

〈논 문〉

양단이 고정지지된 연속원통셸의 진동특성 해석

Vibration Analysis of the Continuous Circular Cylindrical Shell with the Clamped-clamped Supports at Two End Edges

한창환[†] · 이영신^{*}

Chang-Hwan Han and Young-Shin Lee

(2001년 5월 10일 접수 : 2001년 12월 17일 심사완료)

Key Words : Beam Function(빔함수), Receptance Method(동적응답법), Continuous Circular Cylindrical Shell(연속원통셸), Modal Expansion Method(모드확장법)

ABSTRACT

The continuous circular cylindrical shells are widely used for the high performance structures of aircraft, spacecraft, missile, nuclear fuel rod shell and so on. In this paper, a method for the vibrational analysis of the continuous circular cylindrical shells with the clamped-clamped supports at two end edges is developed by using the modal expansion method. Forces and/or moments acting on the shell surface are expressed in terms of the Dirac Delta Function. Frequency equation of the continuous shell is also derived by the application of the equilibrium of forces and the continuity of displacements at the boundary. Natural frequencies of the continuous shell are calculated numerically with mathematica 3.0 and they are compared with FEM results from the ANSYS 5.3 to improve the reliability of analytic solutions. Mode shapes obtained by the FEM are presented in this paper.

1. 서론

연속원통셸 구조물은 항공기, 우주비행체, 원자로, 미사일 또는 잠수함 등의 첨단산업분야에서 많이 찾아볼 수 있으며, 다른 구조물에 비해 비강도가 높아 큰 하중을 받는 구조물에 사용된다. 또한 공장 또는 산업설비에 설치된 대형 송유관, 가스관, 핵연료봉 또는 여러 배관 등은 대부분 다점 지지를 갖는 연속원통셸 형태들이다. 이러한 구조물은 지진, 동력장차, 바람 또는 충격 등의 진동원에 노출되어 있어 설계할 때 동특성에 대한 고찰이 요구된다.

따라서 본 연구에서는 양단이 고정된 연속원통셸에 대한 동특성을 이론적인 방법과 FEM 해석을 병행하여 고찰하고자 한다. 연속원통셸을 중간 지지점에서 길이방향으로 연속적인 결합 구조물로 정의하고, 지지점에서의 힘의 평형과 변위의 연속조건을 적용하여 진동수 방정식(frequency equation)을 유도하였다. 이러한 조건을 적용하여 결합구조물을 해석한 연구내용⁽¹⁻⁸⁾은 문헌상에서 많이 찾아 볼 수 있다. 본 연구에서는 연속원통셸을 구성하는 부분계의 진동특성을 동적응답법(receptance method)을 적용하여 유도하였으며, 이때 각 부분계의 양단에서의 변위 또는 모멘트를 모드확장법(modal expansion method), 모드기여계수(modal participation factor) 및 Dirac delta 함수로 나타냈다. 이 모드확장법은 진동수 방정식의 유도과정에서 힘의 평형을 통해 자유진동을 해석하는 특징을 가진다. 본 논문에서 연속원통셸의 진동해석을 위해서 고정-단순지지 된 원통셸의 동특성이 요구되기 때문

[†] 책임저자, 정회원, 한국항공우주연구원 소행기연구그룹
E-mail : hanch@kari.re.kr

Tel : (042) 860-2513, Fax : (042) 860-2009

^{*} 정회원, 충남대학교 기계설계공학과

에 이에 대한 특성방정식을 에너지법(energy method) 및 Rayleigh-Ritz 법을 이용해 유도하였다. 본 연구에서 Mathematica 3.0 프로그램 및 ANSYS 5.3을 이용해 해를 구하고, 그들의 결과를 상호 비교·검토하였다.

동적응답법은 판이나 셸의 결합구조물에 주로 적용된 기법이나 본 연구에서 보는 바와 같이 다짐 지지를 갖는 연속원통형 구조물을 결합구조물로 가정하고, 본 기법을 적용하여 공학적으로 신뢰할 수 있는 진동수 방정식을 유도하였다.

2. 진동수방정식의 정식화

2.1 고정-단순지지 원통셸의 진동수 방정식

양단이 고정된 연속원통셸의 고유진동수를 해석하기 위해서는 고정-단순지지 원통셸의 진동수 방정식을 유도하여야 한다. Fig. 1은 셸(shell) 곡면을 일반 좌표계⁽⁹⁾ a_1, a_2, a_3 로 나타내고 있다. 본 연구에서는 이들 좌표계를 이용하여 Blevins⁽¹⁰⁾의 범함수, 에너지법 및 Rayleigh-Ritz 법이 적용된 진동수 방정식을 유도하고자 한다. 원통셸이 단성변형을 할 때 물체 내에 저장되는 최대 변형 에너지 U_{max} 는 식 (1)과 같다.⁽⁹⁾

