

〈 논 문 〉

회전축요소의 전달행렬의 이용과 진동해석

Using of Transfer Matrix for Shaft Element and Vibration Analysis

전 오 성<sup>†</sup>

Oh Sung Jun

(2001년 10월 25일 접수 : 2002년 1월 23일 심사완료)

**Key Words** : Rotating Shaft(회전축), Transfer Matrix(전달행렬), Timoshenko Beam Theory(티모센코 보 이론), Bearing Stiffness(베어링 강성), Vibration Mode(진동 모드)

ABSTRACT

Based on the analytic expression for the elasto-dynamic behavior of rotating shaft, the transfer matrix is formulated for the shaft element with uniform cross-section. Timoshenko beam theory is introduced for modeling the behavior of shaft. Complex variables representing the displacement, slope, moment and shear force are used for deriving the transfer matrix between both ends of the shaft element. Simulation result obtained by applying the transfer matrix to a general rotor model is compared with the reference result and proved to be exact. Natural frequencies and the corresponding modes are analyzed with varying the bearing stiffness. The generally used bearings are considered for discussions, and the bearing stiffness is shown to affect the vibration characteristics of rotor.

1. 서 론

회전체는 정도의 차이는 있지만 대부분 비정상성들을 가지고 있으며, 구조적으로 완전한 회전체도 진동을 발생시키는 요인들을 가지고 있다. 이들 요인들은 회전체가 회전하면서 동기 또는 비동기 진동성분을 발생시키는데, 회전체의 고유진동수와 일치하면 공진을 유발시킨다. 따라서 회전체의 고유진동 특성은 회전체 전체를 이해하는 데 반드시 필요한 정보이다.

회전체 특성 해석에 사용되는 방법은 유한요소법과 집중질량을 사용하는 전달행렬법이 보편적이다.<sup>1), 2)</sup> 이들 방법은 공학적으로 근사해를 제공하는 데 사용되는데, 이들 방법의 발전 원리를 비교하여 보면 정밀해의 도달 관점에서 볼 때 전달행렬법이 가능성이

있다. 전달행렬법은 적용된 식들을 경계조건에 맞게 연결시켜가는 과정을 단순화한 것이다. 따라서 적용된 식이 정확할수록 해의 정확성이 향상된다.

일반 회전체에 대한 정확한 고유진동수의 계산과 연속 고유모드 폭선을 구하기 위한 연구가 시도되었는데, 비틀림진동과 굽힘진동에 대한 운동방정식으로부터 경계조건을 적용하여 정확한 고유진동수와 연속 곡선의 고유모드를 구하고 해석한 연구가 발표되었다.<sup>3), 4)</sup>

굽힘진동에 대하여 Jun과 Kim<sup>5)</sup>이 발표한 연구에서는, 티모센코 보 이론을 적용하고 자이로스토프 효과 등을 고려한 운동방정식으로부터 완전해를 표현하고 경계조건을 적용하여 해를 구하였는데, 유한요소법의 해석결과와 비교하여 차이를 분석하였다. 그러나 이 연구에서 발표한 방법은 경계에서의 연속조건을 적용하는 데 있어서 디스크의 동역학적 특성을 포함시키는 방법에 제약이 발생한다.

본 논문은 Jun과 Kim<sup>5)</sup>이 사용한 운동방정식의 완전해로부터 전달행렬을 표현하여 이를 일반화시켜 사

<sup>†</sup> 책임저자, 정희원, 전주대학교 기계공학과  
E-mail : junos@jeonju.ac.kr  
Tel : (063) 220-2614, Fax : (063) 220-2750

용하기 위하여 연구한 결과이다. 유도한 방법의 검증  
을 위하여 참고문헌과 동일한 모형을 대상으로 하였  
으며, 유도한 전달행렬이 정확함을 입증하였다. 이는  
문제에서는 굵은 회전축에서의 전단효과, 회전관성,  
자이로스코프 효과, 양단에 부여된 토크, 베어링 강성  
등 일반적인 회전체가 가지는 현상들을 고려한 운동  
방정식을 사용하였지만, 전달행렬의 유도와 확인에 초  
점을 두었다. 더불어 수직인 직교 횡축 상에 동일한  
직각성 성분 크기를 갖는 베어링을 가정하여 보편적  
인 베어링 강성 범위에서 고유진동 특성의 변화를 분  
석하였다.

