財務管理研究 第十九券 第二號(2002. 12), 159~185

증권시장에서 형성되는 실수적분과정 : 분수적분과정, 무작위행보와 평균회귀과정

이 일 균*

〈요 약〉

한 시계열이 비정상적과정에 의해 생성될 때 이 시계열의 정상성을 확보하기 위하여 시계열의 차분을 수행한다. 이 시계열에 I(1)을 적용하여도 정상적과정이 되지 못하는 경우가 존재하고 있다. 그러면 이 시계열은 과도한 차분과정을 거치게 된다. 따라서 차분모수 d는 $0<d<1$, 즉 실수여야 한다. 이때에는 시계열이 가지고 있는 정보가 왜곡되는 현상이 발생한다. 과도한 차분을 방지하기 위하여서는 분수적분을 수행하여야 한다. $0.5<d<1$인 분수적분과정은 장기기억과정으로 충격의 지속성성질을 잘 포착하고 있다. $d=0.5$는 무작위 행보를 의미하며 이때 시계열은 브라운 운동에 의하여 생성된다. 추정된 분수적분모수를 시계열에 적용하여 얻은 시계열에 대한 성질을 밝히는 연구는 별로 없다. 새로 얻은 시계열이 무작위 행보를 따르고 있는지, 또는 평균회귀 과정을 따르고 있는지, 기타 여러 성질과 특성에 관한 연구가 요청되고 있는 것이다.

이 논문에서는 일반최소거리방법에 의하여 분수차분모수를 추정하는 방법과 일반최소거리방법에 의하여 추정된 분수적분모수를 사용하여 얻은 한 시계열이 무작위 행보과정에 의하여 생성되는지 아니면 평균회귀 과정에 의하여 생성되고 있는지를 검정하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 적분모수의 추정과 시계열을 생성시키는 확률과정을 동시에 검정하는 방법이다.

한국종합주가지수의 일별수익률은 무작위 행보를 따르고 있지 않음이 밝혀졌다. 이 시계열은 장기기억과정을 따르고 있다. 따라서 분수적분과정이다. 충격이 경제에 가해지면 이 충격이 쌍곡선율로 대단히 느리게 감소한다. 한국종합주가지수의 일별수익률은 평균회귀 과정을 따르고 있다.

Ⅰ. 서 론

효율적 시장가설을 정립하는 과정에서 주가가 무작위 행보(random walk)에 의하여 생성된다는 중요한 이론이 정착되었다. 주가가 무작위 행보를 따르면 주식시장은 효율적 시장인 것이다. 무작위 행보는 좀 더 포괄적으로 마팅게일(martingale)이론으로 발전

* 명지대학교

되었다. 그리고 마팅게일을 기본으로 하는 확률과정에 의하여 연속시간의 틀 속에서 재무관리의 중요한 모형과 이론이 정립되었다. 이를 통하여 주가의 성질들이 괄목할 정도로 밝혀졌다. 특히 Ito 확률과정을 사용하여 옵션과 선물에 대한 이론이 정치화되어 투자자들의 투자활동에 큰 공헌을 이룩하고 있다. 주식의 가격평가에 있어서 자본자산 가격결정의 이시적 모형, 소비기저 모형, 생산기저 모형, 유동성 기저모형 등이 정립되어 자본자산의 가격결정에 대한 깊은 통찰력을 제공하고 있다. 그 결과 학문적으로 정립된 이론 및 모형들과 엄밀한 이론을 적용하여 밝혀진 증권가격의 성질들 및 특성들이 실무적으로 널리 활용되어 오고 있으며 이에 따라 실무계에서도 학계에 보다 큰 기대를 걸고 있는 실정이다.

증권가격의 시계열은 정상성(stationarity)이 확보되어 있다는 전제 아래에서 많은 실증연구가 진행되어 오고 있다. 정상성이 확보된 시계열에는 자기회귀 모형(autoregressive model)이나 자기회귀 이동형균 모형(autoregressive moving average model)과 같은 모형들을 사용하여 이 시계열의 성질과 특성을 용이하게 포착할 수 있다. 정상성이 확보된 경우에는 이 두 모형 뿐만 아니라 수리통계학에서 개발된 다른 모형들도 주가생성 과정을 밝히기 위하여 이용할 수 있다. 시계열 분석에서는 정상적 시계열 과정에 대한 이론적 연구가 주류를 이루고 있다. 따라서 증권의 가격이 정상적 과정을 따를 때, 주가의 행동을 기술하고 설명할 수 있는 시계열 모형을 정립하기가 용이하다.

그러나 주가시계열이 정상성을 확보하고 있지 못하고 있고 비정상적 과정에 의하여 생성되는 경우에는 정상성을 확보하기 위하여 이 시계열에 차분을 수행하는 것이 일반적이다. 정수차분을 시행하여 정상성이 확보되면 이상적이다. 왜냐하면 이때 시계열의 차분을 용이하게 얻고 차분을 통하여 얻은 정상적 시계열을 사용하여 이 시계열의 운동법칙과 행동양식을 밝혀낼 수 있기 때문이다. 그러나 정수로 차분하면 과도하게 차분되는 경우가 있으며 이때에는 시계열이 가지고 있는 정보가 왜곡되는 현상이 발생한다. 이 경우에는 정수차분과정 또는 정수적분과정은 사용할 수 없다. 과도한 차분을 방지하기 위하여서는 분수차분을 수행하여야 한다. 이 때 차분모수(differencing parameter) 또는 적분모수(integrated parameter)는 정수가 아니라 실수이다. 분수적분과정에서 분수적분모수를 추정해야 하는데 추정방법이 간단치 않다. 많은 방법이 개발되어 있으나 검정력이 약하거나 모형의 속성상 정확한 추정이 이루어지지 않는 경우도 있다.

분수적분모수 d를 추정하고 이 모수값이 $0.5 < d < 1$ 범위에 있는 값일 때에는 이 시계열이 장기기억과정을 따른다. 추정된 분수적분모수를 시계열에 적용하면 새로운 시계

열을 얻는다. 이 시계열에 대한 성질을 밝히는 연구는 별로 없다. 새로 얻은 시계열이 무작위 행보를 따르고 있는지, 또는 평균회귀 과정을 따르고 있는지, 기타 여러 성질과 특성에 관한 연구가 요청되고 있는 것이다. 추정된 적분모수와 이 모수를 통하여 얻은 시계열이 무작위 행보에 의하여 생성되는지 또는 평균회귀 과정에 의하여 생성되는지의 가설을 동시에 검정해야 한다. 즉, 적분모수의 추정값과 시계열생성과정에 대한 동시검정이 요청되고 있다.

본 논문에서는 분수차분모수를 추정방법을 살펴보고 한 시계열에 분수적분모수를 적용하여 새로 얻은 시계열이 무작위 행보를 따르고 있는지 아니면 평균회귀를 따르고 있는지에 대한 검정, 즉 모수 추정값과 데이터 생성과정에 대한 가설, 즉 무작위 행보라는 귀무가설과 평균회귀 과정이라는 대립가설로 정립한 가설을 동시에 검정하는 통계량을 살펴보고자 한다. 이 방법을 한국종합주가지수에 적용하여 우리나라의 주가가 무작위 행보에 의하여 생성되고 있는가 아니면 평균회귀 과정에 의하여 생성되고 있는지, 그리고 이 과정을 생성시키는 분수적분모수 추정값을 동시에 검정하고자 한다.

본 논문의 진행은 다음과 같다. 제 Ⅱ장에서는 재무시계열자료의 분수적분모수의 성질들을 규명하고 분수적분모수를 사용하여 무작위 행보라는 귀무가설과 평균회귀 과정이라는 대립가설 아래에서의 검정통계량을 살펴본다. 그리고 분수적분모수의 추정방법을 고찰한다. 잔차의 시계열에 자기상관이 존재할 때에는 첨가과정(augmented process)이 필요하며 첨가과정이 요구될 때 발생하는 제요인을 고려한 검정방법을 검토한다. 제 Ⅲ장에서는 모수추정방법과 검정방법을 한국종합주가지수에 적용하여 한국종합주가지수의 일별수익률이 무작위 행보를 따르고 있는지 아니면 평균회귀 과정을 따르고 있는지를 동시 검정한다. 끝으로 제 Ⅳ장에서는 결론을 제시한다.

