

<논 문>

완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Horizontally Curved Beams with Transition Curve

이 병 구[†] · 진 태 기* · 이 태 은*

Byoung Koo Lee, Tae Gi Jin and Tae Eun Lee

(2001년 10월 17일 접수 : 2001년 12월 3일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Horizontally Curved Beam(수평 곡선보), Inertia Force(관성력), Natural Frequency(고유진동수), Third Parabola(3차 포물선), Transition Curve(완화곡선)

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of horizontally curved beams with transition curve. Based on the dynamic equilibrium equations of a curved beam element subjected to the stress resultants and inertia forces, the governing differential equations are derived for the out-of-plane vibration of curved beam with variable curvature. This equations are applied to the beam having transition curve in which the third parabolic curve is chosen in this study. The differential equations are solved by the numerical procedures for calculating the natural frequencies. As the numerical results, the various parametric studies effecting on natural frequencies are investigated and its results are presented in tables and figures. Also the laboratory scaled experiments were conducted for verifying the theories developed herein.

1. 서 론

현대도시는 급증하는 교통량의 원활한 흐름을 위하여 유기적인 도로망 체계를 필요로 한다. 도시지역 내에서 대용량의 도로를 건설하기 위해서는 고가고속도로의 건설이 필수적이다. 이러한 고가고속도로의 건설에서 서로 다른 직선구간의 도로를 연결하기 위해서는 수평곡선의 선형이 반드시 필요하다.

고가고속도로의 건설에서 곡선구간을 직선부재를 이용하여 시공할 수 있으나 많은 수의 교각을 필요로 한다. 도시지역 내에서 많은 수의 교각은 토지이용의 막대한 지장을 초래할 뿐만 아니라 더욱이 지상교통의 원활한 소통에 매우 큰 악영향을 미친다. 따라서

도심지역에서 고가고속도로의 건설에는 수평 곡선보의 사용이 절대적으로 필요하다. 특히 곡률 반경이 매우 작은 곡선교의 경우에는 단경간의 곡선구간으로 두 개의 도로를 연결할 수 있는 장점이 있다.

도로의 직선구간에서 곡선구간으로 진입할 때에 완화구간이 없이 원호구간으로 직접 진입하면 급격한 곡률 반경의 변화로 차량이 전복할 위험이 있을 뿐만 아니라 운전자의 승차감이 매우 나빠지게 된다. 이러한 점을 보완하기 위하여 수평 곡선교량에는 반드시 완화곡선을 삽입하여 자동차의 안전주행은 물론이고 운전자의 원활한 승차감을 이루도록 건설하여야 한다. 이제까지의 수평 곡선보에 대한 문헌^(1~7)을 고찰한 결과, 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 문헌은 전혀 찾아볼 수 없었다.

이러한 관점에서 이 연구는 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 면외 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 구축된 해석모형으로부터 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구목적이 있다. 또

[†] 책임저자, 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr

Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

* 정회원, 원광대학교 대학원

한 실험을 통하여 본 연구결과를 검증하고, 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 제변수가 자유진동에 미치는 영향을 고찰한다.

2. 수학적 모형

2.1 곡선보의 제변수

Fig. 1은 $y=y(x)$ 의 임의 선형을 갖고 지간길이가 l 인 곡선보의 기하학적 형상과 진동형의 예를 나타낸 것이다. 점선은 곡선보의 정적 상태의 선형이고, 실선은 자유진동할 때의 진동형이다.

곡선보의 단면은 등단면이고, 양단부는 회전지점 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 그림에서 α 는 중심각, (x, y) 는 곡선보의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계, ρ 및 θ 는 각각 곡선보의 축상 임의점에서 곡률반경 및 x 축과 곡률 중심방향이 이루는 각도이다. 그리고 v , Ψ 및 ϕ 는 변위함으로 각각 곡선보의 축상 임의점에서 수직방향변위, 휨에 의한 단면 회전각 및 중립축의 비틀림각이다.

2.2 지배미분방정식

Fig. 2는 곡선보가 자유진동할 때에 부재의 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다. 이 그림에서 M , T 및 Q 는 변위에 의하여 발생하는 합응력들이며, 각각 휨 모멘트, 비틀림 모멘트 및 전단력이다. F_v , C_Ψ 및 C_ϕ 는 질량을 갖고 있는 부재단면에 발생하는 단위 길이당의 관성력이며, 각각 수직방향 관성력, 회전 관성우력 및 비틀림 관성우력이다.

