

비스듬히 입사하는 파랑의 Bragg반사 Bragg Reflection of Obliquely Incident Waves

조 용 식* / 안 영 창**
Cho, Yong-Sik / Ahn, Young-Chang

Abstract

The present research describes the Bragg reflection of obliquely incident waves propagating over sinusoidally varying topographies. A numerical model based on the boundary element method is employed. Wave numbers providing Bragg reflection are calculated and compared to theoretical predictions. The reflection coefficients obtained from this model are also compared with those of the eigenfunction expansion method. A very good agreement is observed.

keywords : wave, boundary element method, Bragg reflection, sinusoidally varying topography, eigenfunction expansion method

요 지

본 연구에서는 경계요소법을 이용하여 비스듬히 입사하는 파랑의 반사에 대하여 다루었으며, 비스듬히 입사하는 파랑이 정현파형 지형을 통과하는 경우 그 때의 반사율과 Bragg 반사에 대하여 조사하였다. 특히, 비스듬히 입사하는 파랑의 Bragg 반사를 발생시키는 파수를 계산하여 이론적인 결과와 비교하였다. 해석결과의 검증을 위하여 고유함수전개법에 의한 정현파형 지형의 반사율과 본 모형의 결과를 비교 하였으며, 전체적으로 본 연구의 결과는 기존의 연구결과들과 비교적 양호하게 일치하였다.

핵심용어 : 파랑, 경계요소법, Bragg 반사, 정현파형지형, 고유함수전개법

* 한양대학교 공과대학 토목공학과 교수
Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang dong, Seongdong gu,
Seoul 133-791, Korea
(E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)
** 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정
Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea

1. 서 론

Bragg 반사는 정현파형지형(sinusoidally varying topography) 또는 일정한 규칙을 갖는 해저지형을 통과하는 파랑의 파장이 해저지형 파장의 두 배가 될 때 발생하는 일종의 공진현상(resonance)에 의해 반사율이 매우 커지는 물리적 현상을 말한다. Mei와 Liu (1993)에 따르면 Bragg 반사는 미국의 오대호, 일본 근해 및 여러나라의 해안에 존재하는 수중 사린군(submerged multiple offshore sand ripples)의 형성과 관련이 있고, 이와 같은 사린군은 해안경사가 0.005보다 작은 지형에서 주로 발견되고 있다. 일반적으로 하나의 사린군은 3~17개의 사린으로 구성되어 있고 사린간의 간격은 10~480 m인 것으로 보고되었다. 따라서 수중 사린군은 해저지형의 변화에 중요한 역할을 하므로 이에 관한 연구는 매우 중요하다.

본 연구에서는 해저지형의 변화에 중요한 역할을 하는 바닥지형을 따라 비스듬히 입사하는 파랑의 반사율에 관한 문제를 해석하였다. 특히, 본 연구에서 언급할 Bragg 반사는 입사파의 특성을 변형시키는 동시에 해저지형의 형태와 길이에 따라 파랑에너지의 상당량을 반사시킬 수 있기 때문에 해안구조물의 설계 및 항만 시설물 보호 등에 효과적으로 이용될 수 있다. 즉, 방파제와 항만시설과 같은 해안 구조물은 물론 해수욕장 등과 같은 편의시설을 위한 해안선 보호 및 불필요한 표사의 퇴적과 침식 등을 고려한 연안개발계획의 효율적인 수립을 위해서는 Bragg 반사 현상을 연구할 필요가 있다.

지금까지 많은 학자들이 Bragg 반사 및 파랑의 통과율과 반사율에 대한 연구를 수행하였다. Kirby와 Dalrymple(1983)은 고유함수전개법(eigenfunction expansion method)을 이용하여 트랜치지형에서 통과율과 반사율을 계산하였으며, Davies와 Heathershaw (1984) 및 Guazzelli 등(1992)는 수리모형실험을 이용하여 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 Bragg 반사를 연구하였다. O'Hare와 Davies (1992)는 단일성분파(monochromatic wave)의 Bragg 반사를, Suh 등(1997)은 완경사 방정식 및 확장형 완경사 방정식을, 이종인 등(1999)은 경사지형에서의 Bragg 반사를 계산하였으며, Zhang 등(1999)은 hybrid 모형을 이용하여 파랑의 반사율을 연구하였다. 그리고 김영택 등(2000)은 2차원 경계요소법을 이용한 Bragg 반사를, Cho와 Lee(2000)는 정현파형 지형을 지나는 파랑의 반사를 고유함수전개법으로 해석하였다. 하지만, 비스듬

