

Runge-Kutta법을 이용한 축대칭 하중을 받는 직교 이방성 구형셸의 해석

Analysis of Orthotropic Spherical Shells under Symmetric Load Using Runge-Kutta Method

김 우 식* 권 익 노** 권 택 진***
Kim, Woo-Sik Kwun, Ik-No Kwun, Taek-Jin

Abstract

It is often hard to obtain analytical solutions of boundary value problems of shells. Introducing some approximations into the governing equations may allow us to get analytical solutions of boundary value problems. Instead of an analytical procedure, we can apply a numerical method to the governing equations. Since the governing equations of shells of revolution under symmetric load are expressed by ordinary differential equations, a numerical solution of ordinary differential equations is applicable to solve the equations.

In this paper, the governing equations of orthotropic spherical shells under symmetric load are derived from the classical theory based on differential geometry, and the analysis is numerically carried out by computer program of Runge-Kutta methods. The numerical results are compared to the solutions of a commercial analysis program, SAP2000, and show good agreement.

keywords : Orthotropic, Runge-Kutta Method, Symmetric Load, Spherical Shells

1. 서 론

일반적으로 셸이란 그 두께가 다른 두 방향의 길이에 비하여 현저히 작은 3차원 곡면구조를 말한다. 셸 구조는 구조물 자체의 곡률을 이용하여 외부 하중을 면내력으로 지지하는 매우 효율적인 구조 형태이다. 이러한 특성으로 셸 구조물의 예는 건축물, 자동차, 선박, 항공기 등 많은 공학적인 구조물에서 볼 수 있다.

직교하는 두 방향에 대하여 서로 다른 탄성적 성질을 가지는 재료를 직교이방성재료라고 한다. 셸이나 판 구조물의 경우 처짐이나 좌굴에 대한 역학적 성능을 높이기 위하여 구조물에 한 방향 혹은 직교 방향으로 보강재를 사용하는 경우를 흔히 볼 수 있

으며, 이러한 경우 해석을 위하여 부재와 보강재를 하나의 등가 직교이방성재료로 취급 할 수 있다. 또한 재료가 제작되는 과정에서 직교이방성을 갖는 복합재료들도 많은 공학 분야에서 이용되고 있다.

셸의 선형 경계치 문제를 일반적으로 해석하기 위하여 유도하는 기초방정식은 편미분방정식으로 표현된다. 그러나 구형셸이나 원통형셸이 축대칭 하중을 받는 경우의 기초방정식은 상미분방정식으로 표현이 된다. 하지만 기초방정식이 상미분형태의 방정식이 라 하더라도 실제로 방정식의 해를 구하지 못하는 경우가 대부분이다. 이러한 경우에 여러가지 수치해법을 이용하면 근사적인 해를 얻을 수 있다. Pestel과 Lekie는 보와 원판의 상미분 기초방정식의 해를 구하는데 Runge-Kutta법을 적용할 수 있음을 언급하였고¹⁾, Minakawa는 등방성 재료로 된 물탱크, 원통형 지붕, 구형셸의 해석에 이러한 방법을 적용하였다.^{2,3)}

* 정회원 · 성균관대 석사과정

** 정회원 · 성균관대 건축학과, 공학박사

*** 정회원 · 성균관대 건축학과 교수, 공학박사

본 논문에서는 재료적으로는 두 면내방향의 탄성 계수가 다른 직교이방성재료를 다루며, 미분기하학을 이용하여 축대칭 하중을 받는 구형셀의 기초방정식을 유도한다. 그리고 정확하고 안정적이며 프로그램으로 구현이 쉬운 장점을 가진 4차 Runge-Kutta 법을 기초방정식에 적용하여 셀의 수치해석을 수행함으로써 본 논문에서 제안된 이론의 적용범위를 알아보고자 한다.