부재 미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

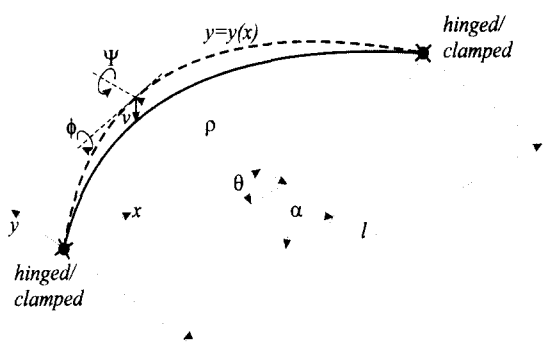


Fig. 1 Curved beam and its variables

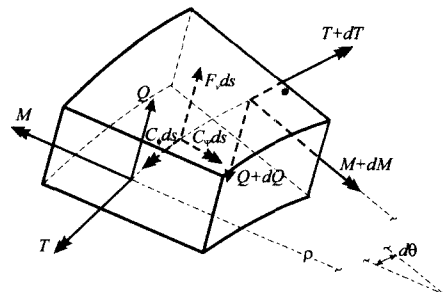


Fig. 2 Loads subjected to small element

$$Q' - \rho F_v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

위의 식들에서 $(\cdot) = d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

부재 단면에 발생하는 합응력 즉, 휨 모멘트, 비틀림 모멘트 및 전단력을 v , Ψ 및 ϕ 변위함으로 나타내면 각각 식 (4)~(6)과 같다.⁽⁸⁾

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi') \quad (4)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\Psi + \phi') \quad (5)$$

$$Q = \alpha_s AG(\rho^{-1}v' - \Psi) \quad (6)$$

여기서 I 와 J 는 각각 단면 2차모멘트 및 비틀림상수, E 와 G 는 각각 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수, α_s 는 단면형상에 따른 상수이다.

곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당의 관성력 F_v , C_Ψ 및 C_ϕ 는 각각 식 (7)~(9)와 같다.⁽⁹⁾

$$F_v = -\gamma A\omega^2 v \quad (7)$$

$$C_\Psi = -\gamma I\omega^2 \Psi \quad (8)$$

$$C_\phi = -\gamma I_p\omega^2 \phi \quad (9)$$

여기서 γ 는 질량밀도, A 는 단면적, I_p 는 단면극관성모멘트, ω 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad \eta = v/l \quad (10-12)$$

$$\zeta = \rho/l, \quad s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (13-15)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), \quad \mu = \alpha_s G/E \quad (16, 17)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)} \quad (18)$$

여기서 (ξ, θ) 는 직교좌표계 (x, y) 를 지간길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이고, η 와 ζ 는 v 와 ρ 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. s 와 s_p 는 세장비 관련 변수, ϵ 과 μ 는 곡선보 재료의 강성변수와 전단변수이다. 한편 c_i 는 이 논문에서 산출하고자 하는 무차원 고유진동수이고, i 는 모드번호이다.

식 (6) 및 식 (7)을 식 (1)에 대입하고 식 (10)~(18)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음 식과 같은 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta'' = \zeta^{-1} \zeta' \eta' - \mu^{-1} s^{-2} \zeta^2 c_i^2 \eta + \zeta \Psi' \quad (19)$$

식 (4)~(6) 및 식 (8)을 식 (2)에 대입하고 식 (10)~(18)의 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같은 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\Psi'' = \zeta^{-1} \zeta' \Psi' + [\epsilon + \zeta^2 (\mu s^2 - s^{-2} c_i^2)] \Psi + (1 + \epsilon) \phi' - \zeta^{-1} \zeta' \phi - \mu s^2 \zeta \eta' \quad (20)$$

식 (4), 식 (5) 및 식 (9)를 식 (3)에 대입하고 정리하면 다음의 상미분방정식을 얻는다.

$$\phi'' = \zeta^{-1} \zeta' \phi' + \epsilon^{-1} (1 - s_p^{-2} \zeta^2 c_i^2) \phi - (1 + \epsilon^{-1}) \Psi' + \zeta^{-1} \zeta' \Psi \quad (21)$$

2.3 경계조건

본 연구에서는 회전-회전 및 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다.