## 2. 운동방정식

굵은 균일 단면 회전축의 탄성거동을 표현하기 위  
하여 회전관성과 단면의 전단효과를 고려하고, 회전으  
로 인한 자이로스코프 효과를 고려하여 아래와 같이  
복소수 좌표계

$$u(x,t) = y(x,t) + jz(x,t) \quad (1)$$

를 사용하여 운동방정식을 표현하면 식 (2)가 된  
다.<sup>(5,6)</sup>

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + j \frac{T\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \\ + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A r_0^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) \\ - j2\Omega \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

이 식에서  $x$ 는 축 방향 좌표,  $y$ 와  $z$ 는 각각 수평  
방향과 수직방향의 거동을 나타낸다.  $T$ 는 축 양단에  
작용하는 토크이며,  $E$ ,  $G$  및  $\rho$ 는 Young's 계수,  
전단계수, 재료의 밀도이다.  $A$ 와  $I$ 는 축 단면의 면  
적과 면적관성모멘트,  $r_0$ 는 회전반경(radius of  
gyration),  $\kappa$ 는 일반적으로 사용되는 형상계수(form  
factor)의 역수이며,  $\Omega$ 는 회전속도이다

고유진동수  $\omega$ 의 조화운동을 변수분리하기 위하여  
다음과 같이 표현하여

$$u(x,t) = U(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (3)$$

식 (2)에 대입하면, 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + a \frac{d^3 U}{dx^3} + b \frac{d^2 U}{dx^2} + c \frac{dU}{dx} + dU = 0 \quad (4)$$

여기서 계수들은 아래와 같이 여러 인자들을 내포하  
고 있다.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{jT}{EI} \\ b &= \frac{1}{EI} \left( \frac{EI\rho}{\kappa G} + \rho A r_0^2 \right) \omega^2 - 2\rho A r_0^2 \Omega \omega \\ c &= -j \frac{1}{EI} \frac{T\rho}{\kappa G} \omega^2 \\ d &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{\rho^2 A r_0^4}{\kappa G} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 A r_0^4 \Omega}{\kappa G} \omega^3 - \rho A \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (4)는 선형미분방정식이므로 아래 형태의 해를 갖  
는다.

$$U = p_1 e^{\lambda_1 x} + p_2 e^{\lambda_2 x} + p_3 e^{\lambda_3 x} + p_4 e^{\lambda_4 x} \quad (6)$$

식 (6)은 회전축의 탄성거동이  $\lambda$ 들에 의해 결정됨을  
보여주는데, 이들은 식 (5)에서 보는 것처럼 회전속  
도  $\Omega$ , 고유진동수  $\omega$ 와 회전축의 기하학적 특성과  
재료물성에 의해 좌우된다.  $\lambda$ 들에 대한 표현은 부록  
에 자세히 소개한다. 식 (6)의 계수들  $p_1, p_2, p_3, p_4$   
은 균일 단면의 회전축 요소에 있어서 각각 정의되는  
복소수의 값들이다.

## 3. 전달행렬의 표현

### 3.1 복소 상태변수

Fig. 1과 Fig. 2는 각각  $X-Z$ 와  $X-Z$ 평면상  
에서의 상태변수들을 나타낸다. 이들을 복소수를 사용하

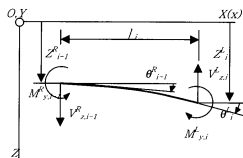


Fig. 1 State variables of  $i$ -th element in  $X-Z$  plane

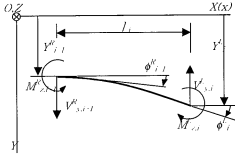


Fig. 2 State variables of  $i$ -th element in  $X-Z$  plane

여 나타내면 아래와 같이 복소 상태변수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_i &= Y_i + jZ_i \\ \alpha_i &= \phi_i + j\theta \\ M_i &= M_{i,1} + jM_{i,2} \\ V_i &= V_{i,1} + jV_{i,2} \end{aligned} \quad (7)$$

