

측정 모달 데이터를 이용한 골조의 강성행렬 및 질량행렬 추정에 관한 연구

A Study on Estimated Stiffness and Mass Matrices from Modal Data at Measured Points

한 동 호* 이 치 형** 윤 성 기***
Han, Dong-Ho Lee, Chy-Hyoung Yoon, Sung-Kee

Abstract

In this study, a method that estimates stiffness and mass matrices of shear building from modal test data is presented. This method applied of building depends on the number of measurement points that are less in number than the total structural degrees of freedom, and on the first two orders of structural mode measured. By means of this method it is possible to use modal data of unmeasurable points to estimate total stiffness and mass matrices of structure. Some examples are studied in this paper, and its result shows that this method is reliable.

keywords : Stiffness matrix, Mass matrix, Modal analysis, Degrees of freedom

1. 서 론

최근 내진설계의 강화와 함께 구조물 손상의 조기 발견과 예측을 위한 안전진단의 필요성이 대두되고 있다. 구조물의 정확한 안전진단을 위해서는 실험추정을 통한 거동의 모니터링기법에 대한 연구와 더불어 손상의 역학적 분석, 구조시스템의 손상 모델화 해석을 통한 진단기술이 요구된다. 실험추정을 통한 거동의 모니터링기법으로 구조물의 고유진동수와 모드형상 등의 동적 특성치를 모달 실험(modal test)로부터 얻는 연구가 활발히 진행되고 있다.

모달 실험시 가속도계에서 측정되어 얻어지는 고유진동수, 모드형상 등의 데이터는 실제로 구조물의

전체 자유도수만큼 센서를 통하여 측정할 수 없으므로 전체 자유도수보다 적은 제한된 위치에서 얻어진다. 그러므로 구조물의 자유도를 감소하는 방법에 초점을 둔 연구와 전체 자유도수보다 적은 제한된 위치의 센서에서 모달 실험을 통하여 진동수 데이터로부터 질량과 강성을 얻는 연구가 최근 진행되고 있다^{1)~4)}.

일반적인 골조 구조물의 횡변위는 전단변형과 휨변형으로 구성되는데, 대다수 골조 구조물의 횡변위는 휨변형이 전단변형에 비해 상대적으로 작으므로 휨변형의 영향을 무시할 수 있다⁵⁾.

그러므로, 본 연구에서는 구조물을 전단형 건물로 취급하여 다음과 같이 가정한다.

- (1) 전체 질량은 각 층에 집중된다.
- (2) 바닥은 기둥에 비해 무한한 강성을 가진다.
- (3) 구조물 변형은 기둥 축력과는 독립적이다.

* 학생회원 · 부산대학교 대학원 석사과정

** 정회원 · 부산대학교 대학원 박사수료

*** 정회원 · 부산대학교 건축공학과 교수, 공학박사

위의 가정으로부터 구조물 전체의 무수한 자유도를 각 층의 자유도로 전환하였다.

강성은 골조 구조물의 횡강성만을 고려한 강성행렬 $[K]$ 로 나타내어 사용하며, 질량은 구조물을 각 층마다 1자유도의 집중질량으로 치환하여 질량행렬 $[M]$ 로 나타내어 사용한다.

본 연구에서는 전체 자유도수보다 적은 수의 제한된 위치에서 센서를 통하여 측정된 모달 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터를 추정하고, 또한 다자유도계 비감쇠 운동방정식의 특성방정식에서 처음 2개 차수의 모드를 이용하여 미측정 구간의 강성행렬과 질량행렬의 추정방법을 제시하여 효율적으로 구조물의 동적 특성과 강성과 질량을 추정하는 것을 연구의 목적으로 한다.

2. 미측정 층의 모달 데이터 추정

본 장에서 설명하는 추정 방법은 전체자유도보다 적은 두 곳에서 센서로 측정된 모달 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터인 모드형상을 추정하는 방법이다.

미측정 구간의 모달 데이터를 추정하기 위한 다자유도계 비감쇠 운동방정식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \tag{1}$$

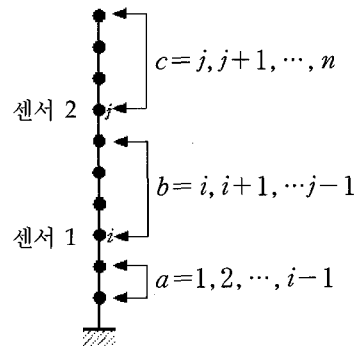
여기서, $\{\ddot{u}\}$ 는 모달 가속도 벡터이고 $\{u\}$ 는 모달 변위 벡터이며, $\{F\}$ 는 외력 벡터이다.