Ⅱ. 재무시계열자료와 장기기억과정

1. 재무시계열자료와 분수적분모수

재무시계열은 처음에는 정상적과정에 의하여 생성된다는 가정아래에서 자기회귀 모형이나 자기회귀 이동평균 모형에 대한 추정과 검정에 초점이 주어졌고 이를 통하여 재무시계열의 특성을 파악하였다. 효율적 시장가설이 형성되면서부터는 무작위행보(random walk)의 연구에 집중되었다. 더구나 단위근(unit root)이 문제되자 무작위행보와 단위근을 결합하여 재무시계열이 영구기억을 가지는 과정에 의하여 생성될 가능성에 대한 탐

구도 진행되었다. 단위근이 존재하는 무작위행보는 영구적인 기억과정이다. 이때에는 재무시계열에 가해진 충격이 재무시계열 내에 영구적으로 존재한다. 따라서 재무시계열의 현재의 특성은 과거 충격의 총화이다. 그러나 재무시계열이 평균에 회귀하는 실증분석의 결과가 제시되자 단기기억과정과 장기기억과정에 대한 연구가 진행되고 있다.

한 시계열이 정상적과정에 의해 생성되지 않고 비정상적과정(nonstationary process)에 의해 생성될 때 이 시계열의 정상성을 확보하기 위하여 시계열의 차분을 수행한다. 한 시계열 y_t를 $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$로 차분하면 차분모수는 1이며, I(1)로 쓴다. 한 시계열이 I(1)과정을 따르거나 또는 I(0)을 따른다는 귀무가설을 설정할 때 이 변수는 적분과정(integrated process)이 되거나 또는 정상적 과정이 된다. 그러나 어느 시계열이 I(0)을 따르고 있지 않고 있으며 이 시계열에 I(1)을 적용하여도 정상적 과정이 되지 못하는 경우가 존재하고 있다[1]. 그러면 이 시계열은 과도한 차분과정을 거치게 된다. 따라서 차분모수 d는 $0 < d < 1$ 이어야 할 것이다. 즉 차분모수 d가 정수가 아니라 실수여야 한다. 적분차수 d가 임의의 실수일 때 분수적분과정(fractionally integrated process ; FI)이라 하며 분수적분과정 즉 FI(d)는 장기기억 과정으로 충격의 지속성(persistence) 성질을 잘 포착하고 있다.

단위근 검정은 대립가설이 FI(d) 과정일 때 일치성(consistency)을 확보하고 있지만 검정력이 약하다. 이 약점을 극복하기 위하여 Wald형 검정에 의존하고 있다. 이 검정은 대립가설 아래에서 장기기억모수를 추정한다. 도수정의역(frequency domain)과 시간정의역(time domain)에서 장기기억모수 d를 추정하는데 모수방법(parametric method)과 준모수방법(semiparametric method)이 사용되고 있다. Geweke와 Porter-Hudak(1983), Fox와 Taqqu(1986), Sowell(1992)과 Robinson(1992) 등이 이 방법의 정립에 공헌을 하였으나 이 방법 역시 검정력이 약하다.

라그랑즈 승수법(Lagrange multiplier method)은 귀무가설 아래에서 장기기억모수를 추정하는 방법이 단위근 검정에서는 검정을 시행하는 데이터의 경우 경우마다 그때 그때 통계량을 계산해야 하는 비표준적(nonstandard) 점근적분포가 도출되고 있는데, Robinson (1994)과 Tanaka(1999)는 이와는 대조적으로 표준적인 점근적분포를 도출하여 검정을 간편하게 하였다. 그러나 귀무가설 아래에서 검정을 수행할 때 귀무가설이 기각되면 장

1) 실증분석에 의하면 정수차분은 대개가 I(1)이다. I(2)가 형성되는 경우도 있으나 매우 드물다. 여기에서는 시계열의 차분이 정수에 한정되는 경우에는 I(1)로 상정하여 논의를 전개시킨다. 이렇게 하면 논의가 간편해지며 논의의 일반성도 잃지 않기 때문이다.

기기억모수 d에 대한 정보를 직접적으로 제공하지 못하고 있는 것이 단점이다. 이 단점을 극복하기 위하여 Dolado 등(2002)은 시간정의역(time domain)에서의 Wald형의 검정을 제안하고 있다. 이 검정방법은 귀무가설 아래에서 검정을 수행하되 대립가설 아래에서의 장기기억모수 d에 대한 정보를 직접적으로 제공하는 방법이다.

한 시계열이 비정상적 과정(nonstationary process)에 의하여 생성될 때 이 시계열의 정상성을 확보하기 위하여 일반적으로 제1차 차분을 수행한다. 제 1차 차분을 수행하는 적분과정 I(1)과 정상성이 확보될 때의 차분 I(0)을 검정하는 방법을 Dickey와 Fuller (1979, 1981)가 개발하였다. 단위근 검점에 이 Dickey-Fuller(D-F) 검정이 많이 사용되고 있다.

D-F 검정에서 I(d)는 d가 정수이다. I(d)에서 d가 실수일 때 차분모수 d는 장기기억모수이다. 장기기억은 d가 실수인 차분과정이고 일종의 프랙탈과정(fractal process)이다. Dolado 등(2002)는 I(1)대 I(0)을 검정하는 D-F 방법을 분수차분 과정에 도입하여 $d_0 < d_1$일 때 $FI(d_0)$대 $FI(d_1)$을 검정하는 방법을 정립하고 있다. 이것이 분수 Dickey-Fuller 검정이다. 이 검정방법은 $\Delta^{d_0} y_t$를 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$에 회귀시켜 얻은 정규화 통상최소자승법(normalized ordinary least squares)에 의한 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$의 계수와 이 회귀계수의 t값을 점검하여 가설을 검정하는 방법이다. 회귀식에서 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$과 더불어 $\Delta^{d_0} y_t$의 시차변수들도 도입이 가능하다. 그런데 $d_0 = 1$이고 $d \leq d_1 \leq 1$인 경우는 무작위 행보(random walk)대 장기기억의 평균회귀 과정(mean reverting process)을 검정하게 된다.

분수적분 과정에 D-F 검정의 이론형성 과정을 적용시켜 탄생시킨 것이 분수 D-F 검정, 즉 FD-F 검정이다. FD-F 검정은 Wald형 검정이다. 따라서 대립가설에서 d값이 요청된다. $H_0 : d = d_0$이고 $H_1 : d = d_1$에서 d_1이 검정을 수행하는데 사용된다. 그러나 보다 일반적인 검정인 $H_0 : d = d_0$과 $H_1 : d < d_0$인 경우 대립가설 아래에서 d의 사전추정값(pre-estimation)이 검정을 수행하는데 사용된다. 분수 Dickey-Fuller 검정방법은 D-F 검정방법의 단순성을 유지하고 있는 것이 장점중의 하나이다. 라그랑즈 승수검정 방법과는 달리, 오차항에 대한 밀도함수를 알고 있다는 가정이 필요없다. 따라서 보다 큰 견실성(robutness)을 얻는다. 또 다른 장점으로서는 $d_0 = 1$일 때 대립가설로 $FI(d_1)$을 설정하는 것 이외에 $FI(d_1)$에 평균의 단절이동현상(break)이나 이 시계열 과정의 다른 성질을 부과하여 대립가설을 설정할 수 있는 신축성을 확보하고 있다는 것이다. 이 신축성은 D-F 검정에서 성립하는데 FD-F 검정에서도 이 신축성이 그대로

유지된다. FI(d) 과정에서 $d < 0.5$이면 정상적 과정(stationary)이고 $d \geq 0.5$이면 비정상적 과정이다. $d < 0.5$에서는 충격의 반지속성(antipersistence)이 성립하고 $d > 0.5$에서는 충격의 지속성이 형성된다. $d = 0.5$는 무작위 행보를 의미하며 이때 시계열은 브라운 운동(Brownian motion)에 의하여 생성된다.

