한국소음진동공학회논문집 제 12 권 제 1 호, pp. 57~64, 2002.

〈논 문〉

비선형 히스테리시스 진동시스템의 분기해석

Bifurcation Analysis of a Non-linear Hysteretic Oscillating System

장 서 일† · 송 덕 근* · 최 진 권**

Seo Il Chang, Deog-Geun Song and Jin-Kwen Choi

(2001년 9월 24일 접수 : 2001년 12월 5일 심사완료)

Key Words : Viscoelastic Damper(점탄성 댐퍼), Nonlinear Model(비선형 모델), Jump Phenomena(점프 현상), Discontinuous Response(불연속 반응), Bifurcation Set(분기 셋)

ABSTRACT

Three kinds of viscoelastic damper model, which has a non-linear spring as an element is studied analytically and numerically. The behavior of the damper model shows non-linear hysteresis curves which is qualitatively similar to those of real viscoelastic materials. The motion is governed by a non-linear constitutive equation and an additional equation of motion. Harmonic balance method is applied to get analytical solutions of the system. The frequency-response curves show that multiple solutions co-exist and that the jump phenomena can occur. In addition, it is shown that separate solution branch exists and that it can merge with the primary response curve. Saddle-node bifurcation sets explain the occurrences of such non-linear phenomena.

1. 서 론

점탄성 물질[1, 2]은 시간-의존적 반응일 뿐 아니라 온도, 주파수와 변형률에 의해서도 그 반응이 변하게 되어 구성 방정식으로 정확히 표현하기가 매우 어렵다. 그러나 점탄성 물질의 반응은 매우 중요하며 이러한 점탄성 물질의 모델링과 이러한 모델을 갖는 진동계의 해석은 절실히 요구된다. 이러한 점탄성 물질의 거동을 기존의 2-계수 모델로 표현하는 데에는 문제점 및 어려움이 있어 3-계수 모델로 점탄성 물질을 표현하였다. 3-계수 모델에서 비선형성을 표현하기 위하여 하나의 스프링을 비선형 스프링으로 대체하여 점탄성 물질을 모델링 한 후에 여러 가지 수치해석 방법들을 이용하여 점탄성 물질의 거동을 수치화한다. 점탄성 댐퍼는 점성과 탄성이 결합된 형태이기에 그 모델링은 간단한 형태가 아니다. 또한 점탄성 물질은 비선형성을 나타내므로 초기 조건에 따라 반응은 큰 차이를 나타내게 된다. 이러한 비선형 댐퍼의 모델링은 먼저 간단한 2-계수 모델인 Maxwell과 Kelvin모델을 통하여 검토하고 차후 Maxwell과 Kelvin모델의 조합 형태인 3-계수 모델을 이용하여 점탄성 물질의 성질을 살펴보았다. 3-계수 모델의 한 요소를 비선형 요소로 교체하여 비선형 3-계수 모델로 만들고, 이렇게 만들어진 비선형 점탄성 댐퍼를 조화균형법(harmonic balance method)[3]을 이용하여 해석하였다.

† 책임저자, 정회원, 서울시립대학교 환경공학부
E-mail : schang@uos.ac.kr
Tel : (02) 2210-2551, Fax : (02) 2244-2245
* 서울시립대학교 대학원환경공학과
** 정회원, 서울시립대학교 대학원 환경공학과

2. 비선형 댐퍼의 모델링과 해석

점탄성 물질은 스프링과 대시포트(dash-pot)가 조합된 형태로 모델링 할 수 있다. 이때 이 모델에서 시스템의 강성을 나타내는 스프링을 비선형 요소로

대치하여 점탄성 물질의 비선형성[4, 5]을 나타낼 수 있다. Kelvin model, Maxwell model과 3-parameter model의 경우 각각의 스프링 요소를 비선형 형태로 변환시켜서 점탄성 물질의 비선형성을 나타낸다. 점탄성의 댐퍼 중에 먼저 Kelvin 댐퍼는 스프링과 대시포트의 병렬 구조로 이루어졌으며, Maxwell 댐퍼는 스프링과 대시포트의 직렬 구조로 이루어져 있고 3-parameter 댐퍼는 이 두 가지가 조합한 형태이다. 여기서 선형적인 스프링 요소를 비선형 요소로 대치하여 비선형적인 특성을 나타낼 수 있다. 비선형 Kelvin 댐퍼는 Fig. 1에서 보듯이 스프링 요소인 S_2가 받는 힘은 F_{S_2}라 하고, 대시포트 요소인 D_2가 받는 힘은 F_{D_2}라 할때, 댐퍼가 받는 힘 D는 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{S_2} = d_1 x + d_3 x^3, \quad F_{D_2} = c\dot{x}, \qquad (1)$$
$$D = F_{S_2} + F_{D_2}$$