그리고, 강성행렬 $[K]$ 와 질량행렬 $[M]$ 은 다음 식과 같이 나타내어 사용하였다.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n-1} & m_n \end{bmatrix}$$

식(1)의 특성방정식은 다음과 같다.



<그림 1> 센서위치에 따른 구간

$$([K] - \lambda_l [M])\phi_l = 0 \tag{2}$$

여기서, λ_l 은 l 번째의 고유치이며, ϕ_l 은 l 번째 모드형상이다.

<그림 1>에서 측정하는 센서 1과 센서 2의 위치를 기준으로 a, b, c 의 3구간으로 나누면 특성 방정식인 식(2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left\{ \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & 0 \\ k_{ba} & k_{bb} & k_{bc} \\ 0 & k_{cb} & k_{cc} \end{bmatrix} - \lambda_l \begin{bmatrix} m_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & m_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & m_{cc} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

a 는 $1, 2, \dots, i-1$ 이고, b 는 $i, i+1, \dots, j-1$ 이며, 그리고 c 는 $j, j+1, \dots, n$ 의 범위인 구간이다.

여기서 $i(i \neq 1)$ 는 미측정된 첫 번째 층이며, $j(j \leq n)$ 는 미측정된 마지막 층이고, n 은 전체 건물높이인 최상층을 의미한다.

식(3)의 k_{ba}, k_{bc} 는 다음과 같다.

$$k_{ba} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -k_i \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = k_{ab}^T \tag{4a}$$

$$k_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ -k_j & \cdots & 0 \end{bmatrix} = k_{cb}^T \tag{4b}$$

추정하는 미측정 구간인 b 구간의 식은 식(3)의 두 번째 방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_{ba}\phi_a + k_{bb}\phi_b + k_{bc}\phi_c - \lambda_l m_{bb}\phi_b = 0 \tag{5}$$

식(5)에서 k_{ba}, k_{bc} 인 식(3)을 대입하고 미측정 b 구간의 모드형상행렬 ϕ_b 를 중심으로 정리하면 다음

의 식과 같이 표현된다.

$$k_{bb}\phi_b - \lambda m_{bb}\phi_b = \begin{pmatrix} k_i\phi_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ k_j\phi_j \end{pmatrix}^T \quad (6)$$

식(6)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (k_i + k_{i+1})\phi_i - k_{i+1}\phi_{i+1} - \lambda m_i\phi_i &= k_i\phi_{i-1} \\ -k_{i+1}\phi_i + (k_{i+1} + k_{i+2})\phi_{i+1} \\ &\quad - k_{i+2}\phi_{i+2} - \lambda m_{i+1}\phi_{i+1} = 0 \\ &\quad \vdots \\ -k_{j-1}\phi_{j-2} + (k_{j-1} + k_j)\phi_{j-1} - \lambda m_{j-1}\phi_{j-1} &= k_j\phi_j \end{aligned} \quad (7)$$

강성과 질량의 크기를 나타내기 위한 미측정 구간
의 층별 강성비와 질량비의 분포는 다음과 같이
표현된다.

$$\begin{pmatrix} k_i \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_j \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ \vdots \\ p_j \end{pmatrix} = k\{p\} \quad (8a)$$

$$\begin{pmatrix} m_i \\ m_{i+1} \\ \vdots \\ m_j \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \\ \vdots \\ q_j \end{pmatrix} = m\{q\} \quad (8b)$$

미측정 구간의 강성비 분포 $\{p\}$ 는 질량과 관계없
는 층별 강성들만의 비이며, 질량비 분포 $\{q\}$ 도 강
성과 관계없는 층별 질량들만의 비이다.

식(7)에 미측정 구간의 층별 강성비 분포 $\{p\}$ 와 질
량비 분포 $\{q\}$ 를 대입하고 b 구간의 모드형상 행렬
 $\{\phi_b\}$ 로 나타내면 식(9)과 같다.

식(9)에서 질량과 강성은 $\alpha (= m/k)$ 를 사용하여
나타낸다.

식(9)를 간단하게 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} (p_i + p_{i+1}) - \lambda q_i \alpha & -p_{i+1} & \cdots & 0 \\ -p_{i+1} & (p_{i+1} + p_{i+2}) - \lambda_{i+1} q_i \alpha & -p_{i+2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -p_{j-1} & (p_{j-1} + p_j) - \lambda q_{j-1} \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \\ \vdots \\ \phi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i\phi_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ p_j\phi_j \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[A]\{\phi_b\} = [D] \quad (10)$$

여기서, 행렬 $\{\phi_b\}$ 는 $\{\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{j-1}\}^T$ 이고, 행렬
 $[D]$ 는 $\{\phi_{i-1}, 0, \dots, 0, \phi_j\}^T$ 이다.