기울기, 모멘트, 전단력은 변위와 다음과 같은 관계가 갖는다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dU}{dx} \\ M &= EI \frac{d^2U}{dx^2} - jT \frac{dU}{dx} \\ V &= EI \frac{d^3U}{dx^3} - jT \frac{d^2U}{dx^2} + \rho A r_c^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx} \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.2 축요소s의 전달행렬

축요소s의 왼쪽끝( $x=0$ )에서의 상태변수는 식 (6)과 식 (8)을 사용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_0 &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 \\ \alpha_0 &= \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \lambda_3 \rho_3 + \lambda_4 \rho_4 \\ M_0 &= g_1 \rho_1 + g_2 \rho_2 + g_3 \rho_3 + g_4 \rho_4 \\ V_0 &= h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2 + h_3 \rho_3 + h_4 \rho_4 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} g_1 &= EI\lambda_1^3 - jT\lambda_1, \quad g_2 = EI\lambda_2^3 - jT\lambda_2 \\ g_3 &= EI\lambda_3^3 - jT\lambda_3, \quad g_4 = EI\lambda_4^3 - jT\lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= EI\lambda_1^4 + \rho A r_c^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega)\lambda_1 - jT\lambda_1^2 \\ h_2 &= EI\lambda_2^4 + \rho A r_c^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega)\lambda_2 - jT\lambda_2^2 \\ h_3 &= EI\lambda_3^4 + \rho A r_c^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega)\lambda_3 - jT\lambda_3^2 \\ h_4 &= EI\lambda_4^4 + \rho A r_c^2 (\omega^2 - 2\omega\Omega)\lambda_4 - jT\lambda_4^2 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)로부터 계수  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 를  $U_0, \alpha_0, M_0, V_0$ 의 함수로 표현한 후, 이들을 축 요소s의 오른쪽 끝( $x=l$ )에서의 상태변수  $U_i, \alpha_i, M_i, V_i$ 에 대입하고 정리하면 축 요소 양단 사이의 관계식을 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ \alpha_0 \\ M_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

식 (11)의 오른쪽 항에 나타나는 행렬이 축 양단 사이의 전달행렬로서, 이 행렬을 구성하는 요소는 복잡한 수식정리를 거쳐 아래와 같이 비교적 간단한 형태로 정리된다. 행렬의 요소들 계산하기 위해서는 부록에서 표현된  $g$ 들과 식 (10)에서 정의된 매개변수들을 사용하게 되는데, 이들은 축 요소s의 물성 값과 기하학적인 정보 및 회전속도와 고유진동수 등에 의존함을 알 수 있다. 여기서 유도하여 표현한 전달행렬은 참고문헌 (8)에 소개된 전달행렬과 비교하여 매우 간단한 형태를 취하고 있으며, 이는 Fig. 1과 Fig. 2에서 사용한 표현 방법으로 인하여 얻어진 결과이다.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}, \\ a_{11} &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 l} & e^{\lambda_2 l} & e^{\lambda_3 l} & e^{\lambda_4 l} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}, \\ a_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1 l} & e^{\lambda_2 l} & e^{\lambda_3 l} & e^{\lambda_4 l} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$a_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} & e^{\lambda_4 t} \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} & e^{\lambda_4 t} \end{vmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \lambda_4 e^{\lambda_4 t} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \lambda_4 e^{\lambda_4 t} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix},$$

$$a_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \lambda_4 e^{\lambda_4 t} \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \lambda_4 e^{\lambda_4 t} \end{vmatrix},$$

$$a_{31} = \begin{vmatrix} g_1 e^{\lambda_1 t} & g_2 e^{\lambda_2 t} & g_3 e^{\lambda_3 t} & g_4 e^{\lambda_4 t} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 e^{\lambda_1 t} & g_2 e^{\lambda_2 t} & g_3 e^{\lambda_3 t} & g_4 e^{\lambda_4 t} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix},$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 e^{\lambda_1 t} & g_2 e^{\lambda_2 t} & g_3 e^{\lambda_3 t} & g_4 e^{\lambda_4 t} \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1 e^{\lambda_1 t} & g_2 e^{\lambda_2 t} & g_3 e^{\lambda_3 t} & g_4 e^{\lambda_4 t} \end{vmatrix},$$