동적 힘-변위 관계를 보기 위하여 댐퍼에 조화변형

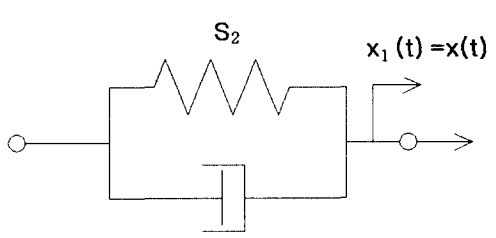


Fig. 1 Kelvin model

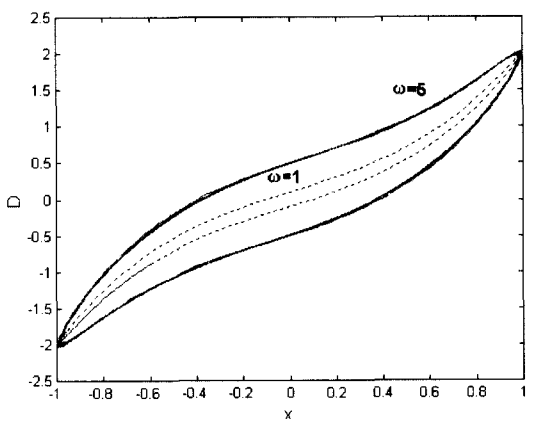


Fig. 2 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies(Kelvin model) $d_1=1$, $d_3=1$, $c=0.1$, $X_0=1$

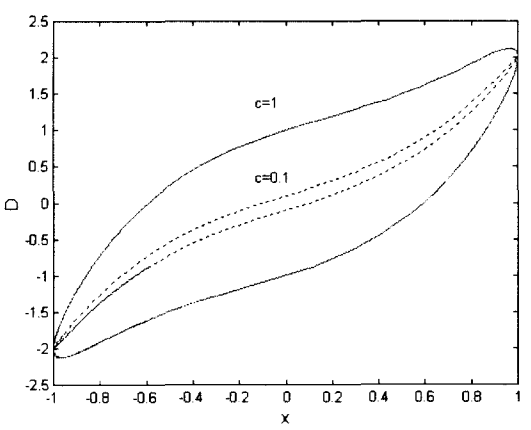


Fig. 3 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants(Kelvin model) $d_1=1$, $d_3=1$, $X_0=1$, $\omega=1$

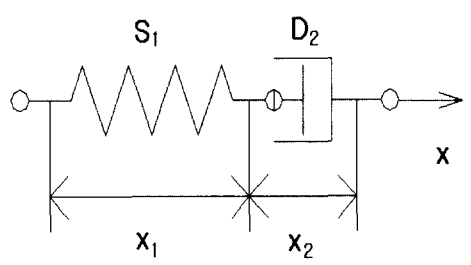


Fig. 4 Maxwell model

($x=X_0 \sin \omega t$)가하여 Fig. 2와 같은 결과를 얻을 수 있다. Fig. 2의 경우는 Kelvin 모델에서 경성반응(hardening)의 경우이고 주파수가 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 증가한다. 댐핑상수의 값이 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양도 증가하는 것을 Fig. 3에서 볼 수 있다.

다음으로 Maxwell 모델을 해석하였으며 모델의 모습은 Fig. 4와 같다. Maxwell 모델의 경우 Fig. 4에서 보듯이 댐퍼에 걸리는 힘을 D라 할 때, 스프링 요소와 대시포트 요소는 각각 x_1과 x_2의 변형을 받게 된다. 원점 대칭이면서 비선형성을 나타내는 다항식 형태의 새로운 함수를 다음 식과 같이 가정할 수 있다.

$$x_1 = f(D) = e_1 D + e_3 D^3 \qquad (2)$$

Maxwell 댐퍼에서 스프링 요소인 S_1이 받는 힘을 F_{S_1}라 하고, 대시포트 요소인 D_2가 받는 힘을 F_{D_2}라 할 때, 댐퍼가 받는 힘 D는 다음 식과 같이 나타