식(10)에서 가우스 소거법을 이용하여 미측정 구
간의 모드형상 행렬 $\{\phi_b\}$ 을 구하게 된다.

$$\{\phi_b\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[D] \quad (11)$$

따라서, 식(11)으로부터 센서로 측정된 $i-1$ 번째
층과 j 번째 층의 모달 데이터로부터 구하고자하는
미측정 b 구간(i 층부터 $j-1$ 층까지)의 모달 데이터
인 모드형상 행렬 $\{\phi_b\}$ 을 추정하게 된다.

일반적으로 대다수의 건물의 저층부를 제외한 나
머지 각 층에서는 균등한 질량과 강성을 가진다.

그러므로 대다수의 일반적인 건물에서의 미측정
구간 층별 강성과 질량은 다음과 같다.

$$k_i = k_{i+1} = \cdots = k_j \quad (12a)$$

$$m_i = m_{i+1} = \cdots = m_j \quad (12b)$$

식(12)의 관계에서 식(8)의 미측정 구간의 강성비
분포 $\{p\}$ 는 1이며, 질량비 분포 $\{q\}$ 도 역시 1이 된다.

따라서 식(10)의 행렬 $[A]$ 를 다음과 같이 유도하
여 사용한다.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 - \lambda_i \alpha & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 - \lambda_i \alpha & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 - \lambda_i \alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

위 식의 행렬 $[A]$ 을 이용하여 식(11)으로부터 센
서로 측정된 $i-1$ 번째 층과 j 번째 층의 모달 데이
터로부터 미측정 b 구간의 모달 데이터인 모드형상
행렬 $\{\phi_b\}$ 을 추정하게 된다.

3. 강성행렬 및 질량행렬 추정

두 곳의 센서에서 측정된 모달 데이터와 미측정 구간의 모달 데이터인 모드형상을 추정한 결과를 이용하여 미측정 구간의 강성행렬과 질량행렬을 추정한다.

미측정 구간의 강성행렬과 질량행렬을 추정하기 위하여 다자유도계 비감쇠 운동방정식에 대한 특성방정식인 식(3)에서 미측정 b 구간을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 -k_i {}^l\phi_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) {}^l\phi_i - k_{i+1} {}^l\phi_{i+1} - \lambda m_i {}^l\phi_i &= 0 \\
 -k_{i+1} {}^l\phi_i + (k_{i+1} + k_{i+2}) {}^l\phi_{i+1} - k_{i+2} {}^l\phi_{i+2} \\
 \quad \quad \quad - \lambda m_{i+1} {}^l\phi_{i+1} &= 0 \\
 \vdots & \\
 -k_{j-1} {}^l\phi_{j-2} + (k_{j-1} + k_j) {}^l\phi_{j-1} - k_j {}^l\phi_j \\
 \quad \quad \quad - \lambda m_{j-1} {}^l\phi_{j-1} &= 0 \\
 -k_j {}^l\phi_{j-1} + (k_j + k_{j+1}) {}^l\phi_j - k_{j+1} {}^l\phi_{j+1} - \lambda m_j {}^l\phi_j &= 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

강성행렬과 질량행렬을 구하기 위해서는 2개의 모드가 필요하기 때문에 식(14)를 l 과 r 의 2개 모드로 나타내어 표현하면 식(15)와 같다.

식(15)를 행렬 $[B]$ 와 $\{b\}$ 로 간단하게 표현하면 식(16)과 같다.

$$[B]\{b\} = \{0\} \tag{16}$$

여기서, 행렬 $\{b\}$ 는 $\{k_i, m_i, \dots, k_j, m_j, k_{j+1}\}^T$ 이다.

미측정 구간 모달 데이터 추정 센서의 위치 j 층의 밖인 $j+1$ 층의 모드형상 ${}^l\phi_{i+1}$, ${}^r\phi_{i+1}$, 그리고 강성비 k_{j+1} 가 필요하게 된다. 그러므로 미측정 구간 모

달 데이터 추정과는 달리 $j+1$ 층에서 측정한 모달 데이터가 필요하게 된다.

식(16)에서 질량 m_j 을 1로 가정하고 정리하면 다음과 표현된다.

$$\begin{bmatrix} {}^l\phi_j - {}^l\phi_{j-1} & {}^l\phi_j - {}^l\phi_{j+1} \\ {}^r\phi_j - {}^r\phi_{j-1} & {}^r\phi_j - {}^r\phi_{j+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_j \\ k_{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_l {}^l\phi_j \\ \lambda_r {}^r\phi_j \end{Bmatrix} \tag{17}$$

위 식을 간단히 표현하면 식(18)과 같다.

$$[B']\{b'\} = \begin{Bmatrix} \lambda_l {}^l\phi_j \\ \lambda_r {}^r\phi_j \end{Bmatrix} \tag{18}$$

위 식의 행렬 $\{b'\}$ 는 가우스소거법을 이용하여 다음 식과 같이 구해진다.

$$\{b'\} = ([B']^T [B'])^{-1} [B']^T \begin{Bmatrix} \lambda_l {}^l\phi_j \\ \lambda_r {}^r\phi_j \end{Bmatrix} \tag{19}$$

식(19)에서 얻은 행렬 $\{b'\}$ 에서 강성 k_j 를 얻을 수 있다. 위 식에서 계산된 강성 k_j 은 질량 m_j 를 1로 가정하여 계산된 것이므로 강성과 질량의 상대적인 값이다.