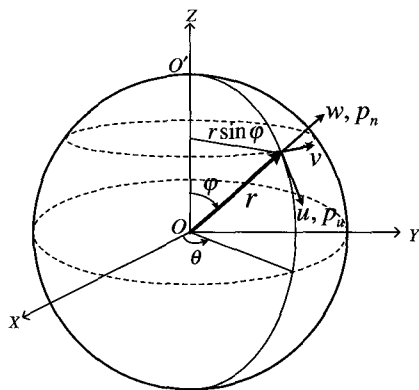
2. 축대칭 하중을 받는 구형 셀의 기초방정식

2.1 기본 가정

두께를 갖는 셀은 엄밀하게는 3차원 체이다. 이러한 3차원 체를 중앙면 또는 기준면의 거동을 중심으로 2차원화 하는 것이 셀이론의 기본이라 할 수 있으며, 본 논문에서는 다음의 Kirchhoff-Love이론을 도입한다.⁴⁾⁵⁾

- i) 셀의 두께는 얇다.
- ii) 처짐은 작다.
- iii) 두께 방향의 응력은 생략할 수 있다.
- iv) 중앙면에 대한 법선은 변형 후에도 법선이며, 그 길이는 변하지 않는다.

위 식에서 i)은 $h/R \ll 1$, 즉 $1 + h/R \approx 0$ 을 ii)는 미소변형이론의 범위임을 의미한다. 또한 iii)은 $\sigma_n \approx 0$ 을 의미하고, iv)는 $\gamma_{1n} = 0$, $\gamma_{2n} = 0$, $\epsilon_n = 0$ 를 의미한다. R , h , r 은 각각 셀의 곡률반경과 두께, 반지름이다.



〈그림 1〉 구형셀의 좌표계

2.2 축대칭 구형셀의 기초방정식

셀의 형상을 나타내는 기준면으로서, 두께방향의 적분 $\int \xi d\xi = 0$ 가 되는 중앙면을 채택한다.

구형셀의 좌표계에 있어서 경선방향 좌표를 φ , 위선방향 좌표를 θ 로 나타낸다. 좌표상의 임의점에서 φ 방향의 변위를 u , θ 방향의 변위를 v , 법선방향의 변위를 w 로 나타낸다.

미분기하학을 이용하여 구형셀의 기초방정식을 유도하는 과정에서 축대칭 조건인 $\partial(\)/\partial\theta = 0$ 과 $v = N_{\varphi\theta} = M_{\varphi\theta} = Q_{\theta} = q_{\theta} = 0$ 을 적용하여 기초방정식을 구한다.⁴⁾

2.2.1 변형률-변위 관계식

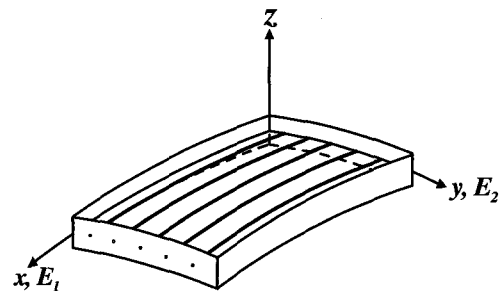
축대칭 조건을 적용한 구형셀의 변형률-변위 관계식을 중립면에서의 변형률 ϵ_{φ}^0 , ϵ_{θ}^0 와 곡률 x_{φ} , x_{θ} 로 나타내면 다음과 같다.⁴⁾⁵⁾

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi} &= \epsilon_{\varphi}^0 + \zeta x_{\varphi} \\ \epsilon_{\theta} &= \epsilon_{\theta}^0 + \zeta x_{\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varphi}^0 &= \frac{1}{r} (u,_{\varphi} + w) \\ \epsilon_{\theta}^0 &= \frac{1}{r} (u \cot \varphi + w) \\ x_{\varphi} &= -\frac{1}{r^2} (w,_{\varphi\varphi} - u,_{\varphi}) \\ x_{\theta} &= -\frac{1}{r^2} \cot \varphi (w,_{\varphi\varphi} - u) \end{aligned} \tag{2}$$

2.2.2 구성 방정식



〈그림 2〉 직교 이방성 재료

직교하는 두 면내방향의 탄성계수를 각각 E_1 과

E_2 라 하면, 구형셀에서의 직교좌표계에서의 φ 방향의 탄성계수를 E_1 , θ 방향의 탄성계수를 E_2 라 하고, 프와송비 $\nu_{\varphi\theta}$, $\nu_{\theta\varphi}$ 를 각각 ν_{12} , ν_{21} 라고 한다.