낼 수 있다. 같은 방법으로 ω와 x의 관계를 구하고 그래프를 그리면 Fig. 5와 같이 나타낼 수 있다.

$$D = c\dot{x} - c(\dot{D}\frac{df}{dD}) \tag{3}$$

Fig. 5에서 보듯이 주파수가 변함에 따라 비선형성을 나타내기도 하고 나타내지 않기도 한다. 또한 ω가

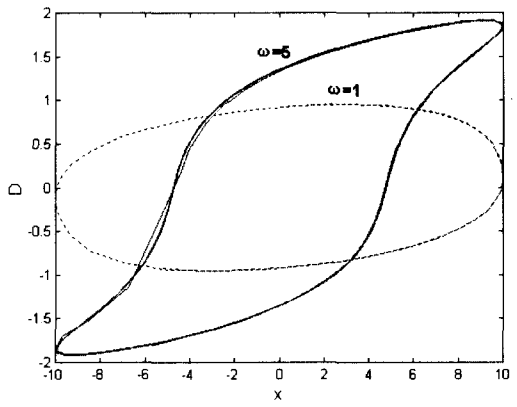


Fig. 5 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies(Maxwell mode) $e_1=1$, $e_3=1$, $c=0.1$, $X_0=1$

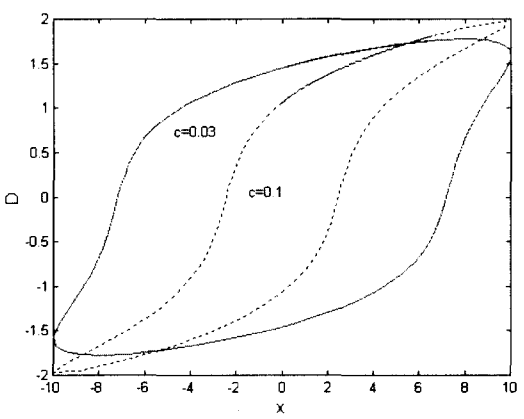


Fig. 6 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants (Maxwell model) $e_1=1$, $e_3=1$, $c=0.1$, $X_0=1$

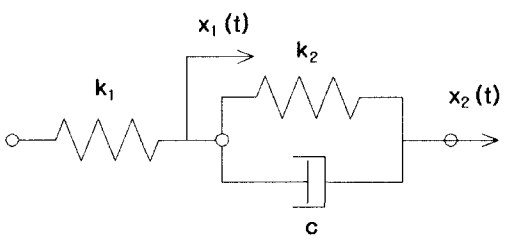


Fig. 7 3-parameter model

일정하고, c가 증가할 때 D는 다음 Fig. 6과 같이 나타난다. 다음으로 3-parameter 모델을 해석하였으며 모델의 모습은 Fig. 7과 같다

Fig. 7과 같은 비선형 3-parameter 모델을 댐퍼가 받는 힘 D에 관하여 정리하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$D + c\frac{df}{dD}D' + k_2 f(D) = k_2 x + cx' \tag{4}$$

ω가 증가할 때 동적 힘-변형 관계는 Fig. 8과 같이 나타낼 수 있다. 주파수가 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 줄어든다. 또한 ω가 일정할 때 D는 다음 Fig. 9와 같이 나타나며, 댐퍼의 값이 증가함에 따라 소산되는 에너지의 양은 줄어든다.

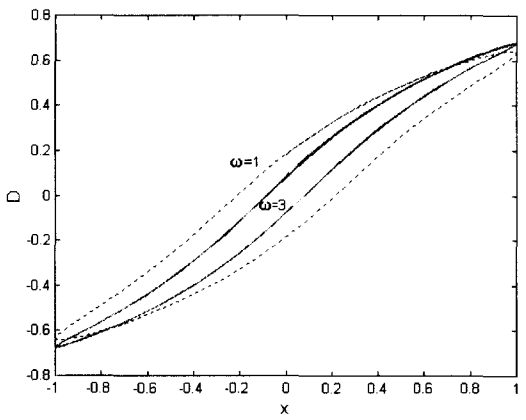


Fig. 8 Nonlinear hysteresis cycle at different frequencies (3-parameter model) $d_1=1$, $d_3=1$, $c=3$, $k_2=1$, $X_0=1$