히 입사하는 파랑의 Bragg 반사에 대한 연구는 여전히 드물다. 그리고 원해(offshore)에서 입사되어 들어오는 파랑은 항상 직각으로 들어오는 것은 아니므로 더욱 현실적인 반사율의 계산을 위해서는 직각으로 입사하는 파랑 뿐만 아니라 비스듬히 입사하는 파랑에 대해서도 연구가 필요하다. 따라서, 본 연구에서는 경계요소법을 이용하여 비스듬히 입사하는 파랑이 정현파형 지형을 통과하는 경우의 반사율을 계산하였으며, 계산된 결과는 Cho와 Lee(2000)의 고유함수전개법에 의한 결과와 비교하였다.

다음 장에서는 경계요소법에 대하여 간략하게 서술하며, 아울러, 지배방정식과 경계조건을 기술한다. 제3 장에서는 경계요소법 모형검증과 비스듬히 입사하는 파랑이 정현파형 지형을 통과할 때 발생하는 Bragg 반사 및 반사율을 계산한다. 마지막으로 4장에서는 결론을 서술한다.

2. 경계요소법

경계요소법은 지하수 흐름, 파랑의 진행 및 처오름 등과 같이 자유수면을 갖는 흐름의 해석에 있어서 효과적일 뿐만 아니라 비교적 정확한 해를 제공하는 수치기법이다. 특히, 경계요소법은 계산영역 전체를 계산하지 않고, 경계를 따라서만 계산하기 때문에 입력자료의 간소화와 기억용량의 감소는 물론, 영역내부의 임의점의 정보를 정확도의 감소없이 계산할 수 있다.

더욱이, 경계요소법은 유한차분법, 유한요소법 등 다른 수치기법에 비하여 다음과 같은 몇 가지의 장점들을 더 가지고 있다. 첫째, 유한차분법과는 달리 적용이 용이하며, 지형 조건이 복잡한 경우에도 경계조건을 적용이 비교적 용이하다. 둘째, 격자를 만들 때 중요한 부분은 세밀한 격자를 만들고 그렇지 않은 부분은 그 보다 큰 격자를 만들어 계산할 수 있어 효율의 향상을 도모할 수 있다. 셋째, 유한차분법이나 유한요소법 등과 같은 다른 수치기법과는 달리 경계를 제외하면 지배방정식에 대해서 다른 가정을 하지 않으므로 더욱 정확한 해를 제공할 뿐만 아니라 경계에서 발생할 수 있는 오차는 경계의 간격을 세분화함으로써 감소시킬 수 있다. 즉, 유한차분법은 편미분 방정식을 차분화하는 과정에서 오차항이 생성되지만 경계요소법에서는 편미분 방정식의 차분화에 의한 오차는 발생하지 않는다.

그러나, 경계요소법은 여러 장점에도 불구하고 free space Green 함수가 존재하는 방정식의 경우에만 적용이 가능하다는 단점이 있다(Liggett과 Liu, 1983).

즉, Laplace방정식과 같이 free space Green 함수가 존재하는 지하수 문제나 파랑의 해석에 주로 이용된다. 또한, 시간의존(time dependent)문제의 해석에는 다소 어려움이 있다(김영택 등, 2000).

본 절에서는 정현파형의 형상을 갖는 해저지형을 투과하는 파랑의 반사를 연구하기 위해 경계조건 및 지배방정식에 관하여 간략히 기술한다(Fig. 1 참조). 정현파형 해저지형에 입사하는 파랑과 해저지형에 의해 반사하는 반사파 및 해저지형을 투과하여 계속 진행하는 투과파를 지배하는 지배방정식은 미소진폭과 이론에 의해 결정된다.