변형률과 응력의 관계는 다음과 같다.⁶⁾

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, 탄성계수 C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} 는

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & C_{12} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{21} &= \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & C_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \end{aligned} \quad (5)$$

식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_\varphi + \nu_{21}\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_\theta + \nu_{12}\varepsilon_\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

식(1)을 식(6)에 대입하고 ζ 방향에 대해서 적분하여 합응력과 합모멘트를 구하면 다음과 같다.^{4),5)}

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi d\zeta = C_1 (\varepsilon_\varphi^0 + \nu_{21}\varepsilon_\theta^0) \\ N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta d\zeta = C_2 (\varepsilon_\theta^0 + \nu_{12}\varepsilon_\varphi^0) \\ M_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi \zeta d\zeta = D_1 (\varepsilon_\varphi^0 + \nu_{21}\varepsilon_\theta^0) \\ M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta \zeta d\zeta = D_2 (\varepsilon_\theta^0 + \nu_{12}\varepsilon_\varphi^0) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 면내강성 C_1 , C_2 , 휨강성 D_1 , D_2 는

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, & C_2 &= \frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \\ D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_2 &= \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \end{aligned} \quad (8)$$

2.2.3 평형방정식

평형방정식을 구하기 위하여 포텐셜에너지를 이용한다. 변형에너지를 U , 외부일을 W 라 하면 포텐셜에너지는 다음과 같다.^{4),5)}

$$\Pi = U - W \quad (9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) dV \quad (10)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_S F \cdot u ds$$

최소포텐셜에너지원리를 만족하기 위하여 식(9), (10)에 식(1)과 식(7)을 대입하고 변분하면 다음의 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \sum \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left\{ \left[T \delta u + \frac{V}{r} \delta w - M_\varphi \frac{\delta w, \varphi}{r} \right] r \sin \varphi \right\}_{\varphi_0}^{\varphi_1} \\ &+ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (L_u \cdot \delta u + L_n \cdot \delta w) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} T &= N_\varphi + M_\varphi / r \\ V &= M_{\varphi, \varphi} - \cot \varphi (M_\theta - M_\varphi) \\ L_u &= (N_\theta / r) \cot \varphi + (M_\theta / r^2) \cot \varphi - T, \varphi / r \\ &\quad - (T / r) \cot \varphi - p_u \\ L_n &= T / r - M_\varphi / r^2 + N_\theta / r - V, \varphi / r^2 \\ &\quad - (V / r^2) \cot \varphi - p_n \end{aligned} \quad (12)$$

위식으로부터 φ 방향과 법선방향의 평형방정식을 구할 수 있으며, 이때 최소포텐셜에너지원리를 만족하기 위하여 2개의 평형방정식은 $L_u = 0$, $L_n = 0$ 이 된다.

3. 상미분방정식의 수치적분

3.1 상미분 연립방정식

앞장의 식(12)의 2개의 평형방정식과 식(7)의 4개의 구성방정식을 이용하면 미지의 변위와 합응력, 합모멘트에 대한 다음의 상미분연립방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{d}{d\varphi}\{g\} = [A]\{g\} + \{p\} \quad (13)$$

여기서, 각 행렬과 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{g\}^T &= [d_g \ S_g], \quad \{d_g\}^T = [u \ w \ w, \varphi/r], \\ \{S_g\}^T &= [T \ V/r \ M_\varphi], \\ \{p\}^T &= [0 \ 0 \ 0 \ -rp_u \ -rp_n \ 0] \end{aligned} \quad (14)$$

행렬 [A]의 각 성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\nu_{21} \cot \varphi, \quad a_{12} = -(1 + \nu_{21}), \quad a_{13} = 0, \\ a_{14} &= \frac{r}{C_1}, \quad a_{15} = 0, \quad a_{16} = -\frac{1}{C_1}, \\ a_{21} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = r, \\ a_{24} &= 0, \quad a_{25} = 0, \quad a_{26} = 0, \\ a_{31} &= 0, \quad a_{32} = -\frac{1}{r}(1 + \nu_{21}), \\ a_{33} &= -\nu_{21} \cot \varphi, \quad a_{34} = \frac{1}{C_1}, \\ a_{35} &= 0, \quad a_{36} = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{r^2}{D_1} \right), \\ a_{41} &= \left(\frac{C_2}{r} + \frac{D_2}{r^3} \right) (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot^2 \varphi, \\ a_{42} &= \frac{C_2}{r} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot \varphi, \\ a_{43} &= -\frac{D_2}{r^2} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot^2 \varphi, \\ a_{44} &= -(1 - \nu_{21}) \cot \varphi, \quad a_{45} = 0, \quad a_{46} = 0, \\ a_{51} &= \frac{C_2}{r} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot \varphi, \\ a_{52} &= \frac{C_2}{r} (1 - \nu_{12}\nu_{21}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} a_{53} &= 0, \quad a_{54} = (1 + \nu_{21}), \\ a_{55} &= -\cot \varphi, \quad a_{56} = -\frac{1}{r}(1 + \nu_{21}), \\ a_{61} &= \frac{D_2}{r^2} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot^2 \varphi, \quad a_{62} = 0, \\ a_{63} &= -\frac{D_2}{r} (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \cot^2 \varphi, \quad a_{64} = 0, \\ a_{65} &= r, \quad a_{66} = -(1 - \nu_{21}) \cot \varphi \end{aligned}$$