2. 분수 적분 검정방법

한 시계열이 무작위 행보를 따르거나 아니면 분수적분 과정 FI(d)을 따른다고 하자. 여기에서 d는 실수이다. 이 시계열이 무작위 행보에 의하여 생성된다는 것을 귀무가설로 설정하자. 그러면 분수적분 과정에 의하여 생성된다는 것을 대립가설로 설정할 수 있다. 한 시계열이 ARIMA 과정에 의하여 생성되는 경우에는 이 과정이 I(1)인가 또는 I(0)인가를 분석하기 위하여 일반적으로 Dickey-Fuller 검정을 수행하며 이 검정방법이 많이 이용되고 있다. 그러나 이 방법은 적분차수 d가 정수, 특히 $d = 1$이나 $d = 0$일 때에 적용력이 강하다. Dickdy-Fuller 검정법은 계산이 간편하고 검정통계량이 계산되어 있어 시뮬레이션을 할 필요가 없을 뿐만 아니라 보다 일반적인 경우에도 사용할 수 있도록 예컨대 I(1)에 시계열의 단절이동(break) 등과 같은 시계열의 특성을 부과할 수 있도록 변형이 가능하여 널리 사용되고 있다. D-F 검정은 원래 적분모수가 정수인 경우를 대상으로 개발된 단위근 검정방법이다. Dolado 등(2002)은 D-F 검정방법을 분수적분시계열에도 적용할 수 있도록 이론을 정치화시켰다. 이 논문의 이론부분은 그들의 이론을 요약하여 제시한다.

적분과정(integrated process)을 검정하기 위한 Dickey-Fuller 검정법은 다음의 자기회귀 모형에서 모수 ϕ를 검정하는 방법이다.

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + u_t \tag{1}$$

시점 t에 있어서의 백색잡음 과정을 ε_t라 하자. 그러면 ε_t는 iid 확률변수이다. 식 (1)에서 ε_t가 $u_t = \varepsilon_t$로 iid이면 $\phi = 0$일 때 시계열 y_t는 무작위 행보이다. 그러나 $\phi < 0$이면 시계열 y_t는 정상적(stationary) 자기회귀 과정 AR (1)이다. 식 (1)은 독립변수와 종속변수의 차분이 상이하다는 의미에서 특이한 방정식이다. 독립변수는 귀무가설 아래에서 I(0)으로 차분된다. 반면 종속변수는 I(1)로 차분된다. FI(d) 과정에서 위의 두 차분은 특별한 경우에 해당된다. 왜냐하면 차분모수 d는 실수의 값을 취하므로 $d \in R$이기

때문이다. Dickey-Fuller 검정을 분수차분(fractional differencing) 또는 프랙틀차분(fractal differencing)에도 적용이 가능하다. 그러나 검정력이 약하다.

다음의 모형을 고찰해 보자.

$$\Delta^{d_0} y_t = \phi \Delta^{d_1} y_{t-1} + u_t \tag{2}$$

위에서 u_t는 I(0) 과정이고, $d_0, d_1 \in R$이다. 따라서 식 (2)는 식 (1)을 일반화시킨 것이며 ϕ를 검정해야 한다. 귀무가설은 시계열 y_t가 $FI(d_0)$ 과정이며 대립가설은 $FI(d_1)$이다. 식 (2) 역시 식 (1)과 마찬가지로 독립변수와 종속변수의 차분모수가 상이하므로 양자가 균형을 잡지 못하고(unbalance) 있다. 식 (2)에서 $\phi = 0$일 때 $u_t = \varepsilon_t$라 가정하면 이 시계열은 다음 과정을 따른다.

$$\Delta^{d_0} y_t = \varepsilon_t \tag{3}$$

위 식은 y_t가 $FI(d_0)$ 과정이라는 것을 의미한다. $\phi < 0$일 때 y_t는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\Delta^{d_0 - d_1} - \phi L)\Delta^{d_1} y_t = \varepsilon_t \tag{4}$$

다항식 $\Pi(z) = ((1-z)^{d_0 - d_1} - \phi z)$는 절대합 가능한(absolutely summable)계수이고 $\Pi(0) = 1$이고 $\Pi(1) = -\phi \neq 0$이다. $-2^{1-d_1} < \phi < 0$이면 이 다항식의 모든 근은 단위원(unit circle) 외부에 놓인다. 앞에서 ϕ에 가한 조건 아래에서 $\Delta^{d_1} y_t$는 I(0)이다. 따라서 y_t는 다음과 같이 쓸 수 있는 $FI(d_1)$ 과정이다.

$$\Delta^{d_1} y_t = C(L)\varepsilon_t \tag{5}$$

위에서 $C(z) = \Pi(z)^{-1} = ((1-z)^{d_0 - d_1} - \phi z)^{-1}$이고 $C(0) = 1$이고 $0 < C(1) < \infty$이다.

Dickey-Fuller 검정방법에 있어서 수행되는 것과 동일하게 정규화 통상 최소자승법(normalized ordinary least squares)에 의한 추정계수나 또는 t 값에 입각한 검정통계량을 정립할 수 있다. 즉 가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \phi = 0,\ y_t \sim FI(d_0) \tag{6}$$

$$H_1 : \phi < 0,\ y_t \sim FI(d_1) \tag{7}$$

위에서 $d_0 = 1$이고 $d_1 = 0$ 일 때 I(1) 대 I(0)이라는 검정으로 환원된다.

식 (2)는 귀무가설이 $FI(d_1)$로 일반적인 검정이다. 그러나 $d_0 = 1$, 즉 y_t가 I(1)이라는 가설의 정립이 허용된다. 이 경우 귀무가설은 y_t가 I(1)이고 대립가설이 $FI(d_1)$ $(0 \le d_1 < 1)$이라는 가설이 성립된다. FI(d) 과정은 절단된 분포(truncated distribution)로의 변환이 가능하다. 즉, $y_t = \Delta^{-d_1} u_t I_{(t>0)}$으로 쓸 수 있다. 이때 u_t가 분수 백색잡음 과정에 대하여 $u_t = \varepsilon_t$가 성립하도록 u_t가 I(0) 과정이다. FI(d)를 이와 같이 변형시키면 이 변형된 절단과정의 절단은 y_t가 분산이 유한인 과정이 되게 하며 $t \le 0$에 대하여 $y_t = 0$이라는 것을 함의한다.

차분과정은 간편성을 위하여 다음과 같이 계산한다.

$$\Delta^{d_1} y_t = \sum_{i=0}^{t-m-1} \pi_i(d_1)\, y_{t-i}$$

위에서 m은 $(d_1 + 1/2)$의 정수부분이다. 정수차분이 데이터에 적용되는 방법과 일관성을 유지하기 위하여 필터시계열(filtered series)을 계산할 때 m과 동일한 관찰치의 개수를 잃게 된다. $d_1 = 1$이면 첫째 관찰치를 잃는다. 그리고 π_i는 다음과 같다.

$$\pi_i(d) = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(i+1)}$$

위에서 Γ는 감마함수이다.

식 (3)에서 $d_0 = 1$이고 ε_t가 iid이면 이 시계열이 무작위 행보에 의하여 생성된다는 귀무가설과 이 시계열이 평균회귀 FI(d) 과정(mean-reverting FI(d) process)에 의해 생성된다는 대립가설을 정립하고 이것을 검정할 수 있다. 이 논문에서는 이 점에 중점을 두고자 한다. 식 (3)에서 $d_0 = 1$이고 $u_t = \varepsilon_t$라 하자. 이 때 ε_t는 평균이 0이고 분산은 σ^2인데 미지이고 제 4차 적률이 유한인 iid 확률변수의 수열이다. 그러면 최소자승법에 의한 ϕ의 추정치 ϕ_{OLS}와 ϕ_{OLS}의 t 값은 다음과 같다.

$$\hat{\phi}_{OLS} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \Delta y_t \Delta^{d_1} y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} (\Delta^{d_1} y_{t-1})^2}$$

$$t_{OLS} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \Delta y_t \Delta^{d_1} y_{t-1}}{S_T(\sum_{t=2}^{T} (\Delta^{d_1} y_{t-1})^2)^{1/2}}$$

위에서 잔차의 분산 S_T^2은 다음과 같다.

$$S_T^2 = \frac{\sum (\Delta y_t - \hat{\phi}_{OLS} \Delta^{d_1} y_{t-1})^2}{T}$$

회귀계수 ϕ와 이 계수의 t값을 얻었으므로 이에 대한 검정을 수행해야 한다. FD-F 검정은 다음과 같다.