질량 m_j 를 1로 가정하여 계산된 강성 k_j 로부터 미측정 구간의 층별 강성비 분포 $\{p\}$ 와 질량비 분포 $\{q\}$ 를 이용하여 이에 따른 상대적인 나머지 층에서의 강성을 구한다. 이런 방법으로 i 층에서 j 층까지의 강성을 계산하여 강성행렬과 질량행렬을 추정하게 된다.

강성과 질량의 비 α 는 식(9)에서 각 층의 미측정 모드를 결정하는 값으로 식(15)의 마지막 두 방정식인 다음 식(20)이 동시에 만족할 때의 값이다.

$$\begin{bmatrix} {}^l\phi_i - {}^l\phi_{i-1} & -\lambda_l {}^l\phi_i & {}^l\phi_i - {}^l\phi_{i+1} & & \dots & 0 \\ {}^r\phi_i - {}^r\phi_{i-1} & -\lambda_r {}^r\phi_i & {}^r\phi_i - {}^r\phi_{i+1} & & & \\ & & {}^l\phi_{i+1} - {}^l\phi_i & -\lambda_l {}^l\phi_{i+1} & {}^l\phi_i - {}^l\phi_{i+1} & \vdots \\ \vdots & & {}^r\phi_{i+1} - {}^r\phi_i & -\lambda_r {}^r\phi_{i+1} & {}^r\phi_i - {}^r\phi_{i+1} & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & {}^l\phi_j - {}^l\phi_{j-1} & -\lambda_l {}^l\phi_j & {}^l\phi_j - {}^l\phi_{j+1} \\ & & & {}^r\phi_j - {}^r\phi_{j-1} & -\lambda_r {}^r\phi_j & {}^r\phi_j - {}^r\phi_{j+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_i \\ m_i \\ k_{i+1} \\ m_{i+1} \\ \vdots \\ k_j \\ m_j \\ k_{j+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{20}$$

$$-k_j {}^l\phi_{j-1} + (k_j + k_{j+1}) {}^l\phi_j - k_{j+1} {}^l\phi_{j+1} - \lambda_l m_j {}^l\phi_j = 0 \quad (20a)$$

$$-k_j {}^r\phi_{j-1} + (k_j + k_{j+1}) {}^r\phi_j - k_{j+1} {}^r\phi_{j+1} - \lambda_r m_j {}^r\phi_j = 0 \quad (20b)$$

그러므로, 적절한 α 를 산정하기 위해 미측정 구간 모달 데이터 추정과 강성행렬, 질량행렬의 추정 과정을 반복하여 수립시켜 결정한다.

초기치 α 값에서 수립되지 않으면 증분한다.

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \Delta\alpha \quad (21)$$

적절한 α 를 산정하기 위한 수립 조건식은 식(20)에서 유추하여 만든 다음 식을 사용한다.

$$\left| \frac{\lambda_r {}^r\phi_j}{{}^r\phi_{j-1} - 2 {}^r\phi_j + {}^r\phi_{j+1}} \right| - \left| \frac{\lambda_l {}^l\phi_j}{{}^l\phi_{j-1} - 2 {}^l\phi_j + {}^l\phi_{j+1}} \right| < \text{허용오차} \quad (22)$$

위 식의 수립 조건식이 만족할 때까지 반복하여 적절한 α 를 산정한다. 미측정 구간 모달 데이터 추정과 강성행렬, 질량행렬의 추정과정, 그리고 α 값의 산정과정을 <그림 2>에 나타내었다.

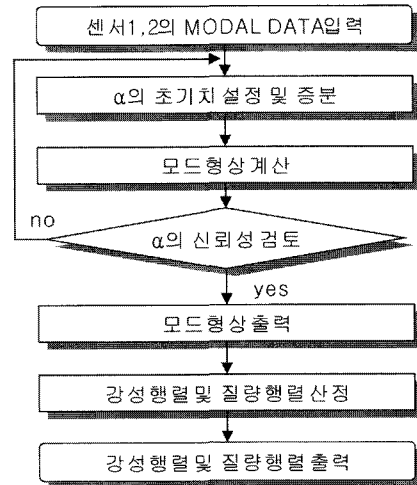
모달 데이터를 측정하는 센서의 위치가 건물의 최상층인 n 층($j=n$)과 최하층인 1층($i-1=1$)인 경우에는 두 곳의 모달 데이터만이 필요하다.