3.2 Runge-Kutta법

상미분방정식을 푸는 여러 가지 수치해석법 중에 4차 Runge-Kutta법을 사용하기로 한다. 다음의 식(16)은 본 논문에서 사용된 4차 Runge-Kutta법의 형태이다.⁷⁾

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ k_0 &= \Delta f(x_i, y_i) \\ k_1 &= \Delta f(x_i + \frac{\Delta}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}) \\ k_2 &= \Delta f(x_i + \frac{\Delta}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= \Delta f(x_i + \Delta, y_i + k_2) \\ \Delta &= x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad (17)$$

3.3 Runge-Kutta법을 이용한 수치해

구간 $[\varphi_0 \ \varphi_1]$ 에 대하여 식(13)을 적분하는데 4차 Runge-Kutta법을 이용하여 상미분 연립방정식의 해를 구하면 다음과 같다.^{1),2),7)}

$$\begin{Bmatrix} d_g(\varphi_1) \\ S_g(\varphi_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^{\varphi_1} & U_{12}^{\varphi_1} \\ U_{21}^{\varphi_1} & U_{22}^{\varphi_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_g(\varphi_0) \\ S_g(\varphi_0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_p^{\varphi_1} \\ S_p^{\varphi_1} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

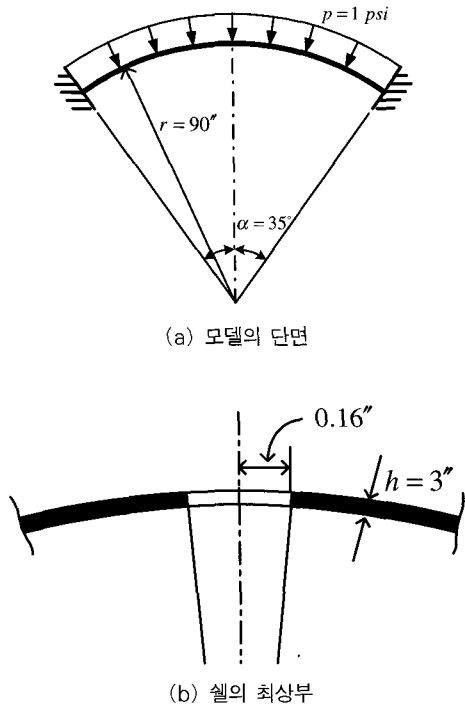
행렬 [U]와 $[d_p^{\varphi_1} \ S_p^{\varphi_1}]^T$ 는 수치적으로 구하여지고, 식(18)에 해석하고자 하는 쉘구조물의 경계조

건을 적용하면 구조물을 해석할 수 있게 된다.

4. 수치해석 및 결과

4.1 해석 모델

본 논문에서는 해석 모델로써 Timoshenko와 동일한 셀구조물을 선택하였다.⁸⁾ 해석모델은 <그림 3>과 같이 반경이 90 inch, 법선 방향의 두께가 3 inch이고 모델의 최상부에는 반경 0.16 inch 크기의 구멍이 있으며 $\phi=35^\circ$ 인 위치에서 고정인 구형셀 구조물이다. 하중형태는 법선방향으로 1 psi 의 등분포 압력이 작용한다.



