree of Master Diss., Pusan National University. (in Korean)
 13. Yoon, Y. M., J. W. Park, 1999. 3D SUB 3D STM Approach for Design and Analysis of 3D Structural Concrete, *J of KSCE*, 19(1-4): 483-494. (in Korean)
 14. Zhoa, C., G. P. Steven, Y. M. Xie, 1995, Simultaneously Evolutionary optimization of Several Natured Frequencies of a Two Dimensional Structures, *Structural Engineering and Mechanics* 7(5): 447-456.