회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨 모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 앞에서 언급한 무차원 변수를 이용하면 회전단 및 고정단의 무차원 경계조건식을 각각 식 (22)~(24) 및 식 (26)~(28)과 같이 나타낼 수 있다.

- 회전지점 $\eta = 0, \phi = 0, \Psi' = 0 \quad (22 \sim 24)$

- 고정지점 $\eta = 0, \phi = 0, \Psi = 0 \quad (25 \sim 27)$

3. 형상함수

위에서 유도한 상미분방정식과 경계조건을 완곡선을 갖는 수평곡선보에 적용하기 위하여 완곡선을

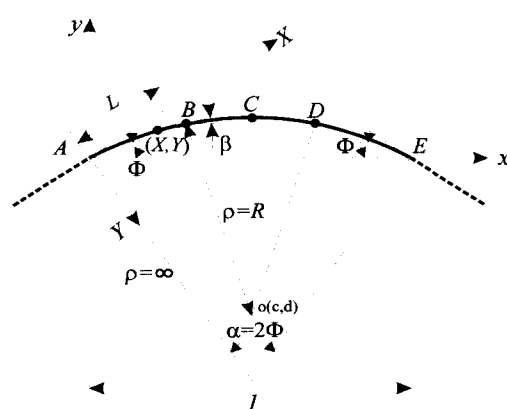


Fig. 3 Third parabola transient curve

갖는 수평곡선보의 선형을 정의한다. 이 연구에서는 곡선보의 완곡선으로 자주 쓰이는 3차 포물선을 택하였다.

Fig. 3은 점선으로 표시되어 있는 두 개의 직선부를 서로 연결해 주고 있는 3차 포물선 완곡선을 갖는 수평 곡선보의 선형을 직교 좌표계 (x, y) 와 (X, Y) 에 나타낸 것이다. 이 수평 곡선보에서 AB 및 DE 구간이 완곡선 구간이고, BCD 구간이 원호 구간이다. 여기서 C 는 수평 곡선보의 정점이다. 이 그림에서 L 은 완곡선의 종점인 B 점의 X 좌표이며 ϕ 는 직선부가 수평선과 이루는 경사 각도이고 α 는 수평 곡선보의 중심각도이다. 따라서 수평 곡선보의 기하학적 조건에 의하여 $\alpha = 2\phi$ 가 되고 본 연구에서 설계 변수인 $\phi (= \alpha/2)$ 값은 중심각 α 의 정의로 대신한다.

수평 곡선보에서 먼저 완곡선인 AB 구간의 선형을 산출하며, 3차 포물선 완곡선은 직교 좌표계 (X, Y) 에서 다음 식과 같이 주어진다.⁽¹⁰⁾

$$Y = X^3/Q, \quad 0 \leq X \leq L \quad (28)$$

여기서 Q 는 곡선보의 설계조건에 의하여 주어지는 설계변수이며, 완곡선의 시점인 A 점에서 곡률반경 $\rho = \infty$ 이며 완곡선을 따라서 진입하게 되면 곡률반경은 점차 작아져서 완곡선의 종점인 B 점에서는 주어진 Q 값에 따라서 소요의 곡률반경 $\rho = R$ 을 갖게 된다.

위의 식 (28)을 (x, y) 좌표계에서 나타내기 위하여 다음의 좌표 변환식을 사용한다.

$$x = X \cos \phi + Y \sin \phi, \quad 0 \leq x \leq L \cos \phi \quad (29)$$

$$y = X \sin \Phi - Y \cos \Phi, \quad 0 \leq x \leq L \cos \Phi \quad (30)$$

식 (29), (30)을 이용하면 식 (28)로 표시되는 3차 포물선 완화곡선을 다음과 같이 직교 좌표계 (x, y) 에서 나타낼 수 있다.

$$x \sin \Phi - y \cos \Phi - (1/Q)(x \cos \Phi + y \sin \Phi)^3 = 0, \quad 0 \leq x \leq L \cos \Phi \quad (31)$$