$$a_{41} = \begin{vmatrix} h_1 e^{\lambda_1 t} & h_2 e^{\lambda_2 t} & h_3 e^{\lambda_3 t} & h_4 e^{\lambda_4 t} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ h_1 e^{\lambda_1 t} & h_2 e^{\lambda_2 t} & h_3 e^{\lambda_3 t} & h_4 e^{\lambda_4 t} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix},$$

$$a_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ h_1 e^{\lambda_1 t} & h_2 e^{\lambda_2 t} & h_3 e^{\lambda_3 t} & h_4 e^{\lambda_4 t} \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix}$$

$$a_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 e^{\lambda_1 t} & h_2 e^{\lambda_2 t} & h_3 e^{\lambda_3 t} & h_4 e^{\lambda_4 t} \end{vmatrix}$$

식 (11)을 일반화하여 벡터와 행렬의 형태로 표현하면 다음과 같은데

$$\{S\}_{i+1}^L = [F]_i \{S\}_i^R \quad (12)$$

여기서 행렬  $[F]_i$ 가  $i$  번째 축요소의 전달행렬을 표시하며,  $\{S\}_i$ 는 복소수 상태벡터를, 복소수 상태벡터의 아래첨자  $i$  절점번호를 나타낸다. 또한 위첨자  $L$ 과  $R$ 은 각각 절점의 좌우측을 표시한다. 복소수 상태벡터를 자세히 표시하면 아래와 같다.

$$\{S\}_{i+1}^L = \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \\ M_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix}^L, \quad \{S\}_i^R = \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^R \quad (13)$$

## 4. 해석

### 4.1 모델링

본 연구에서 유도한 전달행렬을 적용하기 위하여 간단한 모형을 사용하고자 한다. Fig. 3에서 보는 바

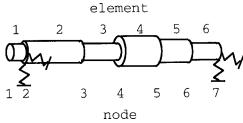


Fig. 3 Simple rotor model

와 같이 모형은 6개의 균일한 단면의 축 요소와 결점 2와 7에 2개의 탄성 베어링을 갖는다. 베어링은 등가의 직강성 성분(direct stiffness components)만을 갖는다고 가정하였다.

전달행렬을 사용하여 결점에서의 상태벡터들 사이의 관계식을 쓰면 다음과 같다.

$$\{s\}_i^L = [F_i] \{s\}_i \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ \alpha \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \alpha \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^L \quad (15)$$

$$\{s\}_2 = [F_2] \{s\}_2^R \quad (16)$$

$$\{s\}_3 = [F_3] \{s\}_3 \quad (17)$$

$$\{s\}_4 = [F_4] \{s\}_4 \quad (18)$$

$$\{s\}_5 = [F_5] \{s\}_5 \quad (19)$$

$$\{s\}_6 = [F_6] \{s\}_6 \quad (20)$$

식 (15)는 결점 2의 베어링에 대한 것이며, 상태벡터가 복소수이기 때문에 강성을  $k_2$  로 나타낸 것은  $k_Y = k_Z = k_2$ 와  $k_{YZ} = k_{ZY} = 0$ 를 의미한다. 결점 7에 대하여도 동일한 방법으로 강성을  $k_7$  ( $k_Y = k_Z = k_7$ ,  $k_{YZ} = k_{ZY} = k_0$ )로 나타내면, 전체 시스템에 대한 경계조건은 아래와 같다.

$$M_1 = V_1 = M_7 = 0, \quad V_7 = k_7 U_7 \quad (21)$$

경계조건을 적용하면 결점1과 결점7 사이에 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} U_7 \\ \alpha_7 \\ 0 \\ k_7 U_7 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} U_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

여기서 행렬  $[T]$ 는 전체에 대한 것으로 아래와 같다.