$$U_{max} = \int_{a_1} \int_{a_2} \int_{a_3} F dV \quad (1)$$

여기서 F 는

$$F = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z}) \quad (2)$$

이 되고, $dV = A_1 A_2 da_1 da_2 da_3$ 이다. 원통셸의 경우 $a_1 = x, a_2 = \theta, a_3 = z, A_1 = 1, A_2 = a$ 의 관계가 성립된다. 원통셸의 두께가 얇다고 가정하면 중립면에 작용하는 응력상태를 평면응력의 상태로 가정할 수 있고, 이때 $\sigma_x = \epsilon_{xx} = \epsilon_{\theta\theta} = 0$ 이 된다. σ, ϵ 은 각각 응력 및 변형률을 나타내며, 이들의 응력-변형률 관계식은 식 (3)과 같다.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \quad (3a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \quad (3b)$$

$$\epsilon_{x\theta} = G \gamma_{x\theta} \quad (3c)$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단탄성계수, ν 는 포아송비값 나타낸다. 식 (3)을 식 (1)에 대입하면 전단변형률 γ 의 항을 포함하는 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$U_{max} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V (\epsilon_x^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_\theta + \epsilon_\theta^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{x\theta}^2) dV \quad (4)$$

여기서 원통좌표계 x, θ, z 방향의 변위를 각각 u, v, w 라고 하고, Sanders의 셸이론을 이용하여 변형률-변위식을 식 (5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w - \frac{z}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (5b)$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \left[\frac{1}{4a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{3}{4a} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right] \quad (5c)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 셸의 두께에 걸쳐 적분하면 식 (6)과 같이 변위항으로 표현된 원통셸의 변형에너지식을 얻을 수 있다.

$$U_{max} = \rho \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{2z}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{(1-\nu)}{8a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] d\theta dx + \rho g \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{(1-\nu)}{32a^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - 3a \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 8a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - 3a \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 16a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right] \right] d\theta dx \quad (6)$$

여기서

$$b = \frac{Eah}{2(1-\nu^2)} \quad (7)$$

$$q = \frac{h^2}{12a^2} \quad (8)$$

이 된다. 원통셸의 최대운동에너지 T_{max} 는 각 방향의 속도 성분을 갖는 식 (9)과 같이 표현된다.⁽⁹⁾

$$T_{max} = \frac{\rho h}{2} \int_{a_1} \int_{a_2} \int_{a_3} [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2)] a da_1 da_2 \quad (9)$$

식 (9)에서 (\cdot) 는 t 에 대한 1차 미분이고 ρ 는 단위면적당 밀도이다. β_1, β_2 는 Fig. 1에서 보는 바와

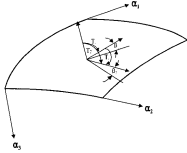


Fig. 1 Curvilinear surface coordinates and moments, angles on the neutral surface of the shell

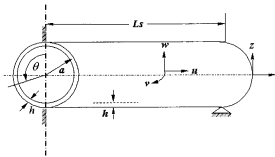


Fig. 2 Geometry and coordinates of the C-S circular cylindrical shell at end edges

같이 α_1, α_2 방향의 각변위를 나타낸다.

Fig. 2와 같이 고정-단순지지 원통셴의 진동수 방정식은 고정-고정지지 연속원통셴의 진동특성을 해석하기 위한 진동수 방정식의 유도에 필요하다. 여기서 원통셴의 최대 변형에너지 및 최대 운동에너지는 식 (6)과 식 (9)를 이용해 구할 수 있다. 고정-단순지지 원통셴의 변위는 Blevins의 범함수 $\Phi(x)$ 를 사용하여 식 (10)과 같이 가정된다.

$$u(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_s \Phi(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (10a)$$

$$v(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} B_s \Phi(x) \sin n\theta \cos \omega t \quad (10b)$$

$$w(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_s \Phi(x) \cos n\theta \cos \omega t \quad (10c)$$

여기서 $\Phi(x)$ 는 식 (11)의 경계조건을 만족하는 범함수이다. 고정-단순지지 경계조건은 식 (11)과 같다.

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (11a)$$

$$u = v = M_x = N_x = 0 \quad \text{at } x = L_s \quad (11b)$$

여기서 M_x 는 모멘트, N_x 는 축방향의 합응력이다. 식 (11)의 경계조건을 만족하는 범함수 및 그의 x 에 관한 1차 미분은 식 (12)와 같이 나타낸다.

$$\Phi(x) = \cosh \lambda x - \cos \lambda x - \sigma_s (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \quad (12a)$$

$$\Phi'(x) = \sinh \lambda x + \sin \lambda x - \sigma_s (\cosh \lambda x - \cos \lambda x) \quad (12b)$$

여기서 σ_s 와 λ_s 는 식 (13)과 식 (14)로부터 수치적으로 구할 수 있다.

$$\sigma_s = \frac{\cosh \lambda_s L - \cos \lambda_s L}{\sinh \lambda_s L - \sin \lambda_s L} \quad (13)$$

$$\tanh \lambda_s L - \tan \lambda_s L = 0 \quad (14)$$

식 (10)과 식 (12)를 식 (6)과 식 (9)에 대입하고 임의 상수 A_s, B_s, C_s 에 관한 Rayleigh-Ritz법을 적용하면, 이들 미지의 상수를 갖는 3개의 제차식을 얻을 수 있다. 이들 제차식을 진동수 매개변수 Λ 를 포함하는 행렬식으로 쓰면 식 (15)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} (t_{11} - \Lambda I_1) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & (t_{22} - \Lambda I_2) & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & (t_{33} - \Lambda I_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ B_s \\ C_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서 진동수 파라미터 Λ 는 식 (20)과 같다.