위의 식을 식 (10), (11)을 이용하여 지간길이 l 로 정규화하면 다음 식과 같은 무차원 3차 포물선 완화곡선식을 구할 수 있다.

$$\xi \sin \Phi - \delta \cos \Phi - m(\xi \cos \Phi + \delta \sin \Phi)^3 = 0, \quad 0 \leq \xi \leq n \quad (32)$$

식 (32)의 완화곡선에서 ξ 에 대응되는 δ 값은 비선형 방정식의 해법인 Regula-Falsi 법을 이용하여 산출하였고 m 은 설계변수인 Q 를 무차원화 것으로 식 (33)과 같이 정의된다. 또한 n 은 완화곡선의 범위를 정의하기 위한 무차원 변수로 식 (34)와 같이 정의되며 0.5보다 작은 값이다.

$$m = l^2 / Q \quad (33)$$

$$n = (L/l) \cos \Phi \quad (34)$$

다음은 원호 구간인 BC 의 선형을 정의한다. 원호 구간의 곡률 중심점 $O(c, d)$ 를 B 점의 좌표 (x_B, y_B) , 곡률반경 R 및 B 점에서의 접선각 β 를 이용하여 나타내면 다음과 같다. 이러한 값들은 식 (31)을 이용하면 대수적 방법 또는 수치적 방법으로 산출할 수 있는 값들이다.

$$c = x_B + R \sin \beta \quad (35)$$

$$d = y_B - R \cos \beta \quad (36)$$

따라서 원호 구간인 BC 의 선형식은 다음의 원방정식으로 구할 수 있다.

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = R^2, \quad L \cos \Phi \leq x \leq 0.5l \quad (37)$$

위의 식을 지간길이 l 로 정규화하면 다음 식과 같다.

$$(\xi - c/l)^2 + (\delta - d/l)^2 = (R/l)^2, \quad n \leq \xi \leq 0.5 \quad (38)$$

수평 곡선보의 나머지 구간인 CDE 구간은 대칭조건에 의하여 산출한다. 이상과 같이 3차 포물선 완화곡선을 갖는 수평 곡선보 $ABCDE$ 의 선형이 산출되

었으므로 앞에서 유도한 상미분방정식과 경계조건을 이용하여 고유진동수와 진동형을 산출할 수 있다.

4. 수치해석 결과 및 토의

위에서 유도한 미분방정식과 경계조건 및 완화곡선의 선형식을 이용하여 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하였다. 상미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta 법⁽¹¹⁾을 이용하였고, 고유치인 c_i 값을 산출하기 위해서는 Regula-Falsi 법⁽¹¹⁾을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 이미 여러 문헌들^(5-7, 12)에서 그 유용성이 입증된 바 있다. 이 연구의 모든 수치해석 예제에서 설계변수인 m, n 은 각각 0.8과 0.3을 이용하였다.

곡선보의 각종 변수들이 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 변수연구를 시행하였다. 각 변수연구에서 사용한 변수값들을 그림 상단 및 표 하단에 표기하였다.

Fig. 4는 c_i 와 중심각 α 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 α 값이 증가할수록 c_i 값은 감소하는 것을 알 수 있다. 이는 α 값이 증가하면 곡선보의 자유진동에 관한 강성이 감소되어 c_i 값은 감소하는 것을 의미한다.

Fig 5는 c_i 와 세장비 s 의 관계를 나타낸 것으로, s 가 증가함에 따라서 c_i 값은 증가한다. 그러나 c_i 값은 특정 s 값 이상에서는 거의 증가하지 않고 수평선에