$$[T] = [F_6][F_5][F_4][F_3][F_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [F_1] \quad (23)$$

식 (22)를 변형하면 아래와 같이 4개의 미지수를 갖는 제차 연립방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & -k_7 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \alpha_1 \\ U_7 \\ \alpha_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

여기서  $t_{ij}$ 는 주어진 시스템에 대한 전체 전달행렬  $[T]$ 의  $(i, j)$ 요소를 표시한다. 식 (24)로부터 아래의 조건은 해를 갖기 위한 조건을 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{Det} &= \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & -1 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & -1 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & -k_7 & 0 \end{vmatrix} \\ &= t_{11}t_{42} - t_{41}t_{12} + k_7(t_{11}t_{32} - t_{31}t_{12}) = 0 \end{aligned}$$

이 행렬식은 회전체의 재료 및 기하학적 제한 뿐 아니라 고유진동수  $\omega$ 의 함수이다. 이 행렬식을 목적함수로 사용하여 수정 Regula-falsi 방법을 복소수 영역으로 확장 적용하여 고유진동수  $\omega$ 가 구해지면 회전축요소별 각 구간에 해당하는 식 (6)의  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 를 부류의 식을 사용하여 구하고,  $b_1, b_2, b_3, b_4$ 를 참모문헌 (5)의 방법을 사용하여 구하여, 식 (6)에 대입하여 고유 모드를 계산할 수 있다.

#### 4.2 시뮬레이션

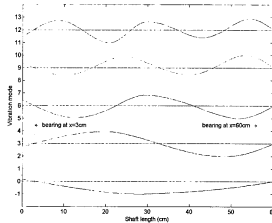
Fig. 3 모형의 계산은 Table 1에 보인 것과 같다.

Table 1 Specification of the model shown in Fig. 3

Element no.	Length(cm)	Diameter(cm)
1	3	4
2	17	5
3	10	4
4	10	6
5	10	5
6	10	4

재료의 Young's 계수  $E = 2.058 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , 뿔아송 (Poisson)비는 0.29, 재료 밀도는  $7.800 \text{ kg/m}^3$ 이다.

시뮬레이션에 사용한 Fig. 3의 모형은 참고문헌 (5)에서 사용된 것과 동일하다. 본 연구에서 유도한 전달행렬의 검증을 위하여 참고문헌과 동일한 모형을 사용하였다. 단지 참고문헌에서는 강성베어링을 사용한 경우의 해석 예를 보여줌에 비하여 본 연구에서는 강성의 크기를 변화시킴에 따른 현상을 추가로 검토하고자 하였다. 본 연구에서 유도한 전달행렬을 사용하여 고유진동을 해석한 시뮬레이션 결과에 따르면 강성이  $k_2 = k_7 = 1. \times 10^{13} \text{ N/cm}$ 인 경우에 계산한 고유진동수가 참고문헌 (5)와 동일한 결과를 주고 있고 그 값이 1차부터 4차까지 268.7 Hz, 1104.1 Hz, 2411.8 Hz, and 4200.3 Hz로 나타난다. Table 2는 이 경우의 회전수의 변화에 따른 고유진동수의 변화 특성을 티모센코 보 이론을 사용한 유효요소법에 의한 해석결과와 비교하여 보여준다. 이 표에서 사용 방법

Fig. 4 First five natural vibration modes (bearing stiffness is  $10^{13} \text{ N/m}$ )

을 나타내는 항에 'This'로 표시한 것은 본 연구에서 사용한 해석 결과를 보여준다. 본 연구의 해석은 운동방정식에서 유도한 해를 가정이나 단순화 과정을 거치지 않은 방법을 사용하기 때문에 정확한 해를 제공하며, 유효요소법에 의한 해는 이보다 높은 값을 제공하는 것을 알 수 있다.