$$\Lambda = \frac{a^3 h \omega^2}{2p} \quad (16)$$

또한 각 행렬원소들 식 (17)~(26)과 같이 범함수의 적분항으로 표현할 수 있다.

$$t_{11} = \frac{(1-\nu)}{8} n^2 \left(1 + \frac{1}{4} q\right) \int_0^{L_s} \Phi \Phi' dx + a^2 \lambda^2 \int_0^{L_s} \Phi \Phi'' dx \quad (17)$$

$$t_{12} = t_{21} = \frac{1-\nu}{8} a n \lambda \left(\frac{3}{4} q - 1\right) \int_0^{L_s} \Phi \Phi' dx + a n \nu \lambda \int_0^{L_s} \Phi \Phi'' dx \quad (18)$$

$$t_{13} = t_{31} = \frac{(1-\nu)}{8} a n^2 q \int_0^{L_s} \Phi \Phi' dx + a \lambda \nu \int_0^{L_s} \Phi \Phi'' dx \quad (19)$$

$$t_{22} = n^2 (1+q) \int_0^{L_s} \Phi \Phi dx + \frac{(1-\nu)}{8} a^2 \lambda^2$$

$$\begin{aligned}
 & (1 + \frac{1}{q}) \int_0^L \Phi' \Phi' dx \quad (20) \\
 t_{22} = t_{22} = n^2(1 + nq) \int_0^L \Phi \Phi dx + \frac{3}{8} a^2 n(1 - \nu) \lambda, q \\
 & \int_0^L \Phi' \Phi' dx - a^2 n \nu \lambda^2 \int_0^L \Phi' \Phi' dx \quad (21) \\
 t_{33} = (1 + n^4 q) \int_0^L \Phi \Phi dx + \frac{(1 - \nu)}{2} a^2 n^2 q \int_0^L \Phi' \Phi' dx \\
 & - 2a^2 n^2 \nu \lambda^2 q \int_0^L \Phi \Phi' dx + a^4 \lambda^4 \int_0^L \Phi' \Phi' dx \quad (22)
 \end{aligned}$$

식 (15)는 유효해를 갖기 위해 $\{A_c, B_c, C_c\}^T \neq 0$ 일 때 행렬식이 0이 되어야 한다. 따라서 진동수방정식은 식 (23)과 같이 된다.

$$\begin{vmatrix}
 (t_{11} - \Lambda I_2) & t_{12} & t_{13} \\
 t_{21} & (t_{22} - \Lambda I_1) & t_{23} \\
 t_{31} & t_{32} & (t_{33} - \Lambda I_1)
 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

여기서 I_1, I_2 는 범함수의 적분형태이다. 모드성분은 다음과 같이 모드 성분비로 나타낼 수 있다.

$$U(x, \theta, t) = \left(\frac{A_c}{C_c}\right) \Phi' \cos n\theta \cos \omega t \quad (24a)$$

$$V(x, \theta, t) = \left(\frac{B_c}{C_c}\right) \Phi \sin n\theta \cos \omega t \quad (24b)$$

$$W(x, \theta, t) = \Phi \cos n\theta \cos \omega t \quad (24c)$$

2.2 동적응답의 일반식

동적응답법은 조화하중(조화 모멘트)에 대한 변위 응답(기울기)의 비로 정의되며 다음과 같이 표현할 수 있다.^(12, 13)

$$a_{\theta} = \frac{\text{위치 } x \text{에서 시스템 A의 변위(기울기)}}{\text{위치 } x \text{에서 시스템 B의 조화하중(모멘트)}}$$

여기서 a_{θ} 는 시스템 A의 동적응답이다. Fig. 3은 2개의 시스템 A와 B가 결합된 5개의 변위(기울기)와 힘(모멘트)을 도시하고 있다. 여기서 $\{X_{Ai}\}$ 는 시스템 A, $\{X_{Bi}\}$ 는 시스템 B의 변위벡터이고, $\{F_{Ai}\}$ 는 시스템 A, $\{F_{Bi}\}$ 는 시스템 B에 작용하는 힘벡터이므로 시스템 A, B의 변위는 식 (25)와 같이 힘 및 동적응답의 향으로 나타낼 수 있다.

$$\{X_{Ai}\} = [a_{\theta}]^T \{F_{Ai}\} \quad (25a)$$

$$\{X_{Bi}\} = [\beta_{\theta}]^T \{F_{Bi}\} \quad (25b)$$

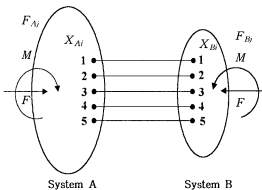


Fig. 3 Displacements(slope) and forces(moments) for 2 systems joined by 5 coordinates

여기서 $a_{\theta}, \beta_{\theta}$ 는 시스템 A, B의 동적응답이고, i 는 결합부의 변위/기울기, j 는 조화하중/모멘트의 작용 위치를 나타낸다. 연속부에 외력이 작용하지 않고 변위가 연속이라고 가정하면 힘과 변위를 식 (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F_{Ai}\} = -\{F_{Bi}\} \quad (26a)$$

$$\{X_{Ai}\} = \{X_{Bi}\} \quad (26b)$$

따라서 식 (25)와 식 (26)으로부터 식 (27)을 얻을 수 있다.