1층에서 측정하는 경우에 0층은 없기 때문에 ${}^l\phi_0$, ${}^r\phi_0$ 가 0이고, 또한 n 층에서 측정하는 경우는 $n+1$ 층이 없기에 k_{n+1} 이 0이다.

따라서 식(15)를 정리하면 식(23)과 같이 표현하게 된다.

식(23)에서 질량 m_j 를 1로 가정하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} {}^l\phi_1 & -\lambda_l {}^l\phi_1 & {}^l\phi_1 - {}^l\phi_2 & \dots & 0 \\ {}^r\phi_1 & -\lambda_r {}^r\phi_1 & {}^r\phi_1 - {}^r\phi_2 & & \\ & & {}^l\phi_2 - {}^l\phi_1 & -\lambda_l {}^l\phi_2 & {}^l\phi_2 - {}^l\phi_3 \\ & & {}^r\phi_2 - {}^r\phi_1 & -\lambda_r {}^r\phi_2 & {}^r\phi_2 - {}^r\phi_3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & {}^l\phi_n - {}^l\phi_{n-1} & -\lambda_l {}^l\phi_n \\ & & & & {}^r\phi_n - {}^r\phi_{n-1} & -\lambda_r {}^r\phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ m_1 \\ k_2 \\ m_2 \\ \vdots \\ k_n \\ m_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (23)$$



<그림 2> 미측정 구간의 모달 데이터 및 강성행렬과 질량행렬 추정 과정

$$\begin{bmatrix} {}^l\phi_j - {}^l\phi_{j-1} & 0 \\ {}^r\phi_j - {}^r\phi_{j-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_j \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_l {}^l\phi_j \\ \lambda_r {}^r\phi_j \end{Bmatrix} \quad (24)$$

위 식을 식(18)과 식(19)의 순서로 강성 k_n 을 추정한다.

강성과 질량의 비 α 는 식(20)을 정리하여 나타낸 다음 식이 동시에 만족할 때의 값이 된다.

$$-k_n {}^l\phi_{n-1} + k_n {}^l\phi_n - \lambda_l m_n {}^l\phi_n = 0 \quad (25a)$$

$$-k_n {}^r\phi_{n-1} + k_n {}^r\phi_n - \lambda_r m_n {}^r\phi_n = 0 \quad (25b)$$

수립 조건식은 식(25)에서 유추하여 만든 다음의 식을 사용한다.

$$\left| \frac{-\lambda_r {}^r\phi_n}{{}^r\phi_n - {}^r\phi_{n-1}} \right| - \left| \frac{-\lambda_l {}^l\phi_n}{{}^l\phi_n - {}^l\phi_{n-1}} \right| < \text{허용오차} \quad (26)$$

식(26)의 수립 조건식이 만족할 때까지 반복하여 적절한 α 를 산정하게 된다.

4. 적용 예제 분석

전체자유도보다 적은 수의 센서에서 측정된 모달 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터와 강성행렬, 질량행렬 추정법의 타당성을 검증하고자 각 경우에 따른 4개의 예제모델에 적용하여 결과를 분석하였다.

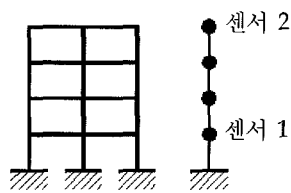
예제모델에서 강성과 질량은 편의상 센서 2 위치의 질량을 1로 하여 각각 비로 나타내어 사용한다. 그리고, 예제에서 사용된 모달 데이터는 각 경우의 예제를 고유치 해석을 통해 계산된 값으로 측정된 모달 데이터로 가정하여 사용한다.

4.1 최상층, 최하층에서 측정한 예제모델

4.1.1 층별 질량과 강성이 균등 분포인 건물

예제 I의 구조물은 <그림 3>과 같이 각층마다 1개의 자유도를 가진 4개의 자유도로 구성된 4층인 건물이며, 층별강성과 질량이 균등한 분포인 건물인 경우이다. <표 1>는 건물의 고유치 해석을 통해 얻은 값 중 최하층인 1층과 최상층인 4층에서의 값을 센서에서 측정된 모달 데이터로 가정된 데이터이다.

<표 1>의 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터의 추정을 통해 모드형상을 추정한 결과는 <표 2>와 같다. 이 추정된 모달 데이터로부터 예제모델 I의 강성행렬과 질량행렬을 추정한 결과는 <표 3>와 같다.