Fig. 4는 위 경우의 5개의 고유 모드를 보여준다. 베어링 강성이 매우 크므로  $x = 3 \text{ cm}$ 와  $60 \text{ cm}$ 인 베어링의 위치에서는 변위가 없음을 나타낸다. 모드는 연속곡선으로 표현되며, 회전체의 강성에 따른 국부적인 변형을 그대로 반영하여 곡선의 형태로 보여준다. 이는 사용한 이론이 실제 거동을 나타내는 운동방정

Table 2 Natural frequency variation at each mode according to the spin speed  $\Omega$  for the multi-step shaft

Spin speed $\Omega$ (rpm)		Natural Frequencies (rpm)							
		1st mode		2nd mode		3rd mode		4th mode	
		Backward	Forward	Backward	Forward	Backward	Forward	Backward	Forward
0	This	16,120.7		66,246.1		144,707.4		252,016.8	
	FEM	16,106.4		66,497.2		148,790.2		274,316.6	
5,000	This	16,099.9	16,141.4	66,144.5	66,347.8	144,549.6	144,865.2	251,706.0	252,327.8
	FEM	16,085.6	16,127.1	66,394.3	66,600.2	148,626.6	148,954.0	273,945.1	274,688.7
10,000	This	16,079.1	16,162.3	66,043.1	66,449.6	144,392.0	144,023.1	251,395.4	252,639.1
	FEM	16,064.9	16,147.9	66,291.7	66,703.3	148,463.1	148,117.9	273,574.1	275,061.3
15,000	This	16,068.4	16,183.1	65,941.8	66,551.5	144,234.5	144,181.2	251,085.1	252,950.5
	FEM	16,044.2	16,168.7	66,189.1	66,806.6	148,299.8	148,282.1	273,203.7	275,434.4
20,000	This	16,037.7	16,203.9	65,840.6	66,653.6	144,077.1	144,339.3	250,775.0	253,262.4
	FEM	16,023.5	16,189.5	66,086.7	66,910.1	148,136.7	148,446.3	272,833.8	275,808.1

식으로부터 유도된 때문이다. 고유 모드는 베어링의 강성이 감소하면서 전체 모양에는 변화 없이 베어링 위치에서의 변위 증가만 발생한다. Fig. 5는 베어링 강성이  $10^6$  N/m일 때의 모드를 보여준다. 베어링의 강성이 매우 약하여 베어링으로 끝나는 위치(그림에서 오른쪽 끝)에서 볼 때 회전체를 충분히 잡아당기지 못하는 것을 보여준다. 그러나 이러한 현상 하에서도 베어링 위치에서의 축의 변형곡선은 단혀지는 쪽으로 향한다. 본 연구에서 사용한 모형에 대하여 분석한 결과에 따르면, 이러한 경향은 스프링 강성이  $10^7$  N/m일 때까지 유지된다. 3차 이상의 고유진동에 해당하는 모드에서는 반절점(antinode) 위치에서의 급격한 변위보다 베어링 위치에서의 변위가 오히려 더 큰 것을 관찰할 수 있다.

베어링의 강성이 이보다 적을 때는, 베어링의 강성

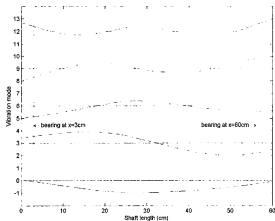


Fig. 5 First five bending modes(bearing stiffness is  $10^6$  N/m)

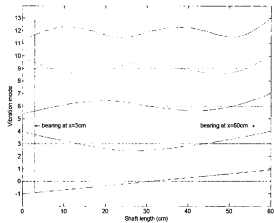


Fig. 6 First five modes(bearing stiffness is  $10^3$  N/m)

이 베어링 위치에서 구속력을 발휘하지 못하고 회전체는 양단자유 조건과 유사한 고유진동 모드로 진동을 한다. Fig. 6은 스프링 강성이  $10^3$  N/m일 때의 고유모드로서, 이미 베어링 위치에서 힘의 구속이 미미하다. Fig. 5의 4차 모드와 Fig. 6의 3차 모드는 변형곡선이 중심선과 교차하는 점의 수효는 동일하지만, 7번 절점의 베어링 위치에서의 곡선의 단혀는 현상을 발견할 수 없다.