시계열 y_t가 무작위 행보라는 귀무가설 아래에서 $\hat{\phi}_{OLS}$는 $\phi = 0$의 일치추정량(consistent estimator)이고, $0 < d_1 < 0.5$ 일 때 T^{1-d_1} 율로 참값(true value)에 수렴하고, $d_1 = 0.5$일 때 $(T\log T)^{1/2}$ 율로 참값에 수렴하며 $0.5 < d_1 < 1$ 일 때에는 표준적인 율인 $T^{1/2}$로 참값에 수렴한다. 그리고 이 계수의 점근적 분포는 다음과 같다.

$$T^{1-d_1} \hat{\phi}_{OLS} \overset{W}{\to} \frac{\int_0^1 W_{-d_1}(r)\, dB(r)}{\int_0^1 W^2_{-d_1}(r)\, dr} \quad 0 \le d_1 < 0.5 \tag{8}$$

$$(T\log T)^{1/2} \hat{\phi}_{OLS} \overset{W}{\to} N(o,\ \pi) \quad d_1 = 0.5 \tag{9}$$

$$T^{1/2} \hat{\phi}_{OLS} \overset{W}{\to} N(0,\ \frac{\Gamma^2(d_1)}{\Gamma(2d_1-1)} \quad 0.5 < d_1 < 1 \tag{10}$$

그리고 t_{OLS}의 점근적 분포는 다음과 같다.

$$t_{OLS} \overset{W}{\to} \frac{\int_0^1 W_{-d_1}(r)\, dB(r)}{(\int_0^1 W^2_{-d_1}(r)\, dr)^{1/2}} \quad 0 \le d_1 < 0.5 \tag{11}$$

$$t_{OLS} \overset{W}{\rightarrow} N(0, 1) \; 0.5 \le d_1 < 1 \tag{12}$$

위에서 w는 약수렴(weak convergence)을, W_{-d_1}은 점근적 정상적 FI(d) 과정의 극한분포에 대응되는 표준 분수 브라운운동을, B(r)은 표준 브라운운동을 표시하는 기호이다.

위의 검정통계량의 점근적 행동은 귀무가설과 대립가설 사이의 거리에 의존한다. 대립가설이 비정상적 과정($0.5 \le d_1 \le 1$)일 때 극한분포들은 정규분표이다. 반대로 대립가설이 정상적 과정($0 \le d_1 \le 0.5$)일 때 검정통계량은 분수 브라운운동(fractional Brownian motion ; FBM)의 범함수(functional)이다. 귀무가설이 $FI(d_0)$이고 대립가설이 $FI(d_1)$일 때 FD-F 검정통계량의 점근적 분포는 이 두 가설 아래에서 시계열 과정이 정상적(또는 점근적 정상적)이거나 또는 이 과정이 귀무가설($d_0 > 0.5$)과 $d_0 - d_1 < 0.5$ 아래에서 비정상적일 때 표준형이고 그 이외의 경우에는 비표준형이다. 따라서 점근적 분포의 성질을 결정하는 것은 단위근 방법에 있어서 대립가설 아래의 자기회귀 과정이 아니라 오히려 귀무가설과 대립가설 사이의 거리인 것이다. $d_0 = 1$이고 $d_1 = 0$이면 점근적 분표들이 Dickey-Fuller(1979, 1981)가 도출한 분포에 대응된다.

대립가설 아래에서의 검정을 고찰해 보자. 데이터 생성과정이 다음과 같은 분수 백색과정이라 하자.

$$\Delta^{d_1} y_t = \varepsilon_t 1_{(t>0)} \tag{13}$$

위에서 ε_t는 평균이 0인 iid 과정이다. $\theta = d_1 - 1$이라 하면 $\Delta^{d_1} y_t = \Delta^{1+\theta} y_t$이다. 따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta y_t = \Delta^{-\theta} \varepsilon_t 1_{(t>0)} = \varepsilon_t + \pi_1(-\theta)\,\varepsilon_{t-1} + \sum_{i=2}^{t-1} \pi_i(-\theta)\,\varepsilon_{t-i} \tag{14}$$

위에서 $\pi_i(-\theta)$는 $(1-L)^{-\theta}$의 전개에 의하여 도출된 것이다. $\pi_1(-\theta) = \theta = d_1 - 1 (<0)$이므로 대립가설 아래에 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta y_t = \theta \Delta^{d_1} y_{t-1} + a_t \tag{15}$$

위에서 $a_t = \varepsilon_t + \sum_{i=2}^{t-1} \pi_i(-\theta)\,\varepsilon_{t-i}$ 이다. 이 경우 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$의 계수는 대립가설과 귀무

가설 아래에서 확률과정들의 적률차수들간의 거리로 해석할 수 있다. a_t가 백색잡음 과정은 아니지만 a_t와 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$간에 상관성이 없으므로 θ는 OLS에 의하여 일치성을 유지하도록(consistently) 추정할 수 있다. 적분차수 d_1^*가 검정통계량을 계산하는데 사용된 차수 d_1과 상이한 값을 취할 수 있다고 하자. 데이터 생성과정이 분수 백색잡음 과정이며 참적분차수(true order of integration)가 d_1^*일 때에도 FD-F 검정은 일치성을 유지할 수 있다. 즉 데이터 생성함수가 $d_1^* \in (0, 1)$에 대하여 $\Delta^{d_1^*} y_t = \varepsilon_t 1_{(t>0)}$일 때 Δy_t를 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$에 회귀하여 추정된 $\widehat{\phi}_{OLS}$ 또는 t_{OLS}에 기초한 검정통계량은 $d_1 \in (0, 1)$의 임의의 값에 대하여도 일치성이 확보된다. 이 결과는 대립가설 아래에서 $d_1 \in (0, 1)$인한 d_1의 값이 정확하지 않음에도 불구하고 검정을 수행해야 될 때에도 검정통계량이 일치성이 보장되고 있다는 것이므로 검정에 유용한 결과인 것이다.

데이터 생성함수가 분수백색잡음 과정으로 $\delta < 0$에 대하여 $\Delta^{1-\delta/\sqrt{T}} y_t = \varepsilon_t 1_{(t>0)}$을 취할 때 Δy_t를 $\Delta^{1-\delta/\sqrt{T}} y_t$에 회귀하여 얻은 통계량 t_{OLS}의 점근적분포는 $t_{OLS} \xrightarrow{W} N(\delta, 1)$이다.

3. 쪽거리 적분차수의 추정

앞절에서는 분수적분차수, 즉 대립가설 아래에서의 장기기억모수 d_1의 값을 알고 있다는 가정하에 분수 Dickey-Fuller 검정통계량이 도출되었다. 그러나 일반적으로 이 값은 미지이고 따라서 추정해야 한다. 장기기억모수의 추정방법을 살펴보기 전에 추정된 장기기억모수를 사용할 때 검정통계량이 어떻게 변하는지를 먼저 살펴보도록 한다.

데이터 생성과정이 $\Delta y_t = \varepsilon_t$인 무작위 행보라 하자. $\widehat{d}_T$가 $d \leq 1$의 $T^{1/2}$ 일치추정량이라 하자. 이때 $T^{1/2}(\widehat{d}_T - d) \xrightarrow{W} \xi$가 성립한다. 여기에서 ξ는 비퇴화분포(non-degenerate distribution)이다. 검정을 수행하는데 필요한 d_1의 값이 1보다 적어야만 하기 때문에 d_1의 추정차인 $\widehat{d}_1$는 다음의 절단율(trimming rule)에 따라 선택된다.

$$\widehat{d}_1 = \begin{cases} \widehat{d}_T, & \widehat{d}_T < 1-c \\ 1-c, & \widehat{d}_T \geq 1-c \end{cases} \tag{16}$$

위에서 $c>0$은 $(1-c)$가 1에 충분히 근접해 있도록 0의 근방에 있는 값이다. y_t가 무

작위 행보이고 검정을 수행하는데 필요한 d_1의 값이 절단율인 식 (16)에 의하여 선택되었다는 귀무가설 아래에서 검정통계량 t_{OLS}의 점근적 분포가 도출되어야 한다. 이것을 제시하면 다음과 같다.

y_t가 무작위 행보라는 귀무가설 아래에서 회귀식이 다음과 같다.

$$\Delta y_t = \phi \Delta^{\hat{d}_1} y_{t-1} + a_t$$

d_1이 식 (16)으로 정의된 기준에 따라 선정된 값일 때 위의 회귀식 모수 ϕ와 연관된 검정통계량 $t_{OLS}(\hat{d}_1)$는 다음의 점근적 분포를 가진다.

$$t_{OLS}(\hat{d}_1) \overset{W}{\rightarrow} N(0, 1) \tag{17}$$

위 결과에 의하면, d_1의 사전추정치(pre-estimated value)를 FD-F 검정을 수행하기 위하여 사용할 때 이에 대응되는 임계값(critical value)들은 식 (16)을 만족하는 임의의 $\hat{d}_1$ 값에 대하여 N(0, 1) 분포의 값이다. 이 결과는 d_1값을 알고 있을 때 얻은 것과 상이하다. d_1의 값을 알고 있을 때 $d_1 \in (0, 0.5)$이면 FD-F 검정은 귀무가설 아래에서 정규분포에 의하여 생성되지 않고 있다. 그런데 실행가능한 FD-F 검정의 극한분포가 언제나 N(0, 1)이라는 것은 귀무가설 아래에서 T가 충분히 클 때 추정량의 $T^{1/2}$ 일치성($T^{1/2}$-consistency)은 단위근과 추정된 d_1의 거리가 짧게 되도록 한다. 그러면 점근적 정규성이 이루어 진다.

따라서 회귀식 (2)에 $d_1 \in D \equiv (0, 1)$의 임의의 $T^{1/2}$-일치추정량을 사용하면 FD-F 검정이 가능해진다. 장기 모수를 추정하는 방법중에는 d_1의 값을 $T^{1/2}$-일치성를 달성시키는 방법들이 있다. 도수정의역에 있어서 Velaseo와 Robinson(2000)은 Whittle 추정량(Whittle estimator)를 정립하였다. 시간정의역에 있어서는 Beran(1995)과 Tanaka(1999)가 최대가능성법(maximum likelihood method)에 의하여 차분모수를 추정하는 방법을 정립하였다.

Mayoral(2000)은 시간정의역에서 장기기억모수를 추정하는 방법을 개발하였다. Beran(1995)와 Tanaka(1995)는 오차항이 정규분포를 따른다는 가정하에 검정통계량을 유도하고 있는데 Mayoral(2000)은 이 가정을 도입하고 있지 않다. 많은 연구에서 d_1의 값에 제약을 가하고 있다. 그러나 그녀는 $d_1 \in (0, 1)$의 전 범위에 대하여 $T^{1/2}$-일치추정량

을 도출하였다. 이 두점에서 Myoral(2000)이 다른 방법보다 우위한 추정방법인 것이다. Mayoral(2000)방법에 의하여 장기기억모수를 추정하고자 한다. 그녀가 제시한 방법을 아래에 요약한다.

한 주가 시계열 y_t 가 자기회귀 분수적분 이동평균 과정(autoregressive fractionally integrated moving average process ; ARFIMA)을 따른다고 하자. 이 시계열 y_t (t = 1, 2, ⋯, T)의 ARFIMA(p, d_0, q)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_0(L)\,\Delta^{\varphi_0}(\Delta^{m_0}y_t - \mu_0) = \Theta_0(L)\,\varepsilon_t \tag{18}$$

위에서 $\Phi_0(L)$ 과 $\Theta_0(L)$ 은 각각 차수가 p와 q인 자기회귀 과정과 이동평균 과정의 다항식이며, 이 다항식의 모든 근은 단위원 외부에 존재하고 있다. 차분모수 또는 장기기억모수(long memory parameter) d_0은 폐구간(closed interval) $[\nabla_1, \nabla_2]$에 속하며 $-0.75 < \nabla_1 < \nabla_2 < \infty$이다. 이 모수는 정수부분과 분수부분의 합으로 구성되며 이 합은 $d_0 = m_0 + \varphi_0$이다. 이 때 $m_0 = (d_0 + 1/2)$의 정수부분인데 이것은 y_t가 정상성(stationarity)을 확보하기 위하여 차분해야하는 회수를 의미한다. 분수부분인 모수 φ_0은 구간(-0.75, 0.5)에 놓이는데 d_0이 주어졌을 때 $\varphi_0 = d_0 - m_0$ 을 의미한다. 따라서 과정 y_t가 m_0번 차분되면, 차분과정은 적분차수가 φ_0인 장상적 분수차분 적분 과정이다. $x_t(m_0) = (\Delta^{m_0}y_t - \mu_0)$이면 $x_t(m_0)$은 정상적 FI (φ_0) 과정이다. $m_0 = 0$이면 μ_0이 정상적 과정 y_t의 기대값이다. $m_0 \geq 1$이면 $\mu_0 \neq 0$은 결정론적 다항식추세(deterministic polymonial trend)를 함의한다.

u_t가 ARMA(p,q) 과정을 따른다고 하자. 즉 $u_t = \Phi(L)^{-1}\,\Theta_q(L)\,\varepsilon_t$이다. 이때 $\Phi_p(L)$ 과 $\Theta_q(L)$ 은 각각 p 와 q 차수 시차 다항식이고 모든 근들이 단위원 외부에 존재한다. 이에 따라 y_t는 ARFIMA(p, d, q) 과정을 따른다고 가정한다. 즉

$$\Phi_p(L)\,\Delta^d y_t = \Theta_q(L)\,\varepsilon_t \tag{19}$$

위에서 $d \in (-3/4, \infty)$이며 이 범위는 $D \equiv (0, 1)$를 포함하고 있다.

기댓값 μ_0을 알고 있으며 이 값이 0이라 하자. $\Psi = (\phi_1, \cdots, \phi_p, \theta_1, \cdots, \theta_q)'$는 AR과 MA모수를 포함하는 백터이며 $\lambda = (d, \Psi')' \in R^{p+q+1}$이라 하자. $\lambda_0 = (d_0, \Psi_0')'$은 참모수값(true parameter values)을 가지는 벡터라 하자. 그리고 $\lambda^* = (\varphi, \Psi')'$이

고 $\lambda_0^* = (\varphi_0, \Psi_0')'$이라 하자. 그러면 시계열 y_t의 자기회귀 과정은 다음과 같다.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\lambda_0^*) x_{t-j}(m_0) = \varepsilon_t \tag{20}$$

위에서 $x_t(m_0) = \Delta^{m_0} y_t$이고 $\{\alpha_j(\lambda_0^*)\}_{j=0}^{\infty}$는 $\Phi_0(L)\, \theta_0(L)^{-1} \Delta^{\varphi_0}$을 L의 승멱으로 전개한 계수들이다. 관찰치 $y_1, \cdots, y_T$가 주어졌을 때, 쇄신(innovation)들인 ε_t는 식 (20)에 의하여 구하기가 용이하지 않다. 왜냐하면 무한의 표본이 요구되고 있기 때문이다. 대신 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$e_t(\lambda) = \sum_{j=0}^{t-m-1} \alpha_j(\lambda) x_{t-j}(m) \tag{21}$$

위에서 $x_t(m) = \Delta^m y_t$이다.

μ_0이 미지인 경우에는 위에서 정의한 잔차를 조정해 주어야 한다. 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{x}(m) = \frac{1}{T-m} \sum_{t=m+1}^{T} x_t(m) \tag{22}$$

그런데 $x_t(m_0)$는 정상적이고 어고딕(ergodic)이므로 표본평균 $\bar{x}(m_0)$은 μ_0의 일치추정량(consistent estimator)이다. 잔차를 조정하면 다음을 얻는다.

$$e_t(\lambda) = \sum_{j=0}^{t-m-1} \alpha_j(\lambda^*) (x_{t-1}(m) - \bar{x}(m)),\ t = m+1, \cdots \tag{23}$$

모수추정에는 일반적으로 최소거리(minimum distance ; MD)방법이 사용되고 있다. $\lambda_0 \in \Lambda$가 추정해야 할 모수벡터라 하자. 이 때 Λ는 가능한 모수의 집합이다. MD 방법은 다음식을 최소화하면 모수의 추정값을 얻게해주는 방법이다.

$$v_t(\lambda) = \hat{g}_T(\lambda)'\, \widehat{W}\, \hat{g}_T(\lambda) \tag{24}$$

위에서 $\hat{g}_T(\lambda)$는 시계열 y_t의 함수이다. $\hat{g}_T(\lambda_0)$은 $\hat{g}_T(\lambda_0) \xrightarrow{p} 0$이다. 여기에서 p는 확률에서의 수렴(convergene in probability)이다. $\widehat{W}$는 거리를 정의해주는 양의

정부호 가중행렬이다. 식 (24)에 의한 추정치는 $T^{1/2}$ 일치성이 유지되고 점근적 정규분포를 가진다. $\hat{g}_T(\lambda)$는 식 (21) 또는 식 (23)으로 정의된 잔차의 표본 자기상관계수와 모집단 자기상관 계수간의 차이이다. $\mathrm{var}(\sqrt{T}\ \hat{g}_T(\lambda_0)) \xrightarrow{p} \Omega$이면 효율적인 가중행렬 We는 $We = \Omega^{-1}$로 주어진다.

식 (21) 또는 식 (23)으로 정의된 잔차들의 i 번째 표본 자기상관을 다음과 같이 정의하자.

$$\hat{\rho}_{e(\lambda)}(i) = \frac{\sum_{t=1}^{T-i} e_t(\lambda)\, e_{t+i}(\lambda)}{\sum_{t=0}^{T} e_t(\lambda)^2} \tag{25}$$

이 잔차의 처음 k 개 자기상관을 포함하는 벡터 $\hat{\rho}_{ke(\lambda)}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\hat{\rho}_{ke(\lambda)} = (\hat{\rho}_{e(\lambda)}(1), \cdots, \hat{\rho}_{e(\lambda)}(k))' \tag{26}$$

ARFIMA 과정의 y_t의 잔차 $e_t(\lambda_0)$의 표본상관계수의 점근적 분포는 $d_0 > -0.75$에 대하여 y_t의 참쇄신(true innivation) ε_t의 표본상관과 일치하므로 $\sqrt{T}\ \hat{\rho}_{ke}(\lambda_0) \xrightarrow{W} N(0, I_k)$이다. I_k는 차수 k의 단위행렬이다. 추정상관계수와 이론적상관계수간의 거리를 최소화하도록 한다. 그러면 $\sqrt{T}\ \hat{\rho}_{ke}(\lambda_0)$의 점근적분포가 I_k이므로 효율적 가중행렬은 단위행렬이 된다. $\hat{\rho}_{ke(\lambda_0)} \xrightarrow{p} 0$이므로 최소거리 판정기준함수(minimum distance criterion function)인 V_{ke}는 다음과 같이 된다.

$$V_{ke}(\lambda, y) = \sum_{i=1}^{k} \hat{\rho}_{e(\lambda)}(i)^2 \tag{27}$$

따라서 일반적인 최소거리(general minimum distance : GMD) 추정량 $\hat{\lambda}_k$는 다음에 의하여 얻는다.

$$\hat{\lambda}_k = \underset{\lambda \in \lambda}{\arg\min}\, V_{ke}(\lambda, y) \tag{28}$$

위 식은 잔차의 자기상관만 알면 모수를 추정할 수 있다. 여기에서 $\hat{\rho}_{ie(\lambda)}$는 잔차

$e_t(\lambda)$와 연관된 i번째 자기상관이다. 시차계수 k는 $k = o_p(T)$이다. 실제에 있어서 $k = T^{1/4}$로 선택하면 좋은 결과를 얻는다. λ의 추정은 다음에 의하여 수행된다.

$$\hat{\lambda} = \underset{\lambda \in \Lambda}{\arg\min} V_{Te}(\lambda) \tag{29}$$

$e_t(\lambda^*) = \varepsilon_t$이므로 모집단 자기상관들은 0이고 $V_{Te}(\lambda)$는 $\lambda = \lambda^*$에서 유일한 최소치를 가진다. $\hat{\lambda}$는 $d \in (-3/4, \infty)$에 대하여 λ의 $T^{1/2}$ 일치적, 점근적 정규분표적 추정량이다.

4. 재무시계열의 잔차의 자기상관과 장기기억과정 검정

오차항에 시계열 상관이 존재하지 않는 경우에는 Dickey와 Fuller는 D-F 검정을 수행할 것을 제안하였다. 그러나 오차항에 시계열 상관이 존재하면 첨가D-F 검정(augmented D-F test : AD-F)이 타당하다. FD-F 검정에서도 이 점이 성립한다. 식 (1)의 $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + u_t$에서 u_t가 $\alpha(L)u_t = \varepsilon_t$로 변형된다고 하자. 즉 u_t가 AR(p)이다. 이때 $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L, \cdots, \alpha_p L^p$로 단위원 외부에 모든 근을 가진다. 그러면 AD-F 검정은 회귀식 $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{i=0}^{p} \zeta_t \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$에 기초하여 수행된다. Dickey와 Fuller (1981)는 t값 t_{OLS}의 점근적 분포가 시계열 상관이 없을 때 도출된 t값과 동일하다는 것을 밝힌바 있다.

분수적분 과정에서 오차 u_t가 AR(p) 과정이라 하자. 그러면 회귀식은 다음과 같다.

$$\Delta y_t = \phi \Delta^{d_1} y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \zeta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{30}$$

회귀식 (2)에서와 같이 단위근의 귀무가설과 $FI(d_1)$의 대립가설은 각각 $\phi = 0$이고 $\phi < 0$일 때 모수 ϕ로 표현할 수 있다. $\phi = 0$이면 y_t는 ARIMA(p, 1, 0) 과정을 따르고 $\phi < 0$일 때 y_t는 $(\alpha(L)\Delta^{1-d_1} - \phi L)\Delta^{d_1} y_t = u_t$에 의하여 생성된다. 이때 다항식 $\Pi(z) = (\alpha(z)(1-z)^{1-d_1} - \phi z)$는 절대합 가능계수들이다. $\Pi(0) = 1, \Pi(1) = -\phi$이고 $\Delta^{d_1} y_t$는 가역과정(invertible process)이고 대립가설 아래에서 $\Delta^{d_1} y_t = C(L)\varepsilon_t$이다. 이 경우 $C(z) = (\Pi(z))^{-1}\alpha(z)$이고 $C(0) = 1$이고 $0 < C(1) < \infty$이다.

식 (30)에 의하여 계산되는 t값인 t_{OLS}에 의하여 검정을 수행한다. 이 때 t_{OLS}의 점근적 분포는 시계열상관 또는 자기상관이 존재하지 않는 경우와 동일하다. 따라서 검정에 대하여 다음의 결과를 얻게 된다.

시계열 y_t가 첨가과정(augmented process)인 경우 y_t가 ARIMA(p, 1, 0) 과정이라는 귀무가설 아래에서 회귀식 (30)의 t_{OLS}의 점근적 분포는 식 (11)과 동일하다. 그리고 $(\widehat{\zeta}_1, \cdots, \widehat{\zeta}_p)'$은 식 (30)에서 사용된 $d_1 \in [0, 1)$의 임의의 값에 대하여 점근적 정규분포를 가진다. d_1을 추정하여 사용할 때 $\hat{d}_1$의 $T^{1/2}$ - 일치추정량이면 족하다. 위에서는 d_1의 값을 알고 있을 때 AFD-F 검정이 제시되었다. 그러나 d_1을 추정해야 할 경우는 FD-F에서와 같이 다음의 결과를 얻는다. 시계열 y_t에 대하여 d_1을 추정하여 그 값을 얻을 때 y_t가 다음에 의하여 생성된다는 귀무가설을 설정한다.

$$\Delta y_t = u_t, \quad \alpha_p(L)\, u_t = \varepsilon_t \tag{31}$$

d_1이 식 (16)으로 정의된 판단기준함수(criterion function)를 최소화하는 d의 추정량일 때 회귀식 (30)의 계수 ϕ와 연관된 t값 $t_{OLS}(\hat{d}_1)$의 점근적 분포는 다음과 같다.

$$t_{OLS}(\hat{d}_1) \xrightarrow{W} N(0, 1) \tag{32}$$

따라서 d_1의 값을 추정한 후 시계열 y_t가 무작위 행보에 의하여 생성된다는 귀무가설과 평균회귀 과정에 의하여 생성된다는 귀무가설에 대한 검정은 표준정규 분포의 임계값을 사용하여 수행한다.

Ⅲ. 실증 분석

1. 한국종합주가지수의 일별수익률 시계열 데이터

주가가 무작위 행보를 따르고 있는가 아니면 분수적분 과정에 의하여 생성되고 이에 따라 장기적으로 평균에 회귀하는 평균회귀 과정을 따르고 있는지를 점검하기 위하여 일별 한국종합주가지수를 사용하였다. 기간은 1980~2000년이다. 이 21년간의 일별수익률을 사용하여 분수적분 과정의 적분모수를 추정하였다. 일별종합주가지수의 수익률에

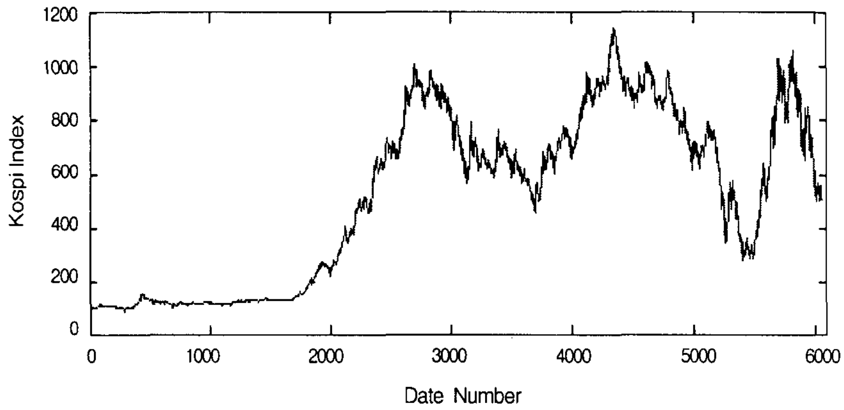
대한 기술통계량을 <표 1>로 제시한다. <표 1>에 의하면 21년간 최소수익률과 최대수익률간의 차이가 상당히 크다는 것을 알 수 있다. 이것은 수익률의 변동성이 심하다는 것을 의미한다.

일별종합주가지수와 그 수익률의 시계열적 특성을 파악하기 위하여 그래프화한 것이 [그림 1]과 [그림 2]이다. [그림 1]에 의하면 종합주가지수가 평균에 있어서 정상성을 확보하고 있지 못하며 표준편차(분산)의 측면에도 정상성이 확보되지 못한 것으로

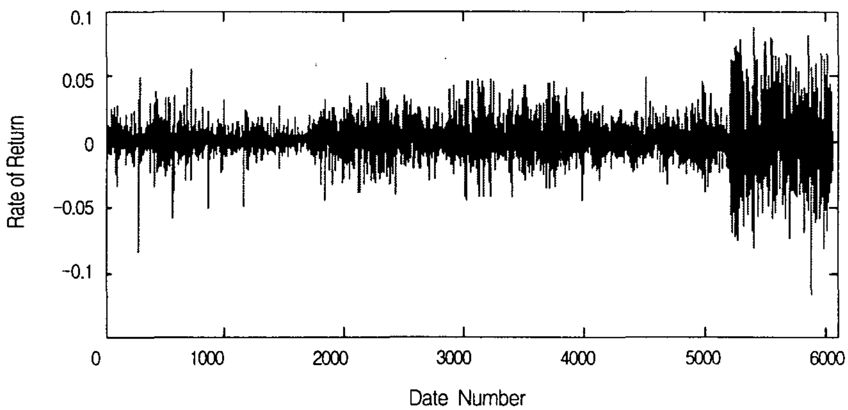
<표 1> kospi 기술통계량

평 균	표준편차	최 소	최 대	kurtosis	skewnes
0.0004	0.0151	-0.1163	0.0850	7.829	0.0850

[그림 1] kospi 시계열



[그림 2] kospi 일별수익률



보인다. 종합주가지수의 일별 수익률의 그래프인 [그림 2]에 의하면 변동성 또는 진폭성(volatility)이 상당히 크다는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 평균에 있어서의 정상성이 성립하고 있지 못한 것으로 보이고 분산에 있어서의 정상성 역시 확보되지 못한 것으로 보인다. 따라서 이 그래프들을 통하여 종합주가지수가 비정상적 과정에 의하여 생성되고 있다는 판단도 가능할 수 있을 것이다. 뿐만 아니라 이 그래프에 의하여 종합주가지수가 분수차분 과정을 따르고 있다는 생각도 가능하다. 분산의 변동성(variability) 내지는 진폭성(volatility)이 상당히 크고 시간의 흐름에 걸쳐 변하는 것으로 보이고 있기 때문에 자귀회귀 조건부이분산 모형이 주가의 행동을 설명하고 있는 하나의 모형으로 검정에서 유의성을 확보하고 있는 것이 타당하게 보인다.

2. 한국종합주가지수 수익률의 적분모수추정과 검정

한국종합주가지수의 일별수익률이 장기기억 과정에 의하여 생성되고 있는지 또는 생성되고 있지 않은지를 검정하기 위하여 ARFIMA$(1, d_1, 0)$와 ARFIMA$(0, d_1, 1)$ 과정을 사용한다. 이 두 과정은 AR에 MA과정을 첨가하고 분수적분 모수를 구하면 얻게된다. 이때 식 (29)를 이용하여 적분모수 d의 값과 검정통계량을 추정한다. 추정된 적분모수에 대한 귀무가설과 대립가설은 시계열 y_t에 대하여 다음과 같다.

$$\text{귀무가설 } H_0 : y_t \sim FI(1)$$
$$\text{대립가설 } H_1 : y_t \sim FI(d_1)$$

말하자면 귀무가설 아래에서는 수익률 생성과정의 적분차수가 1이다. 다시 말하면 귀무가설은 무작위행보이다. 대립가설 아래에서는 적분차수가 d_1로서 1이 아닌 분수값을 가지며 d는 $d_1 > -0.75$를 취한다는 것이다. 분수적분차수인 경우 $0.5 < d < 1$일 때 이 분수적분 차수를 가지는 과정은 장기기억 과정이라는 것을 의미한다. 검정통계량의 계산은 식 (17)에 의한다. 식 (17)은 검정통계량이 표준정규분포를 한다는 것을 의미한다. 따라서 계산된 검정통계량이 표준정규분포가 취할 수 있는 범위를 넘으면 귀무가설을 기각하고 대립가설을 취하게 된다.

분수차분모수 d_1을 일반최소거리방법에 의하여 추정하고 이 추정치 d_1을 사용하여 Δy_t를 $\Delta^{d_1} y_{t-1}$에 회귀하여 얻은 검정통계량을 제시하면 <표 2>와 같다. d_1을 추정하여 얻은 통계량은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르고 있으므로 이 통계량은 유의수준 5%와 1%에서 각각 기각되고 있다. 따라서 단위근의 귀무가설이 기각되고 있다. 즉 한

<표 2> 장기기억

과 정	d_1	$t_{H0}: d_0 = 1$	p
ARFIMA (1, d, 0)	0.702	-44.350	0.000
ARFIMA (0, d, 1)	0.690	-44.787	0.000

국종합주가지수가 무작위 행보(random walk)를 따른다는 귀무가설을 기각하고 있다. 이것은 대립가설이 타당한 것으로 인정되므로 종합주가지수의 일별수익률은 분수적분 과정이라는 것을 의미한다. d_1의 추정치는 자기회귀분수적분 이동평균 과정인 ARFIMA (1, d, 0)에서 0.702이고 ARFIMA(0, d, 1)에서는 0.690으로 양자가 거의 동일하다. 이 분수적분 모수의 추정치는 위의 검정이 동시검정을 의미하므로 검정이 이루어졌으며 이 검정에 의하여 그 값의 타당성이 인정되었다. 이 결과에 의하면 충격은 주가형성에 과도기적 영향(transitionary effect)을 가지고 있다. 그러나 충격이 단기간에 소멸하는 것이 아니라 서서히 감소하다가 궁극적으로 소멸한다. 다시 말해서 주가에 가해진 충격이 지수률이나 기하률로 급속히 감소·소멸하지 않고 쌍곡선율로 천천히 완만하게 감소하여 소멸하고 있다. 한국종합주가지수의 일별수익률은 적분모수 d_1이 $0.5 < d_1 < 1$의 범위 안에 있으므로 장기기억과정에 의하여 생성되고 있으며 충격의 소멸에 장기간이 소요되기는 하지만 궁극적으로는 충격이 소멸한다. 따라서 평균회귀 과정에 의하여 생성된다.