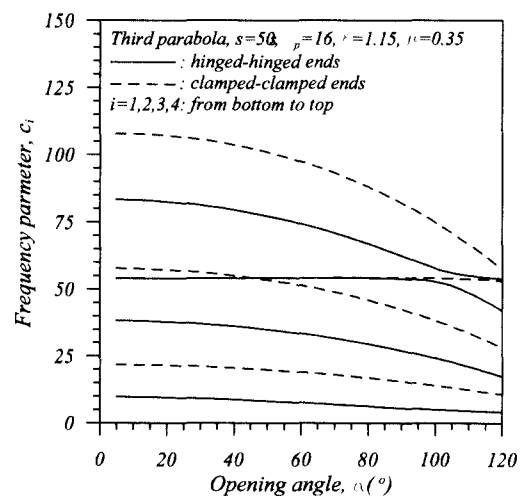


Fig. 4 c_i versus α curves

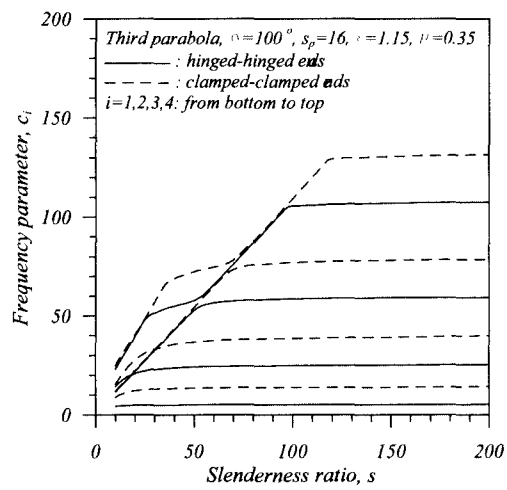


Fig. 5 c_i versus s curves

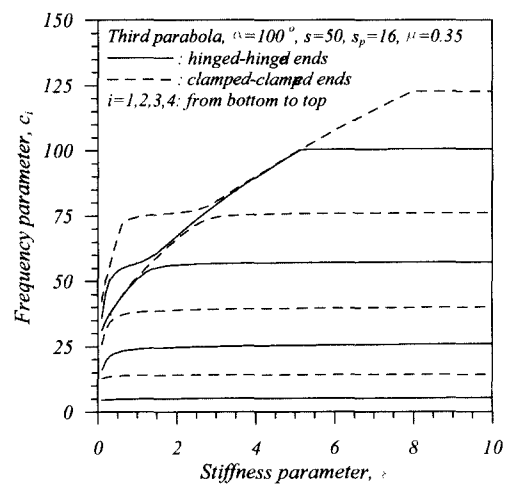


Fig. 6 c_i versus ϵ curves

수렴함을 알 수 있다. 특히 s 값이 약 120 이상에서는 모든 c_i 값은 거의 증가하지 않는 경향을 보이고 있다. 이 그림에서 고정-고정 보의 제 2, 3모드의 곡선이 교차하고 있어 한 개의 고유진동수에서 두 개의 진동형이 존재한다.

Fig. 6은 c_i 와 강성변수 ϵ 사이의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 ϵ 이 증가함에 따라 c_i 값은 증가하며 Fig. 5에서와 마찬가지로 특정 ϵ 값 이상에서는 수평선에 접근하는 것을 알 수 있다. 특히 제 1모드의 경우에는 ϵ 값이 c_i 값에 거의 영향을 미치지 못하고 있다.

Table 1은 전단변수 μ 가 c_i 값에 미치는 영향을 나

Table 1 Effect of shear parameter μ on frequency parameter c_i *

End constraint	μ	Frequency parameter, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged-hinged	0.30	5.10	23.20	51.57	56.93
	0.35	5.11	23.24	51.69	57.07
	0.40	5.11	23.28	51.78	57.18
Clamped-clamped	0.30	13.47	36.52	54.27	71.65
	0.35	13.50	36.72	54.31	72.28
	0.40	13.53	36.88	54.34	72.76

* $\alpha=100^\circ$, $s=50$, $s_p=16$, $\epsilon=1.15$

타낸 것이다. 직사각형 단면인 경우에 μ 값은 0.3 ~ 0.4 사이의 값을 보인다. 이 표에서 보는 바와 같이 μ 값의 증가가 c_i 값을 증가시키는 요인이지만 그 영향력은 매우 작다.