<그림 3> 적용 예제 I

<표 1> 예제 I의 입력 데이터

| 센서위치 | 모달 데이터 | 1차 모드 | 2차 모드 |
|------|--------|--------|---------|
| 1층 | 고유치 | 0.2214 | 1.3221 |
| | 모드형상 | 0.1489 | 0.5006 |
| 4층 | 고유치 | 0.2214 | 1.3221 |
| | 모드형상 | 0.6769 | -0.4598 |

<표 2> 예제 I의 모드형상 추정 결과

| 층 | 모드형상 | |
|---|--------|---------|
| | 1차 | 2차 |
| 1 | 0.1489 | 0.5006 |
| 2 | 0.3918 | 0.3984 |
| 3 | 0.5769 | -0.0548 |
| 4 | 0.6769 | -0.4598 |

<표 3> 예제 I의 강성행렬과 질량행렬 추정 결과

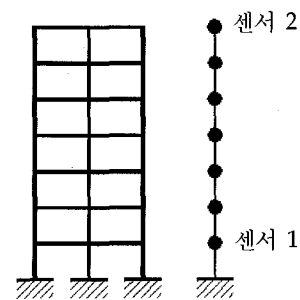
| 층 | 강성 | | | 질량 | | |
|---|-----|--------|--------|-----|--------|--------|
| | 실제 | 추정 | 추정/실제 | 실제 | 추정 | 추정/실제 |
| 1 | 3.0 | 3.0007 | 1.0002 | 2.5 | 2.5014 | 1.0006 |
| 2 | 1.5 | 1.5004 | 1.0002 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 3 | 1.5 | 1.5004 | 1.0002 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.5 | 1.5004 | 1.0002 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |

이 결과에서 강성행렬과 질량행렬의 실제값과 추정값은 미소한 오차를 보여 신뢰성이 있음을 확인하였다.

4.1.2 층별 질량과 강성이 비균등 분포인 건물

<그림 4>와 같은 예제 II의 구조물은 각층마다 1개의 자유도를 가진 7개의 자유도로 구성된 7층인 건물이며, 층별 강성과 질량이 비균등한 분포인 일반 건물인 경우이다.

미측정 층의 층별 강성들의 비와 질량들의 비는 <표 4>와 같으며, <표 5>는 건물의 고유치 해석을 통해



<그림 4> 적용 예제 II

<표 4> 예제 II의 강성비와 질량비 입력 데이터

| 층 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| 강성비 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 질량비 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

〈표 5〉 예제 II의 입력 데이터

| 센서위치 | 모달 데이터 | 1차 모드 | 2차 모드 |
|------|--------|--------|---------|
| 1층 | 고유치 | 0.0845 | 0.5527 |
| | 모드형상 | 0.0727 | 0.2729 |
| 7층 | 고유치 | 0.0845 | 0.5527 |
| | 모드형상 | 0.5376 | -0.4132 |

〈표 6〉 예제 II의 모드형상 추정 결과

| 층 | 모드형상 | |
|---|--------|---------|
| | 1차 | 2차 |
| 1 | 0.0727 | 0.2729 |
| 2 | 0.1402 | 0.4202 |
| 3 | 0.2595 | 0.4053 |
| 4 | 0.3642 | 0.2411 |
| 5 | 0.4483 | -0.0119 |
| 6 | 0.5073 | -0.2605 |
| 7 | 0.5376 | -0.4132 |

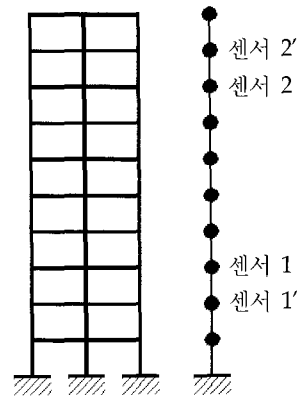
〈표 7〉 예제 II의 강성행렬과 질량행렬 추정 결과

| 층 | 강성 | | | 질량 | | |
|---|-----|--------|--------|-----|--------|--------|
| | 실제 | 추정 | 추정/실제 | 실제 | 추정 | 추정/실제 |
| 1 | 3.0 | 2.9988 | 0.9996 | 2.5 | 2.4941 | 0.9976 |
| 2 | 3.0 | 3.0012 | 1.0004 | 2.0 | 2.0000 | 1.0000 |
| 3 | 1.5 | 1.5006 | 1.0004 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4 | 1.5 | 1.5006 | 1.0004 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.5 | 1.5006 | 1.0004 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 6 | 1.5 | 1.5006 | 1.0004 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 7 | 1.5 | 1.5006 | 1.0002 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |

얻은 값 중 최하층인 1층과 최상층인 7층에서의 값을 센서에서 측정된 모달 데이터로 가정된 데이터이다.