<그림 3> 해석 모델

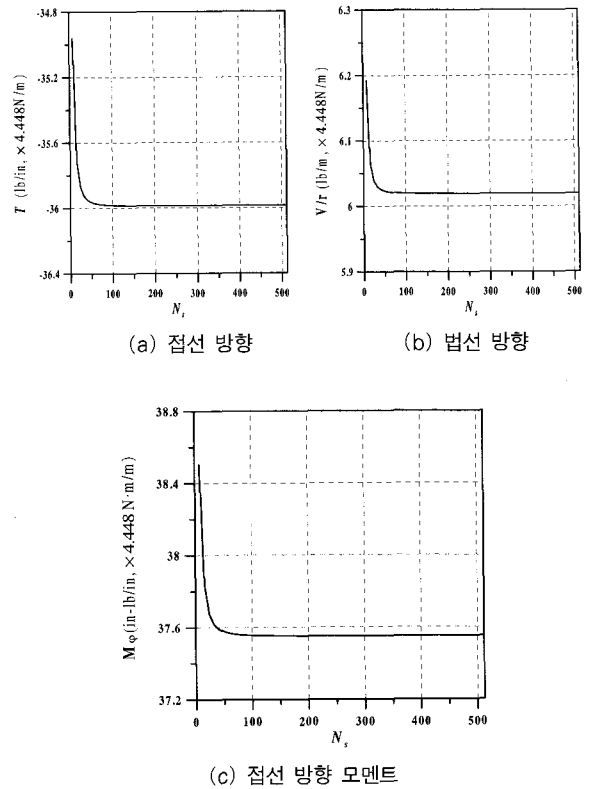
<그림 3>의 (b)는 모델의 최상부의 뚫려진 부분을 보여주고 있다.

4.2 해석 결과 및 비교

앞장에서는 수치해석 기법을 이용하여 미분기하학으로 유도된 상미분 연립방정식의 해를 구하는 과정을 정식화하였다. 본 장에서는 이렇게 정식화 된 식을 프로그래밍하고 구간 내에서 분할되는 요소의

개수, N_s 와 탄성계수비 E_1/E_2 를 변화시켜 해석을 수행한다.

N_s 의 증가에 따른 고정지점에서의 접선 방향, 법선 방향의 단위길이 당 힘과 접선 방향의 단위길이 당 모멘트의 해석 결과는 <그림 4>와 같다. (a), (b), (c) 모두 N_s 가 100이 되기 전에 빠르게 수렴함을 보인다.

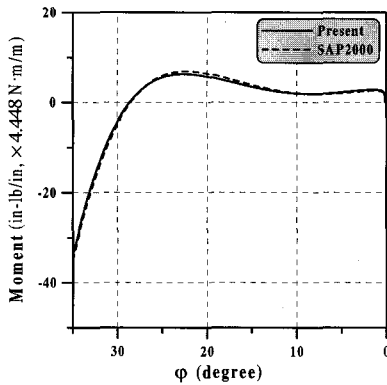


<그림 4> N_s 의 변화 따른 합응력

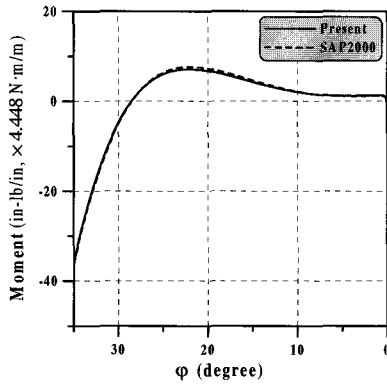
<그림 5>은 E_2 의 값을 고정하고 E_1/E_2 비율 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2로 변화시켜 각 경우에 ϕ 값에 따른 ϕ 방향의 모멘트를 비교한 그래프로, 각 결과들을 SAP2000과 비교하여 보여주고 있다.

<그림 5>의 (a), (b)에서는 E_1/E_2 가 1보다 작아짐에 따라 E_1 방향의 강성이 작아져 정·부모멘트의 최대값이 작아짐을 보이고, (d), (e)에서는 반대로 E_1/E_2 가 커질수록 강성이 커져 모멘트의 최대값이 커짐을 보인다. 그리고 전자의 경우, 최상부의 구멍 주위에서 지점부와 다른 부호의 모멘트가 집중되고 후자의 경우에는 지점부와 같은 부호의 모멘트가 집

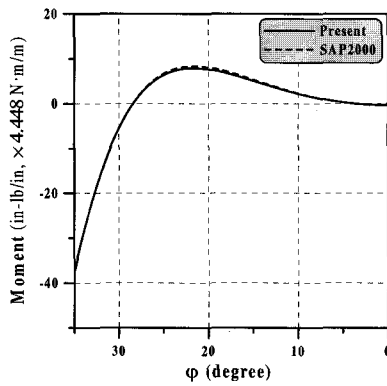
중첩을 보이고 있다.