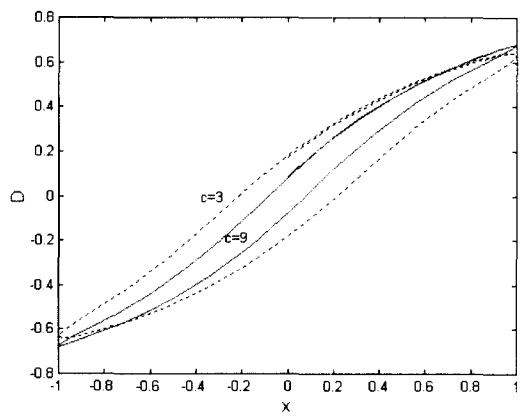


Fig. 9 Nonlinear hysteresis cycle at different damping constants (3-parameter model) $d_1=1$, $d_3=1$, $\omega=1$, $k_2=1$, $X_0=1$

3. 비선형 Kelvin, Maxwell, 3-parameter 댐퍼를 갖는 진동 시스템의 모델링과 해석

Fig. 10과 같이 질량 M에 대하여 스프링 k와 댐퍼가 병렬로 연결된 시스템들을 해석하였다. Fig. 1의 Kelvin댐퍼를 Fig. 10의 시스템의 댐퍼에 대치한 후에 운동방정식을 세우면 다음 식과 같은 2차 상미분 방정식으로 나타낼 수 있고,

$$m\ddot{x}+kx+D=F_c\cos\omega t \tag{5}$$

조화균형법(harmonic balance method)[3]을 적용하기 위하여 x와 D를 다음 식과 같이 가정한다.

$$x=X_c\cos\omega t+X_s\sin\omega t$$
$$D=D_c\cos\omega t+D_s\sin\omega t \tag{6}$$

가정된 x와 D를 구성방정식과 운동방정식에 대입하고 정리한 후, X_c와 X_s를 다음 식 (7)과 같이 치환하여 풀면,

$$X_c=X\cos\phi\ ,\quad X_s=X\sin\phi \tag{7}$$

X와 ω의 관계를 구할 수 있다. c가 일정하고 F_c가 변할 때 X와 ω의 관계를 나타내면 Fig. 11과 같다.

Fig. 11에서 보면 F_c가 증가할수록 X의 경성반응이 커지며, 도약현상이 일어날 수 있는 ω의 값이 증가하는 것은 관찰할 수 있다. 또한 식 (6)에서 얻을 수 있는 X_c와 X_s를 D_c와 D_s에 관하여 정리할 수 있고, 앞의 경우와 같은 방법으로 D_0와 ω의 관계를 나타내면 Fig. 12와 같이 나타낼 수 있다. F_c가 일정할 때 댐핑 상수에 의한 차이를 나타낸 경우이다.