5. 실험

본 논문의 이론적인 배경 및 작성된 컴퓨터 프로그램을 검증하기 위하여 3차 포물선 완화곡선을 갖는 회전-회전 및 고정-고정 보의 시편을 제작하여 실험실 규모의 모형실험을 실시하였다. 실험에 사용한 시편의 제원은 다음과 같다

- 기하학적 변수
 - 완화곡선 : 3차 포물선
 - 중심각 (α) : 100°
 - 지간길이 (l) : 35 cm
 - 단부조건 : 양단회전 및 양단고정
- 재료의 기계적 성질
 - 사용재료 : 알루미늄
 - 탄성계수 E : 7.0×10^{10} Pa
 - 전단탄성계수 G : 2.63×10^{10} Pa
 - 단위체적당 질량 γ : 2600 kg/m^3
- 단면의 성질
 - 단면 : $0.03 \text{ m} \times 0.006 \text{ m}$ 직사각형 단면
 - 단면적 A : $1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 - 단면 2차모멘트 I : $5.4 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
 - 극관성 모멘트 I_p : $1.4 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
 - 비틀림 상수 J : $1.89 \times 10^{-9} \text{ m}^4$

이와 같이 제작된 시편을 화강암 블록에 거치시키고

진동실험을 실시하였다. 본 연구에서는 총 13점의 가진점을 택하였으며, 소형의 가속도 센서를 시편의 밑면에 부착하였다. 가속도 센서가 부착된 충격망치(impact hammer)를 이용하여 시편 위에 표시된 가진점을 차례로 가진하면서 가진력과 곡선보의 가속도 응답을 동시에 측정하였다. 시편 위에 표시된 가진점을 가진하면서 얻어진 가진력과 가속도응답은 signal analyzer(Model SD390, Scientific-Atlanta Corp.)를 이용하여 받았으며, 이로부터 주파수 응답함수(frequency response function)를 구하여 모드해석을 위한 소프트웨어(Model STAR System, GenRad Inc.)가 내장된 컴퓨터로 전송하였다. 13개의 가진점에서 측정된 주파수 응답함수에 대한 곡선적합(curve fitting)을 실시하여 고유진동수를 산출하였다.^(12, 13) 이상의 실험 모형을 Fig. 7에 나타내었다. 주어진 시편의 재료로부터 무차원 변수값들을 계산하면 $s = 202$, $s_p = 40$, $\epsilon = 1.32$, $\mu = 0.32$ 이다.

이 연구에서 계산된 c_i 값으로부터 ω_i 를 계산하기 위하여 식 (18)을 이용하면 $\omega_i = 73.36 c_i$ 이고 $f_i = \omega_i / 2\pi$ 이므로 $f_i = 11.68 c_i$ (Hz)로부터 고유진동수를 계산할 수 있다.

Table 2는 본 연구에서 산출한 ω_i 값과 실험에서 얻은 ω_i 값을 비교한 표이다. 이 표에서 보인바와 같이 두 결과는 매우 우수하게 접근하여 본 연구의 타

Table 2 Comparison of frequency parameter c_i between this study and experiments

End constraint	i	This study		Experiment	Error* (%)
		c_i	f_i (Hz)	f_i (Hz)	
Hinged-hinged	1	7.70	90	98	-8.9
	2	25.68	300	262	+12.7
	3	56.68	662	647	+2.3
	4	103.25	1206	1298	-7.6
Clamped-clamped	1	14.17	166	152	+8.4
	2	39.81	465	439	+5.6
	3	78.42	916	880	+3.9
	4	131.23	1533	1468	+4.2

$$* \text{Error}(\%) = \frac{\text{this study} - \text{experiment}}{\text{this study}} \times 100$$

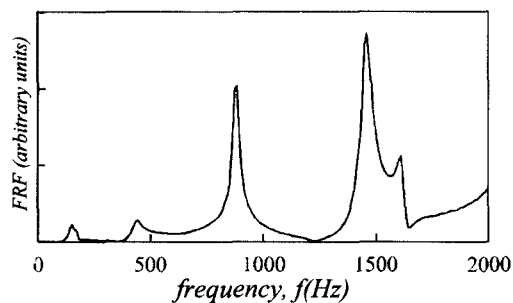


Fig. 8 Frequency response function (clamped-clamped ends)

당성을 검증할 수 있었다. 이 표에서 알 수 있듯이 실험결과와의 오차는 회전-회전 보가 고정-고정 보보다 다소 큰 것을 알 수 있다. 이는 시편제작 시에 회전 지점을 정교하게 제작하는 것은 매우 어렵기 때문에 진동시에 회전지점의 들쭉거림이 발생하여 이론값과 비교하여 다소 큰 오차가 발생한 것으로 사료된다. 반면 고정지점의 경우에는 비교적 정교한 지점조건을 구현할 수 있으므로 이론값과의 오차가 작게 나타났다. 참고로 본 실험에서 얻어진 FFT의 주파수 응답함수(고정-고정 보)를 Fig. 8에 나타내었다.