일반적으로 사용되는 베어링의 강성은 볼베어링이 가장 커서  $10^6$  N/m내지  $10^8$  N/m정도 차수의 크기를 가지며, 저널베어링은  $10^7$  N/m, 호일 베어링(foil bearing)은  $10^6$  N/m 정도 차수의 크기를 가지는데, Table 3에서 보듯이, 통상적으로 사용되는 베어링의 강성 범위에서 회전체는 고유진동 특성의 변화가 심각하다. 표에서 회색으로 표시한 칸은 해당 진동 모드의 변형곡선이 중심선과 교차하는 점의 수가 3개인 경우를 표시하여 비교한 것이다. 스프링 강성이  $10^6$

Table 3 Natural frequency depending on bearing stiffness(non-rotating shaft)

Spring stiffness(N/m)	Natural frequency (RPM)				
1,000,000	8,685,037	36,830,691	101,549,977	183,323,190	296,786,427
10,000,000	11,106,502	24,125,897	46,095,224	109,111,261	185,367,317
100,000,000	15,374,134	54,709,823	89,746,571	141,864,941	209,302,601
1,000,000,000	16,042,707	65,036,728	139,171,504	235,641,937	317,416,532
10,000,000,000	16,112,829	66,125,252	144,200,360	250,782,862	361,531,348
100,000,000,000	16,119,874	66,233,983	144,657,127	251,896,439	363,399,841
1,000,000,000,000	16,120,579	66,244,855	144,702,353	252,004,796	363,573,711
10,000,000,000,000	16,120,650	66,245,942	144,706,871	252,015,682	363,590,977

N/m이하의 차수에서는 Fig. 6의 1차 모드와 같은 강제 모드가 존재하기 시작한다. 이 해석에서는 회전체의 회전이 없는 경우로 한정하여 해석하였다. 회전체가 회전하면 Table 2에서 보는 바와 같이 전방(forward) 및 후방(backward)으로 나누어진 고유진동수가 존재하게 된다.

본 연구에서 사용한 전달행렬은, 수치해석에 사용하는 유한요소법이나 기존의 전달행렬과 달리, 완전체를 제공하며 연속곡선으로 표현되는 고유모드를 구할 수 있어 회전체의 모멘트선도나 전단력선도를 구할 수 있어 응력분포 등을 해석하는데 유용하다.<sup>(5)</sup> 정확한 모드의 계산은 모달 밸런싱에도 활용할 수 있는 장점을 가진다. 또한 해석 대상모형의 절점을 정할 때 유한요소법 사용 시 발생하는 기하학적인 조건에 따르는 요소 길이 선정 시의 제한 등을 전혀 받지 않는다.

## 5. 결론

티모센코 이론을 적용한 균일 단면 회전체 운동방정식의 완전해로부터 전달행렬을 유도하였고, 이 전달행렬을 이용하여 일반회전체 해석에 적용하였다. 이를 이용한 고유진동 해석 결과와 기존의 연속조건을 이용하는 방법의 해석결과를 비교하여 정확히 일치함을 검증하였다.

본 연구에서 유도한 전달행렬은 티모센코 보 이론과 자이로스토프 효과, 토크 등을 고려한 운동방정식으로부터 유도하면서 수학적인 가정이나 근사화의 개념을 사용하지 않은 특징을 갖는다. 따라서 정확한 해를 제공하며, 절점을 정하고 요소의 길이를 결정할 때 유한요소법 적용 시에 발생하는 문제점들에서 자유롭다. 또한 현재에는 수직한 직교 쌍축 상에 동일한 직각성 성분 크기를 갖는 베어링 모형에 한정되어 있지만, 일반 유한요소법과 같이 디스크 요소도 포함하는 일반 회전축을 갖는 회전체의 해석에 활용할 수 있다.

이 해석방법은 정확한 고유진동해석 결과를 제공할 뿐 아니라 고유진동 모드가 연속된 곡선으로 표현되므로 모달 해석이나 굽힘모멘트 및 전단력 선도 등을 구하는 데 사용할 수 있어 회전체 응력 해석과 진단에도 활용할 수 있다.