Fig. 4의 Maxwell 댐퍼를 Fig. 10의 시스템의 댐퍼

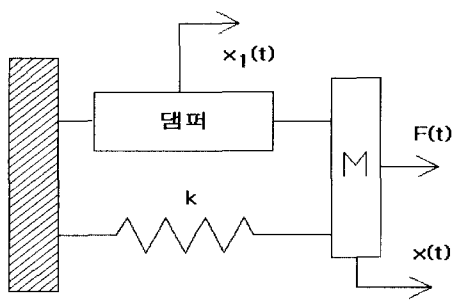


Fig. 10 Nonlinear damper model system

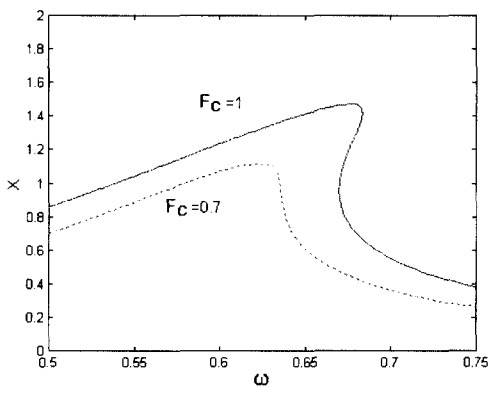


Fig. 11 Bifucation diagram(Kelvin model system) $m=10,\ d_1=d_3=1,\ k=2,\ F_c=1$

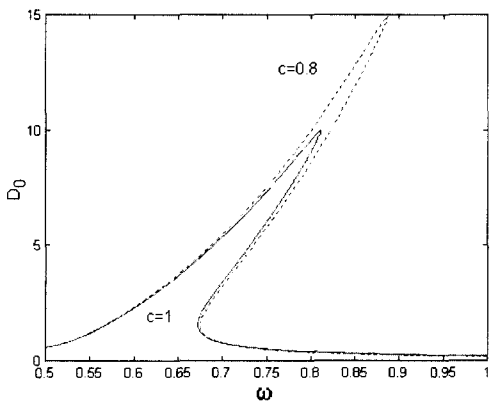


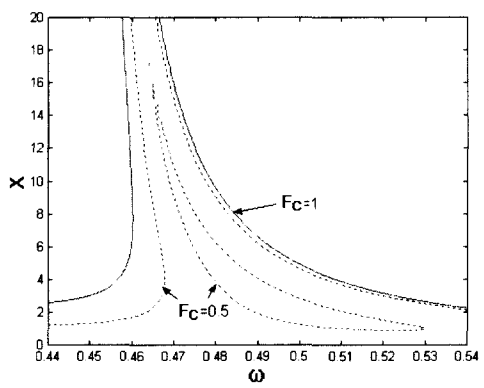
Fig. 12 Bifurcation diagram(Kelvin model system) $m=10,\ d_1=d_3=1,\ k=2,\ F_c=1$

에 대치한 후에 운동 방정식을 세우고 Kelvin모델과 같이 조화균형법을 적용하여 풀면 X와 ω의 관계를 나타낼 수 있고, 그래프는 Fig. 13과 같다.

Fig. 13에서 보듯이 F_c가 증가할수록 연성반응(softening)반응을 나타내며, 무한대의 공진 현상(unbounded response)이 나타난다. 또한 F_c가 0.1인 경우에는 내부에 새로운 폐곡선이 나타남을 볼 수 있다. 또한 D_0와 ω의 관계를 나타낼 수 있고 그래프는 Fig. 14와 같이 나타낼 수 있다. Fig. 14에서 보듯이 D_0의 값은 Kelvin의 경우와 마찬가지로 c가 증가함에 따라 D_0의 공진 현상이 증가하나 연성반응이 나타남을 볼 수 있다.

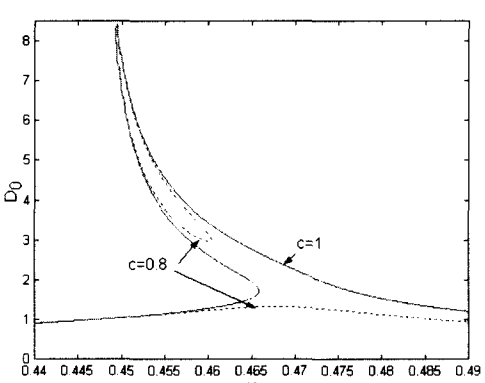
마지막으로 Fig. 7의 3-parameter댐퍼를 Fig. 10의 시스템의 댐퍼에 대치한 후에 운동 방정식을 세우고 Kelvin모델과 같이 조화균형법을 적용하여 풀면 X

와 ω의 관계를 나타낼 수 있고, 그래프는 Fig. 15와 같다.



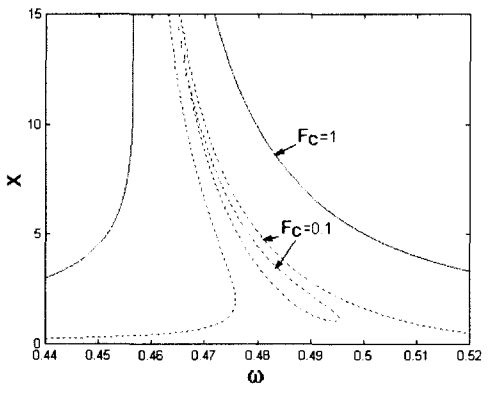
$m=10,\ e_1=e_3=1,\ F_c=1,\ k=2, c=1$

Fig. 13 Bifurcation diagram(Maxwell model system)



$m=10,\ e_1=e_3=1,\ k=2,\ F_c=1$

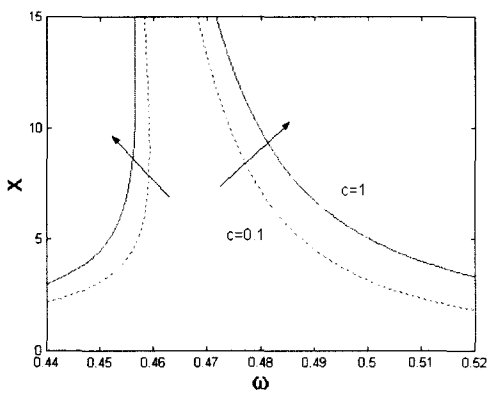
Fig. 14 Bifurcation diagram(Maxwell model system)