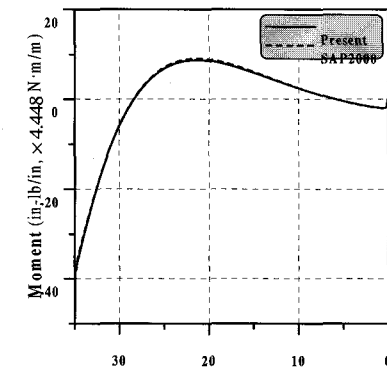
(a) $E_1/E_2 = 0.8$



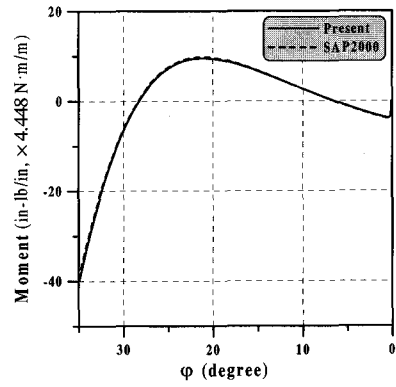
(b) $E_1/E_2 = 0.9$



(c) $E_1/E_2 = 1.0$

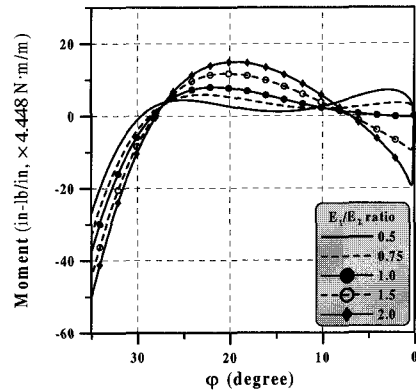


(d) $E_1/E_2 = 1.1$



(e) $E_1/E_2 = 1.2$

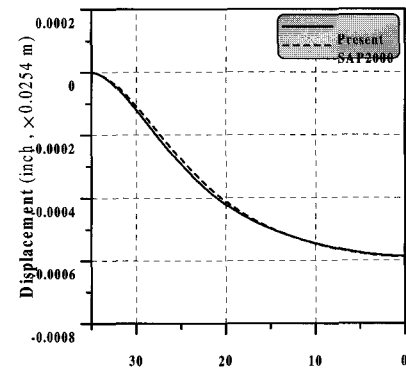
<그림 5> E_1/E_2 비에 따른 모멘트



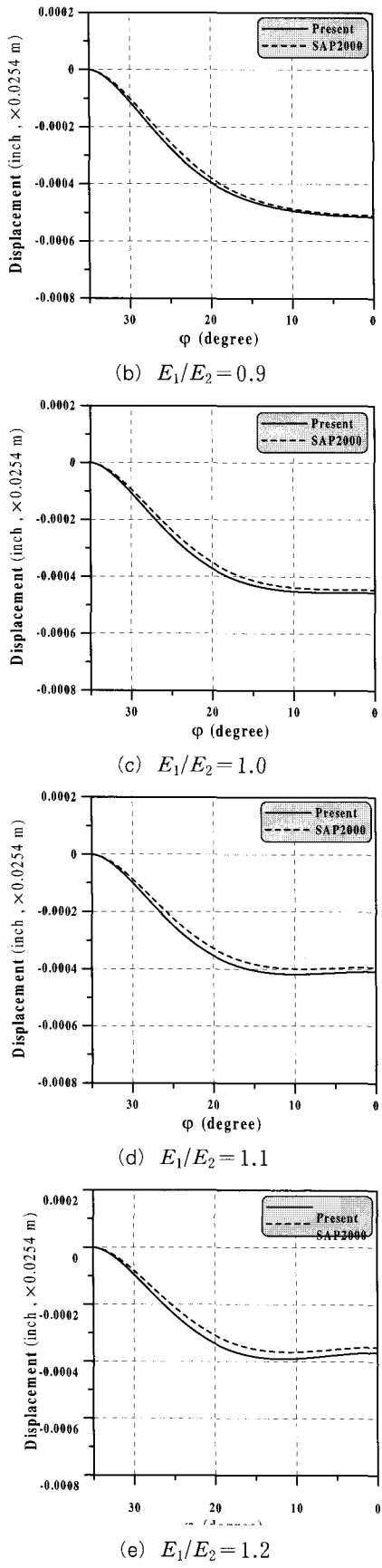
<그림 6> 탄성계수비의 변화에 따른 모멘트 비교

<그림 6>은 E_1/E_2 비에 따른 모멘트를 변화를 보여주고 있다.

<그림 7>는 E_2 를 고정하고 탄성계수비 E_1/E_2 를 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2로 변화시켜 해석한 범선 방향의 처짐을 나타낸 그래프이다. <그림 7>에서는 E_1/E_2 가 증가함에 따라 ϕ 의 전구간에 걸쳐 범선 방향의 처짐이 감소함을 보이고 있다.



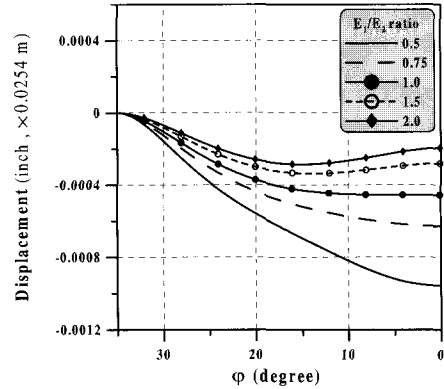
(a) $E_1/E_2 = 0.8$



<그림 7> E_1/E_2 에 따른 법선 방향의 처짐

또한 (d), (e)처럼 E_1/E_2 가 1보다 클 경우에는 최대 처짐이 상부의 구멍주위에서 일어나지 않고 구간의 중간에서 일어나고 있다.

<그림 8>은 E_1/E_2 에 따라 ϕ 의 전구간 내에서의 법선 방향 처짐을 비교하고 있다. E_1/E_2 가 작아질수록 구멍주위의 처짐의 증가폭이 커진다.



<그림 8> 탄성계수비에 변화에 따른 법선 방향 처짐 비교

5. 결론

본 논문은 축대칭 조건의 직교이방성 구형셀의 기초방정식을 미분기하학을 이용하여 유도하였고 상미분방정식의 수치해법인 Runge-Kutta법을 이용하여 해석을 수행하였다.