$$[\alpha_{\theta} + \beta_{\theta}] \{F_{Ai}\} = 0 \quad (27)$$

여기서 $\{F_{Ai}\} \neq 0$ 이므로 무용해를 갖지 않기 위해서는 계수행렬식이 0이어야 한다. 따라서 결합구조물의 진동수 방정식은 식 (28)과 같이 된다.

$$|\alpha_{\theta} + \beta_{\theta}| = 0 \quad (28)$$

2.3 양단 고정-고정 연속원통형의 진동수 방정식

Fig. 4는 전체길이가 L 이며 N 개의 스패(span)를 갖는 연속원통형의 기하학적 형상과 좌표계 x, θ, z 를 보여 주고 있다. 여기서 L_1, L_2, \dots, L_N 은 각 부분계 A, B, C, ..., Z의 스패길이, h 는 두께, a 는 평균반경, u, v, w 는 x, θ, z 방향의 변위를 나타낸다. Fig. 5는 축방향으로 N 개의 스패를 갖는 연속원통형의 연속부에 작용하는 힘과 변위를 나타내고 있다. 여기서 $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi$ 는 연속원통형의 각 부분계인 A, B, C, ..., Z의 동적응답이다. 여기서

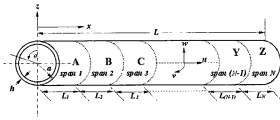


Fig. 4 Geometry and coordinate system of a continuous circular cylindrical shell with N spans

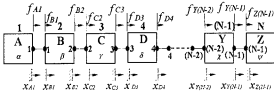


Fig. 5 Schematic diagram of a continuous circular cylindrical shell with N spans

$f_{A1}, f_{B1}, f_{C1}, \dots, f_{Y(N-2)}, f_{Z(N-1)}$ 들은 부분계에 작용하는 힘, $x_{A1}, x_{B1}, x_{C1}, \dots, x_{Y(N-2)}, x_{Z(N-1)}$ 들은 부분계의 변위를 나타낸다. 부분계와 부분계의 사이에 작용하는 힘은 힘의 평형조건으로부터 식 (29)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{A1} &= f_{B1} \\ f_{B1} &= f_{C1} \\ f_{C1} &= f_{D1} \\ &\vdots \\ f_{Y(N-1)} &= f_{Z(N-1)} \end{aligned} \quad (29)$$

그리고 변위의 연속조건으로부터 각 부분계의 연속부에서 변위는 식 (30)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{A1} &= x_{B1} \\ x_{B1} &= x_{C1} \\ x_{C1} &= x_{D1} \\ &\vdots \\ x_{Y(N-1)} &= x_{Z(N-1)} \end{aligned} \quad (30)$$

따라서 조화응답(harmonic response)은 동적응답의 형을 이용하여 식 (31)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{A1} &= \alpha_{11} F_{A1} \\ X_{B1} &= \beta_{11} F_{B1} + \beta_{12} F_{B2} \\ X_{C1} &= \gamma_{21} F_{C1} + \gamma_{22} F_{C2} \\ &\vdots \\ X_{Y(N-2)} &= \xi_{(N-1)(N-1)} F_{Y(N-2)} + \xi_{(N-1)} F_{Y(N-1)} \\ X_{Z(N-1)} &= \psi_{(N-1)} F_{Z(N-1)} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $F_{A1}, F_{B1}, F_{B2}, F_{C1}, \dots, F_{Y(N-2)}, F_{Y(N-1)}, F_{Z(N-1)}$ 는 조화 모멘트의 크기이고, $X_{A1}, X_{B1}, X_{B2}, X_{C1}, \dots, X_{Y(N-2)}, X_{Y(N-1)}, X_{Z(N-1)}$ 는 조화응답의

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{22} + \gamma_{22} & -\gamma_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & \gamma_{33} + \delta_{33} & -\delta_{34} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{43} & \delta_{44} + \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -X_{(N-2)(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -X_{(N-1)(N-2)} & X_{(N-1)(N-1)} + \psi_{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{A1} \\ F_{B1} \\ F_{C1} \\ F_{D1} \\ \dots \\ F_{Y(N-2)} \\ F_{Y(N-1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & -\beta_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\beta_{21} & \beta_{22} + \gamma_{22} & -\gamma_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & \gamma_{33} + \delta_{33} & -\delta_{34} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{43} & \delta_{44} + \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -X_{(N-2)(N-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -X_{(N-1)(N-2)} & X_{(N-1)(N-1)} + \psi_{(N-1)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

크기이다. 따라서 식 (29), (30) 및 (31)로부터 식 (32)를 얻을 수 있다.

여기서 식 (32)가 유용해를 갖기 위해 계수 행렬식이 0이어야한다. 따라서 연속원통셸의 진동수 방정식은 식 (33)과 같이 각 부분계의 동적응답 항으로 표현된다.