미측정 층의 층별 강성비와 질량비와 1층과 7층의 모달 데이터로부터 미측정 층의 모달 데이터를 추정한 결과는 <표 6>과 같다. 또한 강성행렬과 질량행렬을 추정한 결과는 <표 7>과 같다. 이 결과에서 강성행렬과 질량행렬의 실제값과 추정값은 근사하게 일치함을 보이고 있다. 이 예제의 경우에도 추정법의 신뢰성이 있음을 확인하였다.

4.2 중간층들에서 측정한 예제모델



〈그림 5〉 적용 예제 III

〈표 8〉 예제 III의 입력 데이터

| 센서위치 | 모달 데이터 | 1차 모드 | 2차 모드 |
|------|--------|--------|---------|
| 2층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.0893 | -0.2960 |
| 3층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.1455 | -0.3830 |
| 8층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.4152 | 0.1697 |
| 9층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.4397 | 0.3074 |

4.2.1 층별 질량과 강성이 균등 분포인 건물

예제 III의 구조물은 <그림 5>와 같이 각층마다 1개의 자유도를 가진 10개의 자유도로 구성된 10층인 건물이며, 미측정 구간의 층별 강성과 질량이 균등한 분포인 경우의 예제이다.

<표 8>는 건물의 고유치 해석을 통해 얻은 값 중 2층, 3층과 8층, 9층에서의 값을 센서에서 측정된 모달 데이터로 가정된 데이터이다.

측정된 모달 데이터로 가정된 <표 8>로부터 미측정 층의 모달 데이터인 모드형상을 추정하여 <표 9>와 같은 결과를 얻었다. 추정된 모달 데이터를 이용해서 강성행렬과 질량행렬의 추정된 결과는 <표 10>와 같다.

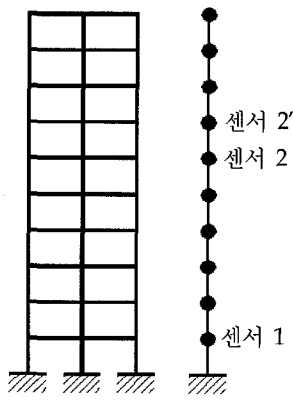
<표 10>의 결과에서 강성행렬과 질량행렬의 실제값과 추정값은 미소한 오차를 보이며 근사하게 일치함을 알 수 있다. 이 결과, 층별 질량과 강성이 균등 분포인 건물의 중간층들에서 측정한 경우에도 추정법이 신뢰성 있음을 보였다.

<표 9> 예제 III의 모드형상 추정 결과

| 층 | 모드형상 | |
|---|--------|---------|
| | 1차 | 2차 |
| 3 | 0.1455 | -0.3830 |
| 4 | 0.2145 | -0.3845 |
| 5 | 0.2775 | -0.3095 |
| 6 | 0.3330 | -0.1728 |
| 7 | 0.3793 | -0.0017 |
| 8 | 0.4152 | 0.1697 |

<표 10> 예제 III의 강성행렬과 질량행렬 추정 결과

| 층 | 강성 | | | 질량 | | |
|---|-----|--------|--------|-----|--------|--------|
| | 실제 | 추정 | 추정/실제 | 실제 | 추정 | 추정/실제 |
| 3 | 3.0 | 3.0009 | 1.0004 | 1.5 | 1.5014 | 1.0006 |
| 4 | 1.5 | 1.4999 | 0.9999 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.5 | 1.4999 | 0.9999 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 6 | 1.5 | 1.4999 | 0.9999 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 7 | 1.5 | 1.4999 | 0.9999 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 8 | 1.5 | 1.4999 | 0.9999 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |



<그림 6> 적용 예제 IV

4.2.2 층별 질량과 강성이 비균등 분포인 건물

<그림 6>와 같은 예제 IV의 구조물은 예제 III과 동일한 건물인 각층마다 1개의 자유도를 가진 10개의 자유도로 구성된 10층인 건물이다. 그러나 측정 위치가 1층과 6층, 7층인 미측정 구간의 층별 강성과 질량이 비균등한 분포인 건물의 예제이다.

미측정 구간에서의 강성들의 비와 질량들의 비는 <표 11>과 같다. 그리고 <표 12>는 건물의 고유치 해석을 통해 얻은 값 중 최하층인 1층과 6층, 7층에

서의 값을 센서에서 측정된 모달 데이터로 가정된 데이터이다.

<표 11>과 <표 12>로부터 미측정 구간의 모달 데이터를 추정된 결과는 <표 13>과 같다.

추정된 미측정 구간의 모달 데이터를 이용하여 미측정 구간의 강성행렬과 질량행렬을 추정된 결과는 <표 14>와 같다.