탄성계수비가 커짐에 따라 휨모멘트가 커짐을 보이고 있는데 이는 E_1 방향의 강성이 커짐에 따라서 강성이 큰 쪽으로 응력 분배가 더 많이 일어나기 때문으로 생각된다. 해석결과를 SAP2000과 비교하였을 때 모멘트의 경우 거의 일치함을 보였으며 처짐의 경우도 그 차이가 미소함을 보임으로써 본 논문에서 수행한 방법이 직교이방성 재료로 구성된 축대칭 조건의 구형셀에도 적용할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 축대칭 조건의 다른 직교 이방성 회전체 셀의 경우에도 이러한 방법을 적용할 수 있을 것이다.

참고문헌

- 1) Pestel, E. C. and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, 1963.

- 2) Minakawa, Y., "Application of Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations to Boundary Value Problems of Plates and Shells", 日本建築學會構造系論文集, No.483, 1996, pp.111-120.
- 3) Minakawa, Y., "常微分方程式の数値解を用いた厳密解の求められる有限要素法 Conical Shell の例題, 日本建築學會大會學術講演梗概集, 1996, pp.965-966.
- 4) 권택진, 한상을, 최현식, 김승덕, 정명채, 서삼열, 쉘구조론, 한국전산구조공학회편, 1998, p.331
- 5) Kraus, Harry, *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, 1967.
- 6) Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates*, CRC Press, 1997.
- 7) Al-Khafaji, Amir W., and Tooley, John R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Elsevier Science Publishers B.V.,
- 8) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959, p.580 1987.
- 9) Flügge, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- 10) 成岡昌夫, 遠田良喜, 伝達マトリックス法, 培風館, 1970.