$m=10,\ e_1=e_3=1,\ k=2,\ k_2=1, c=1$

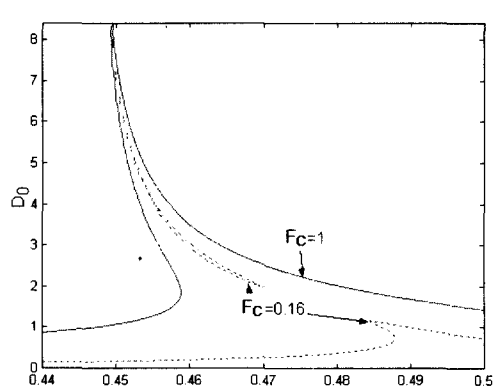
Fig. 15(a) Bifurcation diagram(3-parameter model system)

또한 D_0와 ω의 관계를 나타내면 다음 Fig. 16과 같이 나타낼 수 있다.



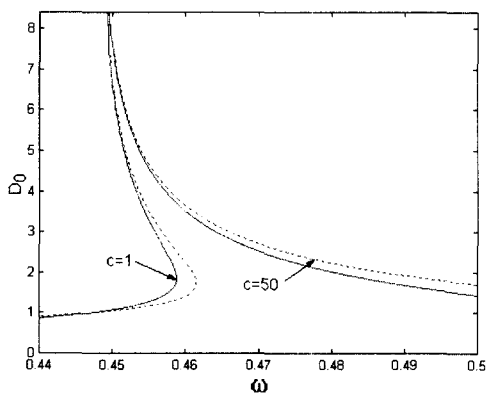
$m=10,\ e_1=e_3=1,\ k=2,\ k_2=1, F_c=1$

Fig. 15(b) Bifurcation diagram(3-parameter model system)



$m=10,\ e_1=e_3=1,\ k=2,\ k_2=1, c=1$

Fig. 16(a) Bifurcation diagram(3-parameter model system)



$m=10,\ e_1=e_3=1,\ k=2,\ k_2=1,\ F_c=1$

Fig. 16(b) Bifurcation diagram(3-parameter model system)

4. 결과 및 고찰

비선형 댐퍼를 갖는 시스템의 반응은 선형 댐퍼의 반응과 여러 가지로 다르게 나타난다. 먼저 같은 주파수에 대하여 초기 값에 따라 다른 반응이 일어나는 도약 현상이 발생하고 때로는 반응의 불연속성이 생기기도 한다. 이러한 도약 현상과 불연속성은 분기셋(bifurcation set)[6]을 가지고 해석할 수 있다.

비선형 Kelvin 댐퍼를 갖는 시스템은 Fig. 11에서 보았듯이 외력 F_c가 증가함에 따라, 그리고 댐퍼의 크기 c가 감소함에 따라 변위 X는 주파수 ω에 대하여 도약 현상이 나타나며 연성반응이 나타남을 볼 수 있다. 또한 Fig. 12에서 보았듯이 댐퍼에 의하여 소산되는 에너지 D도 같은 양상이 나타나며 그 크기의 정도가 변위 X의 변화가 D의 변화가 더 크게 나타난다. 또한 변위의 최대점을 나타내는 주파수는 외력이 증가함에 따라 댐퍼의 크기가 감소함에 따라 증가함을 볼 수 있다. 다음 Fig. 17은 외력 F_c와 댐퍼의 크기 c에 따른 주파수 ω와의 관계를 나타낸 분기 셋이다. Fig. 17에서 알 수 있듯이 외력 F_c는 0.8보다 클 때에 그리고 댐퍼의 크기 c는 1.2보다 작을 때 도약 현상을 관찰 할 수 있다.