6. 결론

본 연구는 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 수평 곡선보가 진동할 때 부재의 미소요소에 발생하는 합응력 및 관성력에 대한 동적 평형방정식을 이용하여 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식

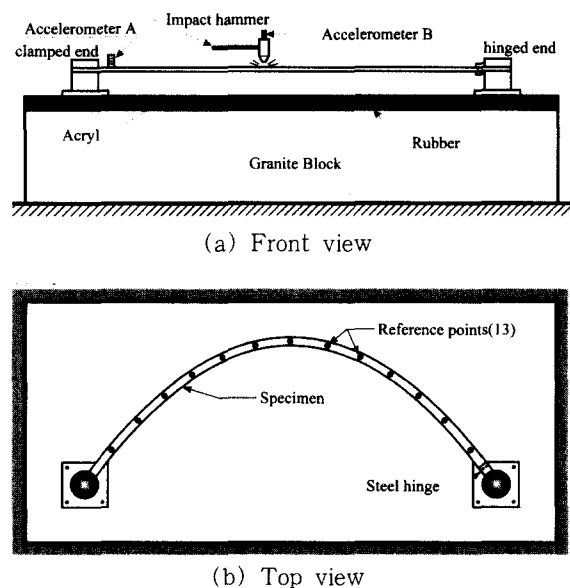


Fig. 7 Experimental set up

을 유도하였으며, 지점조건에 대한 경계조건식을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 3차 포물선 완화곡선을 갖는 수평 곡선보에 적용하여 회전-회전 및 고정-고정 보의 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예제에서는 곡선보의 중심각, 세장비, 무차원 강성변수 및 전단변수 등이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. 실험실 규모의 실험을 실시하여 본 연구에서 얻어진 이론값과 실험값을 비교하여 본 연구 방법의 타당성을 검증하였다. 본 연구에서 얻어진 결과들은 곡선교 등과 같은 곡선형 부재의 설계시에 고유진동수를 제공할 수 있어 구조공학 분야에서 그 활용성이 매우 기대된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: 2000-1-31100-006-1) 지원으로 수행된 결과의 일부이며, 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Issa, M. S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, No. 2, pp. 291~301.

(2) Snyder, J. M. and Wilson, J. F., 1992, "Free Vibrations of Continuous Horizontally Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, No. 2, pp. 345~355.

(3) Gupta, A. K. and Howson, W. P., 1994, "Exact Natural Frequencies of Plane Structures Composed of Slender Elastic Curved Members," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 2, pp. 145~157.

(4) 강영중, 최영준, 1995, "박판 수평곡선보의 자유진동," *한국강구조학회 논문집*, 제 7권 제 4호, pp. 243~252.

(5) 이병구, 박광규, 오상진, 진태기, 2001, "연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동", *한국전산구조공학회 논문집*, 제14권 제 3호, pp. 371~379.

(6) 이병구, 진태기, 최규문, 이태은, 2001, "여러개의 스프링으로 탄성지지된 수평 곡선보의 자유진동", *한국소음진동공학회논문집*, 제11권 제 5호, pp. 101~107.

(7) Lee, B. K., Park, K. K., Oh, S. J. and Jin, T. G., 2001, "Free Vibrations of Noncircular Curved Beams Resting on Pasternak Foundation," *Proceedings of First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics(APCOM'01)*, University of New South Wales, Sydney, Australia.

(8) Volterra, E. and Gaines, J. H., 1971, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, pp. 356~358.

(9) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, W., Jr., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc.

(10) Uren, J. and Price, W. F., 1994, *Surveying for Engineers*, Macmillan Press Ltd.

(11) Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, *Numerical Methods in Engineering Practice*, Holt, Rinehart and Winston.

(12) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 4871~4891.

(13) Ewins, D. J., 1985, *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc.