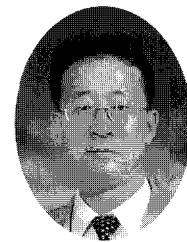


기하학적 비선형해석을 위한 평면 삼각 셸요소의 강성매트릭스 구성

- Formulation of Stiffness Matrix of Flat Triangular Shell Element for Geometric Nonlinear Analysis -



서 삼 열*
Sur, Sam-Uel

1. 서 론

일반적으로 셸이란 그 두께가 다른 두변의 길이에 비하여 현저히 작은 3차원 곡면구조를 말한다. 셸 구조는 구조물의 곡률을 이용하여 외부 하중을 면내력으로 지지하는 매우 효과적인 구조 형태이다. 이러한 특성으로 셸구조물의 예는 건축물, 자동차, 선박, 항공기등 많은 공학적인 구조물에서 볼 수 있다. 지난 시간동안 많은 연구자들에 의하여 유한요소법이 발전하면서 셸 구조물을 해석할 수 있는 셸요소도 그 효율성과 정확성 때문에 현재까지 많은 인기를 누려왔고, 수많은 연구가 이루어져 비교적 정확하고 실용가능한 많은 요소가 개발되었다. 현재 셸요소는 선형해석 뿐만 아니라 비선형 해석 더 나아가 복합재료로 구성된 구조물의 해석에까지 사용되고 있다.

셸요소의 종류를 살펴보면, 셸요소는 셸이론을 바탕으로 한 곡면셸요소(curved element), 응축셸요소(degenerated element) 그리고 평면셸요소(flat element)로 크게 나눌 수 있다.

첫 번째로 셸 이론에 입각한 곡면셸요소는 평면

요소를 이용한 모델링시 나타나게되는 연속체의 기하학적 불연속성을 해결하기 위하여 개발된 요소이며, 일반적으로 곡면 요소는 고전 셸이론에서 유도되었다. 발표되었던 곡면 요소는 그림 1에 나타내었다. 곡면요소를 이용하여 셸 구조물을 해석함에 있어서 좀더 적은 요소 분할을 통하여 정확한 해를 얻을 수 있는 장점이 있으나, 정식화 과정의 어려움과 곡률을 계산해야 하는 문제 등 여러가지 측면에서 비효율적인 특징이 있다. 특히 기하학적 비선형성을 고려하는 경우에는 이런 비효율적인 특징이 크게 나타날 수 있다. 또한 많은 셸 이론간에 일관성이 결여되어 있어 많은 제약이 따르고 강제 운동을 표현하기가 매우 어려우며 요소의 C1 이상 연속성이 요구되고 막 변형과 휨 변형의 중첩항이 정확하게 계산되지 않는점과 그에 따른 계산시간이 많이 소용된다는 등의 단점이 있다.

두 번째로 응축셸요소는 Ahmad(1970)가 3차원 육면체 요소에 Mindlin 평판요소에 사용하는 기본가정을 적용하여 두께방향으로 절점을 감소시켜서 중심면에서만 절점을 가지도록 하여 만들었다. 초기의 응축셸요소는 두꺼운 셸 구조에서는 거동이 좋았지만, 셸 구조물의 두께가 얇아짐에 따라 변형구속







* 대림대학 건축설비학과 조교수

(Locking)이 발생하여 해에 대한 수렴이 좋지않았다. 구속현상에는 두 종류가 존재하는데 첫 번째는 두께방향전단변형구속으로 얇은 셀에 대해서 가정

된변위장에 의해 구성되어지는 두께방향의 전단변형에너지의 과도한 효과에 기인한 것이고, 두 번째는 막변형구속으로 곡면셀에 대한 막변형에너지의

Shape	Authors	Year	Displacement functions	Nodal d.o.f.s	Total d.o.f.s
	Connor and Brebbia	1967	u, v linear, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	20
	Greene et al.	1968	u, v, w cubic	$u, u_x, u_y, u_{xy}, v, \dots, w_{xy}$	48
	Strickland and Loden	1968	u, v linear, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	15
	Gallagher and Yang	1968	u, v linear, w cubic	$u, v, w, w_x, w_y, w_{xy}$	24
	Bonnes et al.	1968	u, v cubic(HCT), w cubic	corner: u, u_x, u_y, \dots, w_y midside: u_x, v_x, w_x	36
	Argyris and Scharpf	1968	u, v, w cubic	corner: $u, u_x, \dots, u_{yy}, \dots, w_{yy}$ midside: u_x, v_x, w_x	63
	Pecknold and Schnobrich	1969	u, v quadratic, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	20
	Ford[95]; Megard	1969	u, v linear, w quintic	$u, v, w, w_x, w_y,$ w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}	24
	Deb Nath	1969	u, v linear, w cubic	$u, v, w, w_x, w_y, w_{xy}$	24
	Cowper et al.; Morin	1970	u, v cubic, w quintic	u, u_x, u_y, v, \dots $\dots, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$	36
	Dupuis and Goel	1970	u, v, w quintic	$u, u_x, \dots, u_{yy}, v, \dots, w_{yy}$	54
	Brebbia et al.	1971	u, v linear, w cubic(HCT)	u, v, w, w_x, w_y	15
	Brebbia et al.	1971	u, v cubic, w cubic(HCT)	u, u_x, u_y, \dots, w_y	27
	Yang	1973	u, v, w cubic	$u, u_x, u_y, u_{xy}, v, \dots, w_{yy}$	48
	Dawe	1975	u, v, w quintic	$u, u_x, u_{yy}, v, \dots, w_{yy}$	54
	Thomas and Gallagher	1976	u, v, w cubic	corner: u, u_x, u_y, \dots, w_y center: u, v, w	30
	Idelsohn	1981	u, v, w cubic	corner: u, v, w, w_x, w_y midside: w_x node(1/3 and 2/3 each side); u, v	40

〈그림 1〉 곡면요소

shape	Authors	Year	Displacement functions	Nodal d.o.f.s	Total d.o.f.s
	Zienkiewicz and Cheung	1965	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy	20
	Zienkiewicz et al.	1968	u, v linear, w cubic (HCT)	u, v, w, wx, wy	15
	Clough and Johnson	1968	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy	15
	Dawe	1972	u, v linear, w quadratic	corner: u, v, w midside: wn	12
	Argyris et al.	1977	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy, wxy	18
	Meek and Tan	1986	u, v, w quadratic	u, v, w: Six Loof nodes (1/3 and 2/3 along each side): wn	24

〈그림 2〉 평면요소

과도한 효과에 기인한다. 이러한 구속현상을 제거하기 위하여 감차적분법등 많은 시도가 이루어졌으며, 좋은 성과를 얻고 있다.

마지막으로 평면셀요소는 막요소(membrane element)와 휨요소(bending element)를 결합하여 만드는데, 요소의 정식화 과정과 기하의 근사가 쉽다는 장점이 있다. 그리고 단점으로는 기하학적 불연속 문제와 해의 수렴성 문제 등이 있다. 그러나 이러한 단점들은 많은 요소분할을 통하여 해결할수 있으며 많은 요소분할에 의해 발생하는 해석시간의 증가는 컴퓨터의 발달로 해결되었다고 할수 있다. 또한 평면요소는 비선형을 고려하여 해석하는 경우에는 그 장점이 두드러지게 나타난다. 기존에 발표되었던 평면요소는 그림 2에 나타내었다.

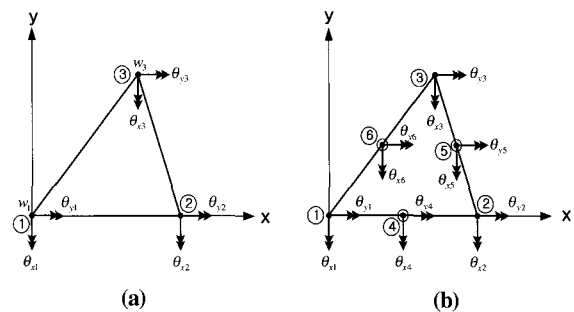
본 고에서는 평판 및 셸구조의 해석에 있어서 좀더 편리하게 접근할 수 있는 평면 셀요소의 정식화 과정을 소개하고자 한다.

2. 평면 요소의 정식화

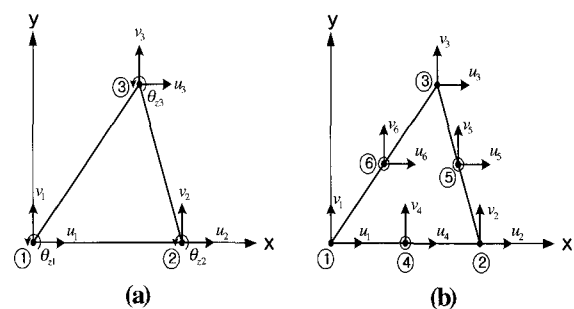
2.1 기본요소

기본적인 평면 요소는 Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) plate bending element와 Linear strain triangle (LST) element를 조합하여 사용하였다.

그림 3(a)는 기본적인 DKT element를 보여준다. 기본적인 DKT element는 그림 3(b) 처럼 6개의 절점에 12개의 자유도로 구성되어 있으나, 3절점, 9개의 자유도를 삼각요소로 축약하여 적용하였다.



〈그림 3〉 DKT bending element



〈그림 4〉 LST element

그림 4(a)는 LST element이다. 여기에서 적용된

LST element는 기본적으로 6개의 절점과 12개의 자유도를 가지고 있다. (그림 4(b)) 이것을 3절점 9자유도의 요소로 만들어 적용하였다.

최종적으로 만들어진 평면 셀 요소는 각 절점에 6개의 자유도($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)를 지니게 된다.

2.2 비선형 강성 매트릭스의 정식화

단일 요소를 위한 가상 일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta W_e = \delta W_i \quad (1)$$

여기에서, δW_e 는 외력에 의한 가상의 일, δW_i 는 내력에 의한 가상의 일이다.

내부 가상 일은 다음과 같다.

$$\delta W_i = \int_{C_1} \delta(\epsilon)^T \{s\} dV \quad (2)$$

여기에서, V 는 C_1 에서의 요소의 체적, $\{\epsilon\}$ 는 Green-Lagrange 변형도 증분 벡터, $\{s\}$ 는 2차 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력벡터이다.

구조체의 대변형을 고려한 변형도식은 다음과 같이 면내변형도(in-plane strain)와 면외변형도(out-of-plane strain) 성분으로 구분하여 나타낼 수 있다.

$$\{\epsilon\} = \{e\} + z\{x\} \quad (3)$$

여기에서, $\{e\}$: 면내 변형도 벡터, $\{x\}$: 면외 변형도 벡터이다.

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\{x\} = \{ \beta_{x,x} \ \beta_{y,y} \ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \}^T \quad (5)$$

여기에서, u, v, w 는 중립면에서의 변위, β_x, β_y 는 각각 $x-z, y-z$ 중립면 법선의 회전이다.

내부 가상 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{C_1} \delta(\epsilon)^T \{s\} dV \\ &= \int_{C_1} (\delta(\epsilon)^T \{N\} + \delta(x)^T \{M\}) dA \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서, A 는 C_1 에서 요소 중립면의 면적, $\{N\}$ 는 합응력, $\{M\}$ 는 합모멘트이다.

$$\{N, M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{s\}(1, z) dz \quad (7)$$

여기에서 h 는 두께이며, 합응력과 합 모멘트를 다음과 같이 분해 할 수 있다.

$$\{N\} = \{N_1\} + \{\Delta N^m\} \quad (8)$$

$$\{M\} = \{M_1\} + \{\Delta M^m\} \quad (9)$$

여기에서, $\{N_1\}, \{M_1\}$ 는 시간이 $t=t_1$ 일 때 C_1 에서의 합응력과 합모멘트, $\{\Delta N^m\}, \{\Delta M^m\}$ 는 합응력과 합 모멘트의 증분이다.

면내 변형도의 첫 번째 변분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\delta e\} = \begin{Bmatrix} \delta e_1 \\ \delta e_2 \\ \delta e_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} \delta e_1 &= \delta u_{,x} + u_{,x} \delta u_{,x} + v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} \\ \delta e_2 &= \delta v_{,y} + u_{,y} \delta u_{,y} + v_{,y} \delta v_{,y} + w_{,y} \delta w_{,y} \\ \delta e_3 &= \delta u_{,y} + \delta v_{,x} + u_{,x} \delta u_{,y} + u_{,y} \delta u_{,x} + v_{,x} \delta v_{,y} \\ &\quad + v_{,y} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,y} + w_{,y} \delta w_{,x} \end{aligned}$$

위의 방정식을 다음과 같이 다시 정리 할 수 있다.

$$\{\delta e\} = [G_1] \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta u_{,y} \\ \delta v_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기에서

$$[G_1] = \begin{bmatrix} 1+u_x & 0 & v_x & 0 & w_x & 0 \\ 0 & u_y & 0 & 1+v_y & 0 & w_y \\ u_y & 1+u_x & 1+v_y & v_x & w_x & w_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

면내 변위 u, v 는 절점 변위량으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P\}^T & 0 \\ 0 & \{P\}^T \end{bmatrix} \{a_{lst}\} \quad (13)$$

여기에서 $\{a_{lst}\}$ 는 LST element의 절점 변위 벡터,

$\{P\}$ 는 2차 형상함수 벡터이다.

면내 변위의 미분계수는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P_x\}^T & 0 \\ \{P_y\}^T & 0 \\ 0 & \{P_x\}^T \\ 0 & \{P_y\}^T \end{bmatrix} [T_{lst}]\{a\} = [B_{lst}]\{a\} \quad (14)$$

여기에서, $\{P_x\}, \{P_y\}$ 는 국부 좌표계의 x, y 축에 대한 형상함수의 미분계수 벡터, $[T_{lst}]$ 는 변환 매트릭스, $\{a\}$ 는 셀 요소의 변위 벡터이다.

적분지점의 면외변위의 미분계수 w_x, w_y 는 절점값에서 선형보간법을 적용하면 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -b_2 - b_3 & b_2 & b_3 \\ -c_2 - c_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} [T_w]\{a\} = [B_w]\{a\} \quad (15)$$

여기에서, $[T_w]$ 는 변환 매트릭스이다.

식(14), 식(15)를 조합하여 면내변형도에 대한 첫 번째 변분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\delta e\} = [G_1][G_2]\{\delta a\} \quad (16)$$

여기에서, $[G_2]$ 는 6×18 매트릭스이다.

또한, 면외 변형도에 대한 첫 번째 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\delta \chi\} = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} b_2 H_{x,\xi}^T + b_3 H_{x,\eta}^T \\ c_2 H_{y,\xi}^T + c_3 H_{y,\eta}^T \\ c_2 H_{x,\xi}^T + c_3 H_{x,\eta}^T + b_2 H_{y,\xi}^T + b_3 H_{y,\eta}^T \end{Bmatrix} [T_{dkt}]\{\delta a\} = [B_{dkt}]\{\delta a\} \quad (17)$$

여기에서 $H_{x,\xi}, H_{x,\eta}, H_{y,\xi}, H_{y,\eta}$ 는 좌표계에 대한 형상함수의 미분계수¹⁰⁾이다.

외부 가상 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta W_e = \{\delta a\}^T \{f\} \quad (18)$$

여기에서 $\{f\}$ 는 요소의 외력 벡터이다. 단일 요소의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\{g\} = \{q\} - \{f\} = 0 \quad (19)$$

여기에서 $\{q\}$ 는 요소의 내력 벡터이고, $\{g\}$ 는 잔류 응력 벡터이다.

$$\{q\} = \int_{C_1} ([G_2]^T [G_1]^T \{M\} + [B_{dkt}]^T \{M\}) dA \quad (20)$$

임의의 시간 t 일 때 전체 좌표계에서 전체요소의 비선형 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{q}_t - \mathbf{f}_t = 0 \quad (21)$$

여기에서 \mathbf{g} 는 외력과 내력 사이의 불평형력이다. 비선형 평형방정식은 뉴턴-랩슨법등을 사용하여 풀수 있으며, t_1 에 대한 평형상태가 존재한다고 가정하면, $t_1 + \Delta t$ 에 대한 평형방정식을 t_1 에 대하여 간략화된 Taylor 급수를 적용하여 선형화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t_1 + \Delta t} &= \mathbf{q}_{t_1} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{t_1} \delta \mathbf{a} - \mathbf{f}_{t_1 + \Delta t} \\ &= \mathbf{q}_{t_1} + [\mathbf{K}] \delta \mathbf{a} - \mathbf{f}_{t_1 + \Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서, $[\mathbf{K}]$ 는 요소강성매트릭스를 조합한 것이다.

전체강성매트릭스 $[\mathbf{K}]_T$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [K]_T = & \int_{C_1} ([C_2]^T [G_1]^T [A] [G_1] [G_2] \\
 & + [B_{dkt}]^T [D] [B_{dkt}] + [B_{dkt}]^T [B] [G_1] [G_2] \\
 & + [G_2]^T [G_1]^T [B] [B_{dkt}] + [G_2]^T \begin{bmatrix} \hat{N} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{N} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{N} \end{bmatrix} [G_2]) dA
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