비선형 Maxwell 댐퍼를 갖는 시스템은 Fig. 13에서 보았듯이 외력 F_c가 감소함에 따라 변위 X의 반응의 비선형성은 증가하고 또 다른 반응이 나타나, 도약현상뿐만 아니라 반응의 불연속성도 나타난다. 그리고 댐퍼의 크기인 c가 감소함에 따라 변위 X는 Kelvin의 경우와 다르게 증가하나 반응의 불연속성이 나타난다. 또한 Fig. 14에서 보았듯이 댐퍼에 의하여 소산되는 에너지 양 D_0도 같은 양상이 나타나나 외력이나 댐퍼의 크기에 상관없이 시스템의 공진 주파수에서 D_0의 최대값으로 만나는 것을 볼 수 있다. 다음 Fig. 18은 외력 F_c와 댐퍼의 크기 c에 따른 주파수 ω와의 관계를 나타낸 분기 셋이다. Fig. 18에서 보듯이 외력 F_c나 댐퍼 c에 의한 주파수 ω가

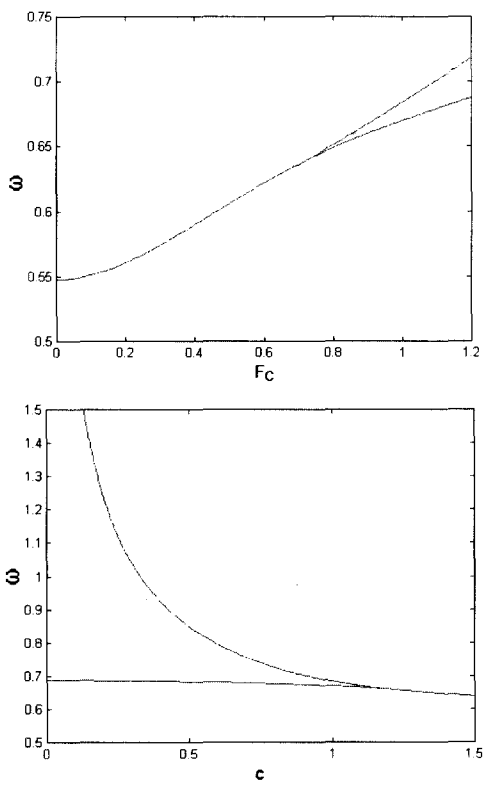


Fig. 17 Bifurcation set in F_c & c vs ω plane(Kelvin model system)

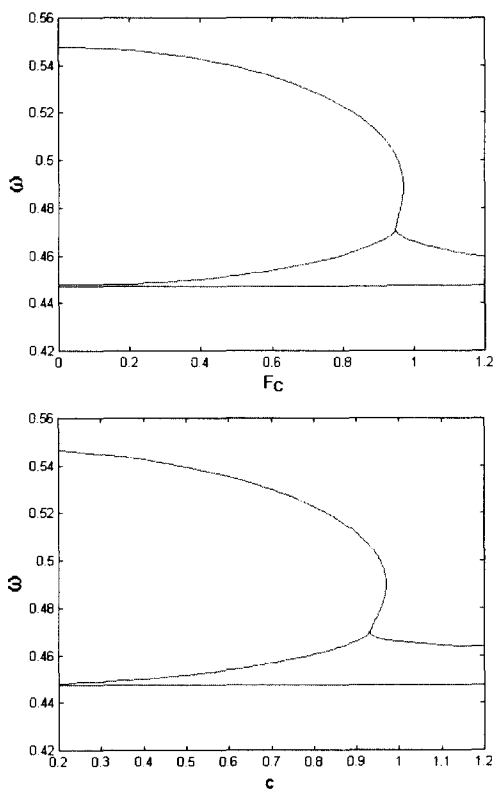


Fig. 18 Bifurcation set in F_c & c vs ω plane (Maxwell model system)

비슷한 양상을 보이며, 분기 셋이 2에서 4까지 다양하게 나타난다. 비선형 3-parameter 댐퍼를 갖는 시스템은 Fig. 15(a)와 Fig. 15(b)에서 보았듯이 비선형 Maxwell의 경우와 비슷하게 외력 F_c가 감소함에 따라 변위 X의 반응의 비선형성은 증가하고 또 다른 반응이 나타나 도약현상뿐만 아니라 반응의 불연속성도 나타난다. 그러나 댐퍼의 크기인 c가 감소함에 따라 변위 X는 줄어들게 되고 불연속성이 나타나지 않는다. 또한 Fig. 16(a)와 Fig. 16(b)에서 보았듯이 댐퍼에 의하여 소산되는 에너지 양 D_0은 외력 F_c가 감소함에 따라 도약현상과 반응의 불연속성을 볼 수 있으나 댐퍼의 크기는 1에서 50으로 변하여도 크게 바뀌지 않는 것을 볼 수 있다. 다음 Fig. 19는 외력 F_c와 댐퍼의 크기 c에 따른 주파수 ω와의 관계를 나타낸 분기셋이다.