2.4 동적응답

구조물은 무한개의 고유모드를 가지고 진동하는데, 이때 각 모드들이 진동에 기여하는 정도를 모드기여계수로 정의하며 식 (34)와 같이 쓸 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\ddot{\eta}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k^* e^{i\omega t} \quad (34)$$

이 식은 수학적으로 직교벡터(고유모드)의 성질을 이용하여 정식화된다. 여기서 η_k 는 모드기여계수이다. ξ_k 는 모드감쇠계수(modal damping factor)이며 식 (35)와 같다.

$$\xi_k = \frac{\lambda}{2\rho h \omega_k} \quad (35)$$

λ 는 점성감쇠계수(viscous damping factor)를 나타내고, ρh 는 단위면적당의 질량밀도(mass density), ω_k 는 k 번째 모드의 고유진동수를 나타낸다. Fig. 6은 원통셸의 결합위치 $x_1^* = L_s$, $x_2^* = 0$ 에 작용하는 축방향의 모멘트 m_1^* , m_2^* 그리고 횡변위 u_3^* 및 기울기 θ_3^* 를 보여 주고 있다. 모멘트 m_1^* , m_2^* 는 원주방향으로 분포된 선 모멘트(line moment)로 정의된다. 이들 선 모멘트를 Dirac delta함수를 이용하여 식 (36) 및 식 (37)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} m_1^*(a_1, a_2, t) &= M_1^*(a_1, a_2) \delta(x - x_1^*) e^{i\omega t} \\ &= M_{01}^* \cos(\beta \theta) \delta(x - x_1^*) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} m_2^*(a_1, a_2, t) &= M_2^*(a_1, a_2) \delta(x) e^{i\omega t} \\ &= M_{02}^* \cos(\beta \theta) \delta(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (37)$$

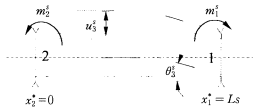


Fig. 6 Moment, displacements, slopes of a simply supported circular cylindrical shell

여기서 M_{01} , M_{02} 는 단위길이당 모멘트이고 ρh 는 정수이다.

원통셸에 모멘트만 작용할 때 단위면적당의 하중은 $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ 이 된다. T_1 , T_2 , T_u 는 단위면적당 모멘트로서 Fig. 1에서 보는 바와 같이 각각 a_1 , a_2 및 수직방향의 분포 모멘트이다. U_{ik} 는 각 방향의 모드의 크기이다. 따라서 F_k^* 는 식 (38)과 같다.

$$\begin{aligned} F_k^* &= \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} \left[\frac{U_{1k}}{2A_2} \frac{\partial T_u}{\partial a_2} - \frac{U_{2k}}{2A_1} \frac{\partial T_u}{\partial a_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{U_{3k}}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(T_1 A_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial(T_2 A_2)}{\partial a_2} \right) \right] A_1 A_2 da_1 da_2 \end{aligned} \quad (38)$$

여기서

$$N_k = \int_{a_1} \int_{a_2} \left[\sum_{i=1}^3 U_{ik}^2 \right] a da_1 da_2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (39)$$

이다. 모드화장법에서 횡변위를 식 (40)과 같이 modal 변위의 합으로 표현할 수 있다.

$$u_i(a_1, a_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(a_1, a_2) e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

여기서 정상상태(steady state)에서 응답이 조화적이라 할 때 modal값을 무시하면 모드기여계수 $\eta_k(t)$ 는 식 (41)과 같이 된다.

$$\eta_k(t) = \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (41)$$

따라서 횡변위는 식 (42)와 같이 모드의 합으로 표현된다.

$$u_3^*(a_1, a_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} U_{ik}(a_1, a_2) e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

여기서 ω_k 는 k 번째 모드에 대한 원통셸의 고유진동수이고, ω 는 구하고자 하는 연속원통셸의 고유진동수이다. 원통셸의 횡변위를 구하기 위해 우선 F_k^* 를 구하면 식 (43)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} F_k^* |_{M_1} &= -\frac{2M_{01} m}{L_s^2} \\ &\quad \left[\cos\left(\frac{m\beta x}{L_s}\right)_{x=L_s} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \beta \theta d\theta \right] \\ &\quad \left[\frac{\rho h L [(A_{ik}/C_{ik})^2 + (B_{ik}/C_{ik})^2 + 1]}{2} \right] \end{aligned} \quad (43a)$$

$$F_k^*|_M = -\frac{2M_{0k}m}{L_s^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right)_{x=x_1} \right] \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos p\theta d\theta / \rho h [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1] \quad (43b)$$

i 는 1, 2이고, k 는 원통셸의 모드(m, n)를 나타낸다. $F_k^*|_M$ 및 $F_k^*|_M$ 는 직교성으로 인해 $n \neq p$ 일 때 0 이 되므로 $n = p$ 일 때 식 (44)와 같이 쓸 수 있다.

$$F_k^*|_M = -\frac{2\pi M_{0i}}{L_s^2} \frac{m \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right)_{x=x_1}}{\rho h [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]}, \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

여기서 $F_k^*|_M$ 는 $x_1^* = L_s$, $F_k^*|_M$ 는 $x_2^* = 0$ 에서 값이다. 따라서 평변위는 식 (45), (46) 및 식 (47)과 같이 쓸 수 있다.

$$u_3^*(x, \theta, t) = u_3^*(x, \theta, t)|_M - u_3^*(x, \theta, t)|_M \quad (45)$$

$$u_3^*(x, \theta, t)|_M = -\frac{2M_{01}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m\pi \cos(m\pi) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (46)$$

$$u_3^*(x, \theta, t)|_M = -\frac{2M_{02}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi m \cos^2(m\pi) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (47)$$

굽힘모멘트에 의한 기울기는 식 (47)을 x 에 편하여 미분하여 구할 수 있으며, 식 (48), (49)와 같이 쓸 수 있다.

$$\theta_3^*(x, \theta, t)|_M = -\frac{2M_{01}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2 \cos(m\pi) \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (48)$$

$$\theta_3^*(x, \theta, t)|_M = -\frac{2M_{02}}{\rho h L_s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos^2(m\pi) \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \cos(n\theta) e^{i\omega t}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (49)$$

일반적으로 시스템 A의 동적응답 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ 는 식 (50)과 같이 되며,

$$\alpha_{11} = \frac{\theta_3^*(x_1^*, \theta, t)|_M}{M_1^*(x, \theta, t)} \quad (50a)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\theta_3^*(x_1^*, \theta, t)|_M}{M_2^*(x, \theta, t)} \quad (50b)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\theta_3^*(x_2^*, \theta, t)|_M}{M_1^*(x, \theta, t)} \quad (50c)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\theta_3^*(x_2^*, \theta, t)|_M}{M_2^*(x, \theta, t)} \quad (50d)$$

따라서 동적응답은 식 (51)과 같이 된다.

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -\frac{2}{\rho h L_s^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos^2(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (51a)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{2}{\rho h L_s^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^2 m^2 \cos(m\pi)}{(\omega_{mp}^2 - \omega^2) [(A_k/C_k)^2 + (B_k/C_k)^2 + 1]} \quad (51b)$$

따라서 연속원통셸이 갖는 각 시스템의 동적응답도 같은 방법으로 구할 수 있다.

3. 유한요소 해석

유한요소해석(FEA)은 본 연구에서 수행한 이론해석의 결과에 대한 신뢰성을 확인하는 차원에서 수행되었다. 고유진동수 및 모드형상은 ANSYS 5.3 상용 프로그램을 이용해 구하였다. Fig. 7은 생성된 FE 모델링을 보여 주고 있으며, 여기서 요소는 4 절점 Shell 63 등방성 탄성셸이 사용되었고, 요소의 수는

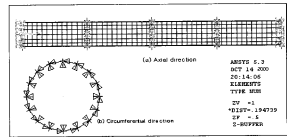


Fig. 7 FE Modeling of the continuous cylindrical shell with 4 equal spans

길이방향으로 51개 원주방향으로 16개이며, 총 메쉬(mesh)의 수는 816개, 절점(node) 수는 831개이다. FEM 모델링시 고정단은 UX, UY, UZ의 방향 및 RX, RY, RZ 방향의 회전을 구속하고 단순지지는 UX, UY의 방향을 구속하고 UZ방향의 변위 및 RX, RY, RZ 방향의 회전을 허용하는 방법으로 구현하였다.

4. 결과 및 고찰

본 연구는 고정-고정지지 연속원통셸의 진동특성을 해석하기 위해 이론식을 정식화하고, 이론해석의 결과의 타당성을 검증하기 위한 차원에서 유한요소 해석을 동시에 수행하였다. 이론해는 식 (33)으로부터 Mathematica 프로그램을 이용하여 수치적으로 구하였다. Fig. 8은 고정-단순지지 원통셸의 길이변화에 대한 고유진동수의 변화를 길이방향의 반파수 $m=1$ 일 때 원주방향의 파수 n 에 대하여 보여 주고 있다. 여기서 각 case는 두께(h)가 0.001 m, 반경(a)이 0.05 m로 동일하고, 길이(L_s)는 각각 case I = 0.15 m, case II = 0.20 m, case III = 0.25 m, case IV = 0.30 m, case V = 0.40 m, case VI = 0.50 m 그리고 case VII = 10 m인 원통셸로 구성되었다. 이 그래프는 양단 고정-고정 연속원통셸의 구속특성을 결정하는 고정-단순지지된 원통셸에 대해 진동특성의 변화를 알아보기 위해 도시된 것이다. 여기서 진동수가 원주방향의 파수 n 이 증가함에 따라 처음에는 최저진동수보다 상당히 높은 값에서 점차 감소하면서 최저진동수에 이르고 다시 증가하는 경향을 보이고 있다.⁽¹¹⁾

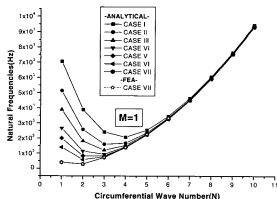


Fig. 8 Variations of natural Frequencies(Hz) of with lengths from analytical and FEA, $m=1$

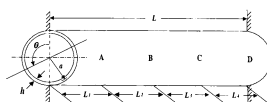


Fig. 9 Analytic model of the clamped-clamped continuous circular cylindrical shell with 4 equal spans

Fig. 8은 case VII이 가장 낮은 값을 갖고, case I이 가장 높은 값을 보이고 있다. 여기서 역시 길이가 짧아질수록 기본 진동수가 증가하며 우측으로 이동하는 경향을 보이고 있다. FEM 해석의 결과는 이론해의 검증차원에서 case VII에 대해서만 제시되었으며 Fig. 8에서 보는 바와 같이 잘 일치하고 있다.