<표 11> 예제 IV의 강성비와 질량비 입력 데이터

| 층 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|--------|--------|---|---|---|
| 강성비 | 1.6667 | 1.3333 | 1 | 1 | 1 |
| 질량비 | 2 | 1.5 | 1 | 1 | 1 |

<표 12> 예제 IV의 입력 데이터

| 센서위치 | 모달 데이터 | 1차 모드 | 2차 모드 |
|------|--------|--------|---------|
| 1층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.0414 | -0.1557 |
| 6층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.3330 | -0.1728 |
| 7층 | 고유치 | 0.0412 | 0.2987 |
| | 모드형상 | 0.3793 | -0.0017 |

<표 13> 예제 IV의 모드형상 추정 결과

| 층 | 모드형상 | |
|---|--------|---------|
| | 1차 | 2차 |
| 1 | 0.0414 | -0.1557 |
| 2 | 0.0893 | -0.2960 |
| 3 | 0.1455 | -0.3830 |
| 4 | 0.2145 | -0.3846 |
| 5 | 0.2776 | -0.3095 |
| 6 | 0.3330 | -0.1728 |

<표 14> 예제 IV의 강성행렬과 질량행렬 추정 결과

| 층 | 강성 | | | 질량 | | |
|---|-----|--------|--------|-----|--------|--------|
| | 실제 | 추정 | 추정/실제 | 실제 | 추정 | 추정/실제 |
| 1 | 3.0 | 2.9954 | 0.9985 | 2.5 | 2.4858 | 0.9943 |
| 2 | 2.5 | 2.4995 | 0.9998 | 2.0 | 2.0000 | 1.0000 |
| 3 | 2.0 | 1.9996 | 0.9998 | 1.5 | 1.5000 | 1.0000 |
| 4 | 1.5 | 1.4997 | 0.9998 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5 | 1.5 | 1.4997 | 0.9998 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |
| 6 | 1.5 | 1.4997 | 0.9998 | 1.0 | 1.0000 | 1.0000 |

<표 14>의 결과에서 강성행렬과 질량행렬의 실제 값과 추정값은 미소한 오차를 보이며 일치하였다. 이로서 층별 질량과 강성이 비균등 분포인 건물의 1층과 중간층에서 측정된 예제에서도 본 추정법의 신뢰성이 있음을 확인하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 구조물에서 전체 자유도보다 적은 수의 센서를 이용하여 측정된 모달 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터와 강성행렬 및 질량행렬의 추정법을 제시하였고, 이 추정 방법을 예제모델에 적용하여 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 구조물에서 전체자유도보다 적은 센서를 통해 측정되었다고 가정한 모달 데이터로부터 미측정 구간의 모달 데이터를 추정법과 추정된 모달 데이터를 이용한 강성과 질량행렬의 추정법을 개발하였다.
- (2) 적은 측정 위치의 모달 데이터를 이용하여 미측정 구간의 모달 데이터를 추정하고, 강성행렬과 질량행렬을 추정한 결과, 실제의 모달 데이터, 강성행렬 및 질량행렬과 근사적으로 일치하므로 신뢰성을 검증하였다.
- (3) 구조물의 각층에서 강성과 질량이 비균등한 분포인 경우에도, 본 연구에서 제안한 추정방법을 적용하여 추정된 결과, 모달 데이터의 실제값과 추정치가 미소한 오차를 보이므로 강성과 질량이 비균등한 분포인 경우에도 적용가능함을 보였다.

- (4) 측정할 센서의 위치가 구조물의 최상층, 최하층인 경우와 중간층인 경우 등의 예제를 대상으로 본 연구의 제시한 추정법을 적용한 결과, 실제값과 추정값이 근사하게 일치하였다.

본 연구에서 제시한 미측정 구간의 모달 데이터와 강성행렬, 질량행렬의 추정법을 실제 구조물에 적용하는 실험적 연구가 필요하다. 그리고 이 추정법을 활용하면 구조물의 손상을 추정할 수 있다.

참고문헌

1. Farhat, C. and Hemez, F., "Updating Finite Element Dynamic Models Using an Element-by-element Sensitivity Methodology", AIAA., Vol.31, No.9, 1993, pp.1702~1711
2. Yuan, P., Wu, Z. and Ma. X. M., "Estimated Mass and Stiffness Matrices of Shear Building from Modal Data", Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.27, 1998, pp.415~421
3. Kabe, A. M., "Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data", AIAA., Vol.23, No.9, 1985, pp.1431~1436
4. Baruch, M., "Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests", AIAA., Vol.16, No.11, 1978, pp.1209~1210
5. 윤성기, 최용수, "민감도해석을 이용한 골조 구조물의 손상도 추정에 관한 연구", 대한건축학회 논문집 구조계, 제17권 11호, 2001.11, pp.35~42