Fig. 19에서 보듯이 외력 F_c가 0.2부분까지는 3개의 분기 셋이 나타나나 그 이후로는 2개로 줄어든다. 그러나 댐퍼의 크기 c의 변함에 따른 분기 셋의 변화는 거의 없다.

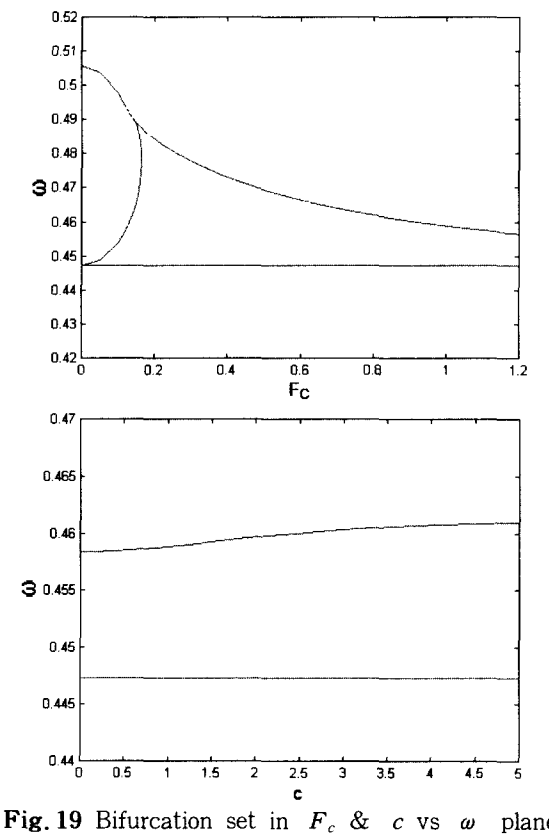


Fig. 19 Bifurcation set in F_c & c vs ω plane (3-parameter model system)

이와 같이 분기셋을 이용하여 외력 F_c와 댐퍼의 크기 c의 변화에 따른 시스템의 공진 현상을 예측할 수 있어, 시스템 설계할 때 유용하게 이용되어 질 수 있다.

이러한 조화균형법으로 구한 안정해들(stable solutions)의 존재유무와 정확성은 조화균형법을 적용하기 이전의 운동방정식의 해를 직접시간적분법(direct time integration method)에 의해 구함으로써 검증할 수 있으며 본 연구의 대상과 유사한 시스템에 대해 양성영 등[7]에 의해 발표되었다. 비선형시스템의 특징인 초기조건의 상이함에 의한 복수의 해(multiple solutions)의 존재도 역시 같은 방법으로 검증할 수 있으며 양성영 등[7]에 의해 발표되었다.

5. 요약 및 결론

비선형 점탄성 댐퍼를 갖는 시스템의 반응을 알아보기 위해 비선형 스프링과 대쉬포트 요소를 여러 가지 방법으로 조합하여 각각의 반응을 조화균형법을 이용하여 알아보았다. 가진력과 댐핑의 크기에 따른 반응을 관찰한 결과 여러 가지 모델이 상이한 반응을 보일 수 있다는 것을 알 수 있었고 분기셀을 구함으로써 분기가 일어날 수 있는 조건을 알 수 있었다. 점탄성 댐퍼를 포함한 특정 시스템을 모델링할 때는 이러한 점들을 고려하여 적절한 댐퍼모델을 선택해야 한다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Sun, C. T. and Lu, Y. P., 1995, Vibration Damping of Structural Elements, Prentice Hall.

(2) Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., 1985, Vibration Damping, John Wiley & Sons, pp. 67~69.

(3) Jordan, D. W. and Smith, P., 1999, Nonlinear Ordinary Differential Equations, third ed., Oxford University Press.

(4) 양성영, 1999, "비선형 히스테리시스 댐퍼를 갖는 진동계의 해석", 서울시립대학교 석사 논문.

(5) Gandhi, F. and Chopra, I., 1996, "A Time-Domain Non-linear Viscoelastic Damper Model,"

Smart Materials and Structures. 5, pp. 517~528.

(6) Seydel, R., 1988, From Equilibrium to Chaos : Practical Bifurcation and Stability Analysis, Elsevier, New York.

(7) 양성영, 장서일, 김상주, 2000, "비선형 히스테리시스 댐퍼를 갖는 진동계의 해석," 한국소음진동공학회지, 제 10 권, 제 3 호, pp. 531~535.