베어링의 강성을 축 단면 상의 두 직교좌표에서 동

일 크기의 직각성분을 갖는 모형으로 가정하여 해석에 적용하였으며 베어링 강성에 따른 고유진동수와 고유모드를 분석하였다. 주어진 해석 모형에서는 동상적으로 사용되는 베어링의 강성 영역에서 고유진동 특성에 많은 변화가 발생하는 것을 알 수 있었다. 베어링의 강성을 감소시키면서 해석한 결과, 강성이 어느 정도 이하로 작아지면 강제 모드가 발생함을 알 수 있으며, 베어링 강성의 부족으로 구속력이 부족하여 발생하는 것을 모드 형상 변화의 관찰을 통하여 설명할 수 있었다.

## 후 기

본 논문은 과학기술부가 지원하는 특성연구개발사업 중 중점국가연구개발사업(기체실비요소기술개발)으로 지원되어 수행하였습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) 박종포, 2000, "회전기계의 공진회피 및 방진 설계", 한국소음진동공학회지, 제 10권 제 1호, pp. 13~17.
- (2) 이은준, 유정대, 김정렬, 2000, "부동간극 크랭크 배치각에 의한 디젤 발전소 축계의 비틀림진동 제어", 한국소음진동공학회지, 제 10권 제 4호, pp. 655~661.
- (3) 전오성, 김정대, 1995, "회전체의 비틀림 고유진동 해석," 대한기계학회논문집, 19(6), pp. 1351~1362.
- (4) Jun, O. S. and Kim, P. Y., 1994, "A Method for Torsional Critical Speed Calculation of Practical Industrial Rotors. Proceedings of the International Conference on Vibration Engineering, Beijing, pp. 759~764.
- (5) Jun, O. S. and Kim, J. O., 1999, "Free Bending Vibration of a Multi-step Rotor," Journal of Sound and Vibration, 224(4), pp. 625~642.
- (6) Lee, C. W., 1993, Vibration Analysis of Rotors, Chapter 8, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- (7) Beyer, W. H., 1979, CRC Standard Mathematical Tables, CRC Press Inc., U.S.A.



(8) Pilkey, W.D. 1994. "Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices," Chapter 17 Rotors, John Wiley and Sons.

부 록 <sup>(7)</sup>

## 〈4차 방정식의 해석해〉

선형미분방정식  $\frac{d^4U}{dx^4} + a\frac{d^3U}{dx^3} + b\frac{d^2U}{dx^2} + c\frac{dU}{dx} + dU = 0$  는  $U = \rho e^{\lambda x}$  형태의 해를 가지므로 이를 선형미분방정식에 대입하면  $\lambda$ 에 대한 4차 방정식을 아래와 같이 갖는다.

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (A.1)$$

이 식은 다시 아래의 3차 해석방정식을 갖는다.<sup>(5)</sup>

$$\mu^3 - b\mu^2 + (ac - 4d)\mu - a^2d + 4bd - c^2 = 0 \quad (A.2)$$

이 3차 방정식의 한 근을  $\mu_1$ 이라고 하고

$$R = \left(\frac{a^2}{4} - b + \mu_1\right)^{1/2} \quad (A.3)$$

라 하면, 다음의  $D$ 와  $E$ 에 대하여

( $R \neq 0$ 일 때)

$$D = \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b + \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}\right)^{1/2}$$

$$E = \left(\frac{3a^2}{4} - R^2 - 2b - \frac{4ab - 8c - a^3}{4R}\right)^{1/2}$$

( $R = 0$ 일 때)

$$D = \left(\frac{3a^2}{4} - 2b + 2(\mu_1^2 - 4d)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$E = \left(\frac{3a^2}{4} - 2b - 2(\mu_1^2 - 4d)^{1/2}\right)^{1/2}$$

4차 방정식의 네 근은 다음과 같이 해석적으로 표현된다.

$$\lambda = -\frac{a}{4} + \frac{R}{2} \pm \frac{D}{2} \quad (A.4ab)$$

$$\lambda = -\frac{a}{4} - \frac{R}{2} \pm \frac{E}{2} \quad (A.4cd)$$