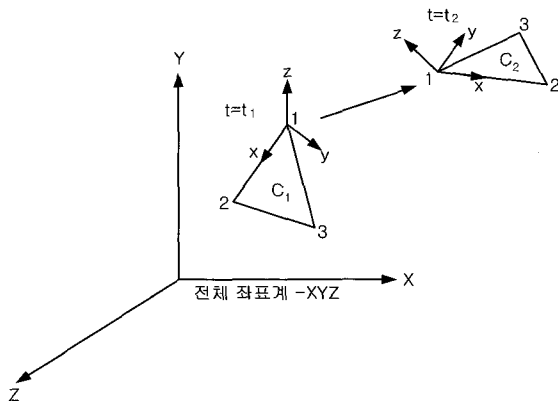
여기에서

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_{xy} \\ n_{xy} & n_y \end{bmatrix}
 \tag{24}$$

식 (23)에서, 오른쪽 첫 번째 항이 미소변위를 지배하는 강성매트릭스 $[K]_E$, 두 번째, 세 번째, 네 번째항이 초기변위 매트릭스 혹은 대변위 매트릭스 $[K]_{NL}$ 라고 하고, 마지막 다섯 번째 항이 초기응력 매트릭스 혹은 기하강성매트릭스 $[K]_s$ 라고 한다.

즉,

$$[K]_T = [K]_E + [K]_{NL} + [K]_s
 \tag{25}$$



〈그림 5〉 탄성체의 변형

3. 결론

지금까지 평판 및 셸 구조물 해석을 위한 삼각 평면 셸요소의 강성매트릭스의 구성에 대하여 살펴보았다. 기하학적 비선형성을 고려한 방법에 대해서는 이미 다양한 유한요소 개발에 따른 정식화가 발표되었고 프로그램화 된 것이 사실이다.

본 고에서 소개된 것 이외에도 많은 부분을 다른 참고 논문에서 찾을 수 있으리라 생각되며, 연속체 셸 구조물의 비선형 해석을 위한 기초 학습 차원에서 조금이나마 도움이 되었으면 한다.


감사의 글

이 원고 정리를 위해 도와준 성균관대학교 대학원 건축공학과 박사과정 장명호군에게 감사드립니다.

참고문헌

- O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd ed, McGraw-Hill, p. 329, 1979
- J. L. Meek, Y. C. Wang, "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shell Structures with Finite Rotation," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, V. 162, No. 1-4, pp. 301~315, 1998
- J. H. Argyris, P. C. Dunne, G. A. Malejannakis and E. Schelkle, "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-linear Equilibrium and Elastic Stability Problems," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 10, pp. 371~403, 1977
- G. Horrigmoe and P. G. Bergan, "Nonlinear Analysis of Free-Form Shells by Flat Finite Elements," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 16, pp. 11~35, 1978
- K. J. Bathe and L. W. Ho, "A simple and Effective Element for Analysis General Shell Structures," *Computer and Structures*, V. 13, pp. 673~681, 1991
- M. Fafard, G. Dhan, and J. L. Batoz, "A New Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element with Updated Procedures," *Computer and Structures*, V. 31, pp. 591~606, 1989
- J. L. Meek, and H. S. "Instability Analysis of Thin Plates and Arbitrary Shells Using a

- Faceted Shell Element with Loof Nodes," Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, V. 57, pp. 143~170, 1986
8. P. G. Bergan and C. A. Felippa "A triangular membrane element with rotational degree of freedom", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, V. 50, pp. 25~59, 1985
 9. D. J. Allam "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 26, pp.717~730, 1988
 10. J. C. Simo, D. D. Fox and M.S. Rifai, " On a stress resultant geometrically exact shell model PartII: The linear theory : computational aspects", Computer Method in Applied Mechanics & Engineering, V. 53, pp. 53~92, 1989
 11. R. H. MacNeal and R. L. Harder, " A proposed Standard set of Problems to Test Finite Element Accuracy", Finite Elements in Analysis and Design, Vol 1, pp. 3~20, 1985
 12. R. L. Taylor, "Finite element analysis of linear shell problem" in Whiteman, J. R.(ed.), Proc. of the mathematics in Finite Elements and Application, Academic Press, NewYork, pp. 191~203, 1987
 13. J. L. Battoz, K. J. Bathe, L. W. Ho "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 25, No. 5, pp. 665~675, 1998



회원 여러분의 새소식을 기다립니다

회원여러분의 주소, 연락처, 근무지등의 변동이 있으신 분은 학회 사무국으로 연락주시기 바랍니다.

주 소 : 사단법인 한국공간구조학회 사무국
(135-854) 서울시 강남구 도곡2동 413-4 동운빌딩 3층
한국공간구조학회
TEL : (02) 2057-8878 / FAX : (02) 2057-8879
E-mail : space_2001@freechal.com / kass_2001@lycos.co.kr