양단이 고정-고정지지된 연속원통셸의 진동특성을 알아보기 위해 길이(L)가 1.0 m이고 반경(a)이 0.05 그리고 두께(h)가 0.001 m인 해석모델을 해석하였다. 해석모델은 Fig. 9와 같이 4개의 동일스팬을 갖는 연속원통셸의 형상을 보여주고 있다.

여기서 A, B, C 및 D는 연속원통셸의 각 부분계이고, α , β , γ 및 δ 는 각 부분계의 동적응답이다.

Table 1은 이론해 및 FEA 결과를 오름차순으로 9차까지 나타내고 있다. 이론해 및 FEA 결과에 대한 오차는 2차 모드에서 최대 10.8 %이고 최소 오차는 1차 모드에서 0.1 %를 보여주고 있다. 기본진동수는 이론해의 경우 1042.6 Hz이고 FEA 결과의 경우

Table 1 Natural frequencies(Hz) of the clamped-clamped continuous cylindrical shell with 4 equal spans from analytic and FEA results

No.	Analytical result	FEA result		Error
	Freq(Hz)	Freq(Hz)	Mode(m, n)	
1st	1042.6	1041.6	(1, 3)	0.1%
2nd	1080.5	1190.1	(1, 3)	10.1%
3th	1372.3	1361.1	(1, 3)	7.4%
4th	1458.6	1445.8	(1, 3)	8.8%
5th	1529.6	1538.5	(1, 4)	0.6%
6th	1597.1	1599.8	(1, 4)	0.2%
7th	1757.4	1714.0	(1, 2)	2.5%
8th	2047.4	2014.5	(1, 2)	1.6%
9th	2163.6	2145.4	(1, 2)	0.8%

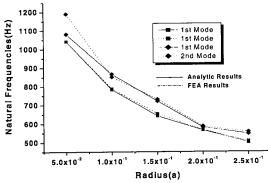


Fig. 10 Variation of natural frequencies(Hz) of the clamped-clamped continuous circular cylindrical shell with radius(a)

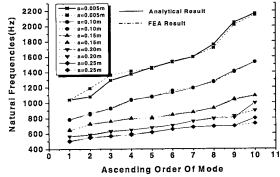
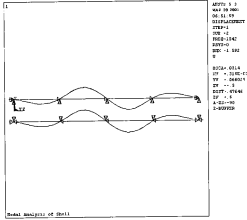
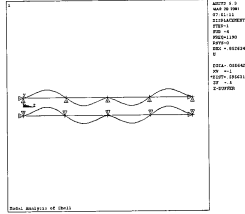


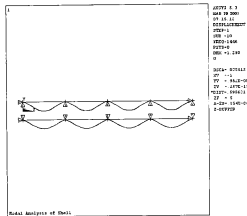
Fig. 11 Comparison of natural frequencies(Hz) with radius(a) for the clamped-clamped continuous circular cylindrical shell from analytic and FEA results



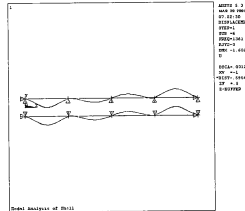
(a) $f_n = 1042$ Hz, $m = 1$



(b) $f_n = 1190$ Hz, $m = 1$



(c) $f_n = 1361$ Hz, $m = 1$



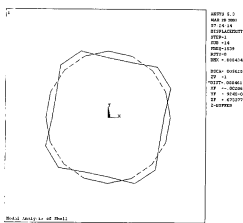
(d) $f_n = 1446$ Hz, $m = 1$

Fig. 12 Mode shapes of the clamped-clamped continuous circular cylindrical shell with 4 equal spans, $m=1$ (continued)

1041.6 Hz로 나타났다. Fig. 10은 1차 및 2차 모드에 대한 반경별 고유진동수를 도식하여 변화의 추이를 나타낸 것이다. 반경이 0.005 m인 경우 1000 Hz이상에서, 반경이 0.25 m인 경우 500 Hz에 접근하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 11은 기하학적 형상의 변화에 따른 진동수의 변화를 관찰하기 위하여 반경을 0.005 m, 0.01 m, 0.15 m, 0.20 m 및 0.25 m로 구분하여 이론해를 구하여 그래프로 나타낸 것이다. 으뜸차순별로 각 반경에 대한 이론해 및 FEA 결과를 그래프로 나타냈다.

고유진동수에 대한 모드형상을 찾기 위해 ANSYS 5.3 프로그램을 사용하였다. FE 모델링에서 원주방향으로 0°와 180°에 위치한 절점(nodal point)을 선



(c) $f_n = 1599$ Hz, $n = 4$

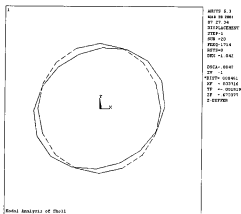
Fig. 13 Mode shapes of the clamped-clamped continuous circular cylindrical shell with 4 equal spans, $n = 2, 3, 4$ (continued)

택하여 길이방향의 모드형상을 표현하고 원주방향으로 16개의 절점을 선택하여 모드형상을 나타냈다.