먼저, 시간에 대하여 주기성을 갖는 일정 수심(h^-)의 지형을 투과하는 입사파 파랑의 속도포텐셜은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\phi_I = -\frac{igA}{\omega} \frac{\cosh k_0^+(z+h^-)}{\cosh k_0^+ h^-} e^{i\alpha_0 x} \quad (1)$$

식 (1)에서 i 는 단위 복소수, A 는 각 θ 를 가지고 일정수심을 진행하는 입사파의 진폭, α_0^- 은 x 방향의 파수(wave number)를 나타내며, 시간항은 생략하였다. 그러나, 불규칙적인 바닥지형의 영향으로 입사파는 그대로 진행하지 못하고 반사 및 산란을 하게 되므로 이를 해결하기 위해 Sommerfeld 경계조건을 이용하였다(Liggett과 Liu, 1983).

$$\lim_{k, x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \mp i\alpha_0^+ \right) (\phi - \phi_I) = 0 \quad (2)$$

Sommerfeld 경계조건에 의해 분리된 투과파와 반사파의 속도 포텐셜은 식 (3)과 같이 표현된다. 식 (3)에서 위첨자 $+$ 는 투과파 성분을, $-$ 는 반사파 성분을 나타낸다.

$$\phi = A_0^+ \frac{\cosh k_0^+(z+h^-)}{\cosh k_0^+ h^-} e^{-i\alpha_0 x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_I \end{pmatrix}, \quad x > x^+ \text{ or } x < x^- \quad (3)$$

또, 진행파와 소멸파의 파수 k_0^+ 와 K_n^+ 은 모두 실수이며, 다음과 같은 분산관계식으로부터 계산할 수 있다.

$$\omega^2 = gk_0^+ \tanh k_0^+ h^-, \quad \omega^2 = -gK_n^+ \tan K_n^+ h^- \quad (4)$$

그러나 본 연구에서는 소멸파의 영향을 고려하지 않으므로 진행파에서의 분산관계식만 사용한다. 식 (3)에

서 진폭함수 A_0^+ 와 A_0^- 를 결정하기 위해서는 두 개의 접합조건(matching condition)이 필요하게 된다. 첫째 접합조건은 x 축 방향의 흐름을, 이 연속, 즉 연속방정식이 성립되도록 한 것이며, 둘째 접합조건은 자유수면에서의 압력이 연속되도록 하는 것이다.

경계 위에서 절점의 수를 $M+N$ 이라 하고 두 개의 접합조건을 식 (3)에 대입하여 정리하면 보조경계(auxiliary boundaries)에서의 절점의 수가 미지수와 같아지게 된다. 따라서, 미지수가 $(M+N) \times (M+N)$ 인 선형행렬식을 유도할 수 있으며 행렬식을 해석하여 반사율과 투과율을 결정할 수 있다. 이 때 반사율(R)과 투과율(T)은 해저지형이 대칭이 아닐경우에 각각 다음과 같이 계산된다.

$$R = \frac{|A_0^-|}{A} \frac{\omega}{g}, \quad T = \frac{\cosh k_j h_j}{\cosh k_1 h_1} \frac{|A_0^+|}{A} \frac{\omega}{g} \quad (5)$$

위 식에서 j 는 투과율을 계산하는 영역을 나타낸다. 만일 해저지형이 대칭이면, 식 (5)는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$R = \frac{|A_0^-|}{A} \frac{\omega}{g}, \quad T = \frac{|A_0^+|}{A} \frac{\omega}{g} \quad (6)$$

3. 정현파형 지형을 지나는 파랑

본 절에서는 경계요소법(BEM, boundary element method)을 이용하여 각도 θ 를 가지고 정현파형 지형을 투과하는 파랑의 반사율을 계산하여 Dalrymple와 Kirby(1986)의 계산식에 의한 계산값 및 Cho와 Lee(2000)의 고유함수전개법(EFEM)에 의한 결과와 비교하여 본 모형을 검증한다. 모형의 검증에 사용된 지형은 Fig. 1과 같으며, 수심은 식 (7)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} h(x) &= h_1 \quad (x < 0) \\ h(x) &= h_1 - b \sin(bx) \quad (0 < x < 2\pi m/l) \\ h(x) &= h_1 \quad (x > 2\pi m/l) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서 h_1 은 일정한 수심이며, m 은 정현파형 지형의 사면의 수, b 와 l 은 각각 지형의 진폭과 파수를 나타낸다. 아울러, 문제를 보다 단순화하기 위하여 $h_1 = h_2$ 로 가정한다.