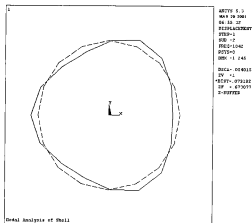
Fig. 12는 길이방향의 반파수 m (axial direction half-wave number)에 대한 모드형상으로 모드 $m = 1$ 일 때 연속원통셸이 갖는 대표적인 비대칭 모드형상 4가지를 제시하고 있다. (b), (c) 및 (d)의 형상은 다점지지를 갖지 않은 원통셸 구조물에서는 나타나지 않는 모드형상들이다. 여기서 (a)는 기본진동수에서 나타나는 굽힘 모드형상을 나타낸다. 스펙트에 따라 진폭의 크기가 다르게 나타나는 것이 하나의 특징이다. Fig. 12는 저차에서 지배적인 비대칭적인 진동형태를 제시하고 있으며, 대칭모드는 본 논문에 제시되지 않았다. 또한 Fig. 13은 FEM 해석을 통해 구한 원주방향의 파수 n (circumferential direction wave number)에 대한 모드형상으로 원통셸과 유사하며, 본 연구에서는 저차 진동수에서 나타나는 $n = 2, 3$ 및 4일 때의 모드형상을 제시하였다. 여기서 Fig. 13(b)는 기본 진동수의 모드형상이다.

5. 결 론

양단이 고정-고정지워진 연속원통셸에 대한 진동특성을 해석하기 위하여 고정-단순지지 원통셸의 진동수 방정식을 유도하고, 각 부분계의 경계에서 힘의 평형과 변위의 연속조건을 이용하여 다점지워진 연속원



(a) $f_n = 1714$ Hz, $n = 2$



(b) $f_n = 1042$ Hz, $n = 3$

동셸의 진동수 방정식을 유도하였다. 또한 유한요소 해석은 ANSYS 5.3을 이용하여 모델을 생성하고 고유진동수 및 모드형상을 구하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 고정-단순지지 원통셸의 수치해결 길이변화가 변화할 때 원주방향의 파수에 따른 진동수의 변화를 고찰한 결과 FEA 결과와 잘 일치하고 있다.

(2) 고정-고정지지 연속원통셸의 수치해결 결과와 FEA 결과와 비교 분석한 결과, 최대 10%의 오차를 보이고 있어 공학적인 응용성이 있다고 판단된다.

(3) 연속원통셸의 기본 진동수는 스캔의 간격에 의해 매우 의존적이며, 모드 $(m, n) = (1, 3)$ 으로 거동하고 있음을 알 수 있었다. 반경의 변화도 구조물의 동특성에 많은 영향을 주고 있으며, 역시 반경이 증가하면 진동수는 저하하고 원주방향의 지동이 지배적으로 나타난다.

(4) 진동형상을 고찰해보면 저차에서 길이방향의 모드 $m=1$ 의 대표적인 4가지의 형상이 나타남을 알 수 있으며, 원통셸에서는 나타나지 않는 진동형태이다. 또한 스캔의 진폭이 다르게 나타나는 것도 매우 특징적이라고 할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Missaoui, J., Cheng, L. and Richard, M. J., 1995, "Free and Forced Vibration of a Cylindrical Shell with a Floor Partition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 1, pp. 21~40.

(2) Irie, T., Yamada, G. and Kobayashi, Y., 1985, "Natural Frequencies of Circular Cylindrical Shell with Longitudinal Exterior Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 101, No. 2, pp. 257~261.

(3) 이영신, 최명환, 1999, "내부판 구조물이 결합된 강 및 평직복합재료 원통셸의 구조진동 특성연구," *한국소음진동공학회지*, Vol. 9, No. 1, pp. 149~162.

(4) 한창환, 이영신, 1999, "외부에 사각판이 결합된 원통셸의 자유진동해석," *한국소음진동공학회, 추계학술대회는문집*, pp. 402~407.

(5) Moskalenko, V. N., 1975, "Frequency Spectra

and Mode of Free Vibrations of Doubly Periodic Systems," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 39, pp. 503~510.

(6) Azimi, S., Hamilton, J. F. and Soedel, W., 1984, "The Receptance Method Applied to the Free Vibration of Continuous Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 93, No. 1, pp. 9~29.

(7) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Natural Frequencies and Mode Shapes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 163, No. 3, pp. 403~427.

(8) Yim, J. S., Sohn, D. S. and Lee, Y. S., 1998, "Free Vibration of Clamped-free Circular Cylindrical Shell with a Plate Attached at an Arbitrary Axial Position," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1, pp. 75~88.

(9) Soedel, W., 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker, Inc., New York, Second Edition.

(10) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Co., New York.

(11) 이영신, 한창환, 2000, "동적응답법을 이용한 다점 단순지지된 연속원통셸의 자유진동해석," *한국소음진동공학회지*, Vol. 10, No. 6, pp. 998~1008.

(12) Azimi, S., Hamilton, J. F. and Soedel, W., 1986, "Natural Frequencies and Modes Shape of Cylindrical Polygonal Ducts Using Receptance Methods," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 109, No. 1, pp. 79~88.

(13) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-plate Combinations Using the Receptance Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 2, pp. 341~369.

(14) Leissa, A. W., 1973, *Vibration of Shell*, NASA SP-288, National Aeronautics and Space Administration.