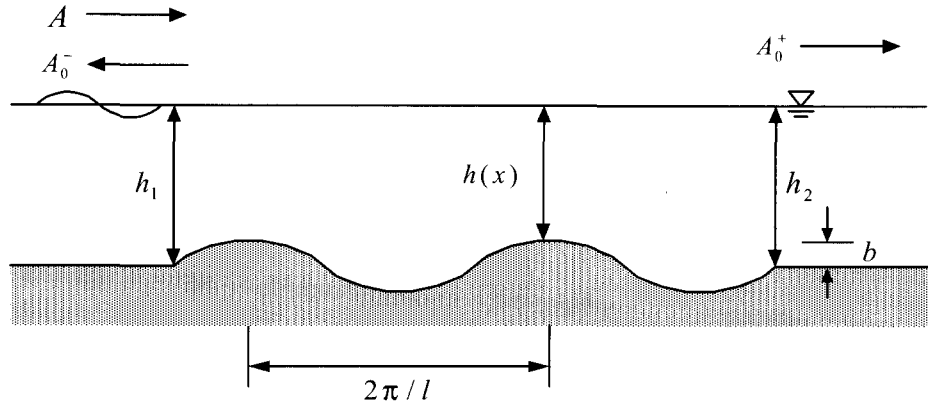


Fig. 1. A definition sketch of a sinusoidally varying topography

표 1. 파랑의 입사각에 따른 파수의 비

구분	$2k\cos\theta/l$				
	Dalrymple과 Kirby	present (m=2)	present (m=4)	EFEM 1	EFEM 2
$\theta = 0^\circ$	1.000	1.012	0.993	1.000	0.980
$\theta = 10^\circ$	1.015	1.027	1.008	1.012	1.009
$\theta = 20^\circ$	1.064	1.077	1.056	1.062	1.060
$\theta = 30^\circ$	1.154	1.168	1.146	1.150	1.130

Dalrymple과 Kirby(1986)에 따르면, Bragg반사가 발생할 경우 비스듬히 입사하는 파랑과 정현파형 지형의 파수는 $2k\cos\theta/l=1$ 를 만족한다. 표 1은 Bragg반사가 발생할 때 Dalrymple과 Kirby의 이론을 근거로 계산된 파수의 비(wavenumber ratio), 즉 $2k\cos\theta/l$ 의 값 및 고유함수전개법(EFEM)에 의한 파수의 비를 파랑의 입사각에 따라 본 연구의 결과와 비교한 것으로 present (m=2)와 EFEM 1은 $m=2$, 즉 사련의 수가 2일 때 파수의 비, present (m=4)와 EFEM 2은 $m=4$, 즉 사련의 수가 4일 때 파수의 비를 나타낸다.

Fig. 2와 Fig. 3은 각각 입사각이 $\theta=0^\circ$ 및 $\theta=30^\circ$ 일 경우, $m=2$ 와 $m=4$ 의 반사율을 계산하여 Cho와 Lee(2000)의 고유함수전개법에 의한 결과와 비교한 것이다. 파랑의 파수가 바닥지형 파수의 2배가 되는 $2k\cos\theta/l\approx 1$ 부근에서 Bragg 반사가 발생하여 반사율이 최대가 됨을 알 수 있다. Fig. 2에서 최대반사율은 입사각이 증가함에 따라 감소하는데 이는 θ 가 증가함에 따라 비스듬히 입사하는 파랑의 파장이 상대적으로 더 길어지기 때문이다. Bragg반사 역시

$\theta=0^\circ$ 에 대해서는 $2k/l\approx 1.012$, $\theta=30^\circ$ 에 대해서는 $2k/l\approx 1.168$ 에서 발생한다. Fig. 3에서도 θ 가 0° 일 때 보다 θ 가 30° 일 때 반사율의 크기는 작아졌으나 Fig. 2와 비교하여 사련수가 늘어날수록 최대반사율 또한 커짐을 알 수 있다. Bragg 반사는 $\theta=0^\circ$ 일 경우 $2k/l\approx 0.993$, $\theta=30^\circ$ 일 경우에는 $2k/l\approx 1.146$ 에서 발생한다. 전체적으로 본 연구의 결과는 고유함수전개법에 의한 결과와 잘 일치하고 있다.

Fig. 4와 Fig. 5는 각각 입사각이 5° 간격으로 0° 에서 45° 까지 변화할 때 반사율의 분포를 비교한 것이다. 두 경우 모두 입사각이 증가함에 따라 반사율이 선형적으로 감소함을 보여주고 있다. 또한, 최대반사율, 즉 Bragg반사가 발생하는 파수 또한 입사각이 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5의 경우 모두 Bragg 반사가 발생하는 파수의 비는 Dalrymple과 Kirby(1986)의 이론적인 예측 결과와 잘 일치한다. 두 경우에서 잘 나타나있듯이 사련의 수가 증가하면 반사율이 증가하면서 파랑의 에너지가 집중화됨을 알 수 있다. 따라서, Bragg반사를 응용하여 수중방파제를 설계할 경우 이와 같은 개념을 이용하면 상당량의 파랑에

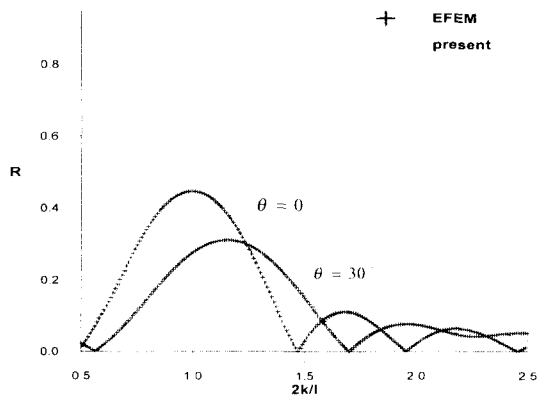


Fig. 2. Comparison of reflection coefficients ($m = 2$)

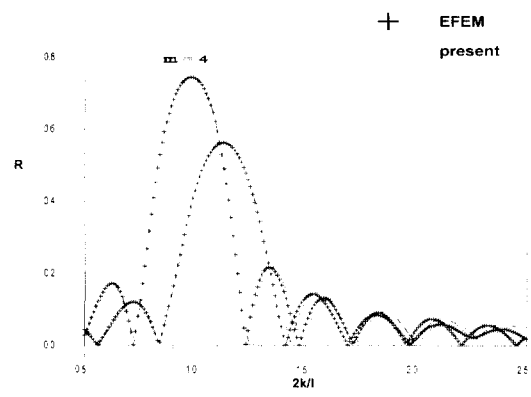


Fig. 3. Comparison of reflection coefficients ($m = 4$)

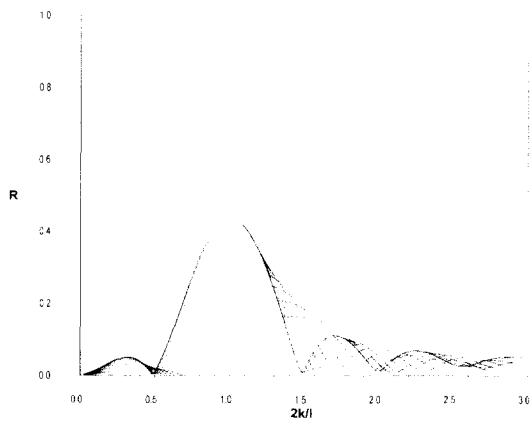


Fig. 4. Distribution of reflection coefficients ($m = 2$)

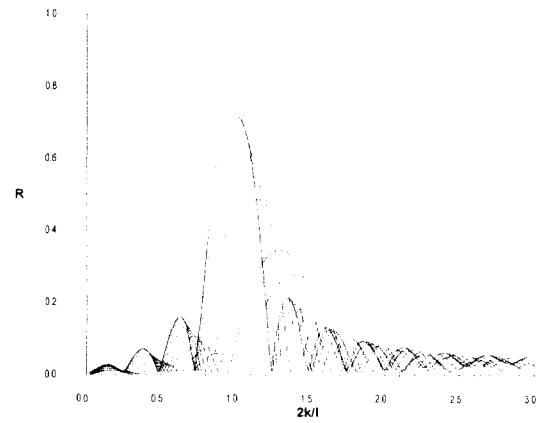


Fig. 5. Distribution of reflection coefficients ($m = 4$)

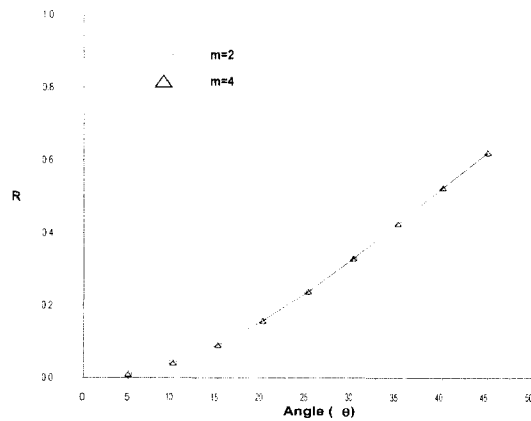


Fig. 6. Variation of reflection coefficients

너지 감소 효과를 얻을 수 있을 것이다.

마지막으로, Fig. 6은 입사각(θ)가 0° 일 때 $2k/l \approx 1$ 지점에서의 반사율과 각도(θ)가 변할 때의 $2k/l \approx 1$ 지점에서의 반사율의 차이를 0° 일 때의 최대반사율로 나눈 값이다. 이는 각도변화에 따른 반사율의 비(ratio of reflection coefficient)가 사선수가 2와 4일 때 선형적으로 변화하는가를 확인하기 위한 것으로 결과에서 보는 바와 같이 거의 선형적으로 증가함을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

본 연구에서는 경계요소법을 이용하여 기존의 연구 등에서 거의 고려하지 않았던 비스듬히 입사하는 파랑이 정현파형 지형을 통과하는 경우에 대하여 다루었다. 해저지형 사선의 수가 2개와 4개인 경우 파랑의 입사각의 변화에 따른 반사율의 변화를 연구하였다.

일반적으로 입사각 θ 가 증가함에 따라 Bragg반사는 더 큰 파수에서 발생하며, 최대반사율의 크기는 $\theta=0^\circ$ 에 비해서 더 작게 나타남을 알 수 있었다. 아울러, 정현파형 지형에서는 파랑의 파수가 바다지형 파수의 2배가 되는, 즉 $2k \cos \theta/l \approx 1$ 에서 거의 정확하게 Bragg 반사가 발생하며, 이는 Dalrymple과 Kirby (1986)의 이론적 예측과 잘 일치한다.

감사의 글

본 연구는 2001년 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

김영택, 조용식, 이정규, 2000. "2차원 경계요소법을 이용한 Bragg반사 해석." **한국수자원학회논문집**, Vol. 33, No. 6, pp. 805-814.
이종인, 조용식, 이정규, 1999. "경사지형에서의 Bragg반사." **한국수자원학회논문집**, Vol. 32, No. 4, pp. 447-455.
Cho, Y.-S. and Lee, C.H., 2000. "Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topographies." *Journal of Coastal Research*,

Vol. 16, No. 3, pp. 870-876.

Dalrymple, R.A. and Kirby, J.T., 1986. "Water waves over ripples." *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 112, pp. 309-319.
Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. "Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 144, pp. 419-443.
Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M., 1992. "Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 245, pp. 301-317.
Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1983. "Propagation of obliquely incident water waves over a trench." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 133, pp. 47-63.
Liggett, J.A. and Liu, P.L.-F., 1983. *Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*, George Allen and Unwin, U.K.
Mei, C.C. and Liu, P.L.-F. 1993. "Surface waves and coastal dynamics." *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 25, pp. 215-240.
O'Hare, T.J. and Davies, A.G., 1992. "A new model for surface-wave propagation over undulating topography." *Coastal Engineering*, Vol. 18, pp. 251-266.
Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S., 1997. "Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography." *Coastal Engineering*, Vol. 32, pp. 91-117.
Zhang, L., Kim, M.H., Zhang, J. and Edge, B. L., 1999. "Hybrid model for Bragg scattering of water waves by steep multiply-sinusoidal bars." *Journal of Coastal Research*, Vol. 15, pp. 486-495.

(논문번호:01-082/접수:2001.12.17/심사완료:2002.02.7)