장기기억과정은 자기상관과 충격반응 가중치(impulse response weights)가 쌍곡선율로 감소하여 소멸한다. 쌍곡선율은 무척 완만한 곡선이다. 반면 단기기억 과정은 자기상관과 충격반응 가중치가 지수율로 감소하여 소멸한다. 지수율은 곡률이 높아 급격히 감소하는 곡선이다. 자기상관함수는 확률과정의 시계열적 실현으로 볼 수 있으므로 이 함수는 I(1) 과정이나 I(0) 과정과는 일치하지 않는 지속성(persistence)을 보여주고 있다. 분수차분 과정은 I(0)과 I(1) 과정 사이에 있는 과정이라 할 수 있다. 누적충격반응은 단위쇄신의 총 영향이다. t 시점에서의 충격이 $k > 0$에 대하여 t_{t+k} 시점에서도 영향을 미친다. 이 때 시간간격 k는 정상적 ARMA 과정에 적용되는 시간간격보다 상당히 크다. 장기기억과정은 모든 도수(frequency)에서 스펙트럼(spectrum)이 유한하다. 그러나 0의 빈도 주변에서는 스펙트럼이 무한하다. 분수적분 과정은 이와 같은 성질은 가지고 있다.

한국종합주가지수는 이런 의미에서 장기기억과정을 따르고 있으나 장기기억은 궁극적으로 소멸하고 있으므로 이 지수는 장기적인 평균회귀 과정에 의하여 생성되고 있다. 이 지수는 무작위 행보를 따르고 있지 않다. 한국종합주가지수의 일별수익률의 차분모

수 $d_1 = 0.702$이다. d_1의 값이 $0.5 < d_1 < 1$의 범위안에 존재하고 있다. 따라서 I(0)의 과정을 따르지 않고 I(1)도 따르지 않는다. I(1)로 차분하면 과도하게 차분되고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 이일균(1991, 2001)의 결과와 일치하고 있다. 그는 한국종합주가지수가 무작위 행보과정에 의하여 생성된다는 가설을 기각하고, 그 대신 장기기억 과정에 의하여 생성되고 있다는 점을 밝힌 바 있다.

장기기억과정은 자본자산의 가격결정에 중요한 역할을 담당한다. 특히 포트폴리오의 구성에 중요시될 수 있다. 자본자산 가격결정 모형을 사용하여 대기업과 소기업의 주식수익률을 분석한 연구에서는 소기업의 수익률이 대기업의 수익률보다 높다는 발견이 제시되어 있다. 충격이 대기업에 가해지는 경우 충격의 양이 기업의 총 규모의 측면에 파악할 때 그렇게 큰 것이 아닌 경우가 많을 것이다. 물론 기업 전체의 크기에 비하여 적지 않은 충격의 양이 가해지는 경우도 배제할 수는 없을 것이다. 그러나 충격이 대기업의 가치에 장기간에 걸쳐서 영향력을 발휘하고 있는 것은 사실이지만 대기업 전체의 양에 비하여 충격의 양이 소규모이면 전체기업에 미치는 충격의 정도는 그렇게 크지는 않을 것이다.

반면 소규모 기업에 가해진 충격은 그 양이 소기업의 가치의 양에 비하여 상당히 큰 경우가 많을 것이다. 불황시에 대기업보다 소기업이 도산하는 경우가 많은 것이 이같은 논의를 정당화시킬 수 있는 하나의 예에 해당될 것이다. 충격이 장기적으로 존재하고 있으며 기업은 끊임없이 충격을 받고 있다. 소기업이 생존하고 번성해 나가고 있다면 기업의 가치형성에 유리한 충격이 많이 가해질 것이다. 그러면 충격의 양이 기업에 미치는 영향도가 대기업보다 소기업이 많을 것이므로 소기업의 수익률이 대기업의 수익률보다 크게 될 것이다. 주가의 장기기억과정은 소기업대 대기업간의 수익률의 이상현상(anomalies)을 설명해 주는 하나의 요인인 것이다.

주말효과 역시 장기기억과정이 표출하는 한 현상일 수도 있다. 거래가 이루어지지 않는 휴일의 장기적 요소가 주말에 반영되어 주말효과를 내는것 같다. 장기적 요소는 그 효과가 축적되어 월요일에도 나타날 수 있다. 달리기에서 관성이 유지되어 계속 달려가면서 천천히 속도를 늦추게 된다. 달리기에서 급격한 멈춤은 용이하지 않으며 급격한 멈춤은 신체에 다른 작용으로 나타나며 멈춤에 소요되는 에너지가 계속 달리기에 요구되는 에너지보다 크다. 이와 같이 주가도 연속진행중에 주말에 연속진행을 중단해야 하므로 그 에너지가 크게 분출되는 것이다. 그 결과가 주말효과로 나타난 것이라 할 수 있다. 따라서 장기기억의 효과는 월요일보다 주말에 발현되는 것이다.

장기기억은 옵션가격에도 영향을 미친다. 단기기억 아래에서의 옵션가격과 장기기억 아래에서의 옵션가격은 상이하다. 충격이 단기간에 소멸하지 않고 장기에 걸쳐 지속되고 있으면 주식옵션은 기저자산(underlying asset)의 함수이므로 장기기억과정 아래에서는 옵션가격의 예측이 오히려 용이해진다. 옵션가격은 내재가치(intrinsic value)와 시간가치(time value)의 합으로 구성된다. 충격의 장기기억은 옵션가격의 시간가치에 영향을 미친다.

장기기억은 포트폴리오에 중요한 역할을 담당하고 있다. 충격이 개별증권에 미치는 영향도를 추정하여 포트폴리오 구성에 이용하면 그 만큼 포트폴리오의 수익의 예측성에 정확성을 기할 수 있다. 뿐만 아니라 장기기억을 고려하여 포트폴리오의 수정(revision)을 효율적으로 수행할 수 있다. 따라서 포트폴리오의 성과(performance)를 높일 수 있다. 옵션시장이나 선물시장과 현물시장(spot market) 또는 현금시장(cash market)의 두 시장을 중심으로 포트폴리오를 구성하는 경우에는, 옵션이나 선물의 가치를 복제하는 포트폴리오(replicating portfolio)를 구성하여 두 시장을 결합하고 어느 시장에서 매입하면 다른 시장에서 공매하는 포트폴리오 방침을 설정하는 경우에는 장기기억을 이용하여 효율적인 투자를 수행 할 수 있다. 이를 통하여 수익률을 높일 수 있다.

Ⅵ. 결 론

이 논문에서는 일반최소거리 방법에 의하여 분수차분모수를 추정하는 방법과 일반최소거리 방법에 의하여 추정된 분수차분모수를 사용하여 한 시계열이 무작위 행보과정에 의하여 생성되는지 아니면 평균회귀 과정에 의하여 생성되고 있는지를 검정하는 방법을 제시하였다. 이 검정방법은 모수추정과 데이터생성 과정을 동시에 검정하는 동시검정방법이다. 그리고 이 방법을 한국종합주가지수의 일별수익률에 적용하여 한국종합주가지수의 차분모수를 추정하고 한 종합주가지수의 생성함수가 평균회귀 과정인지 아니면 무작위 행보과정인지를 검정하였다.

한국종합주가지수의 일별수익률은 무작위 행보를 따르고 있지 않음이 밝혀졌다. 이 시계열은 장기기억과정을 따르고 있다. 따라서 분수적분 과정이다. 분수적분모수가 0.702다. 이것은 차분에 있어서 I(1)이면 과도하게 차분되고 있음을 의미한다. 충격이 경제에 가해지면 이 충격이 지수율로 감소하여 소멸하는 단기기억과정을 따르지 않는다. 오히려 충격이 대한히 느리게 감소해가는 쌍곡선율을 가지고 있다. 그러나 충격이 영원히 지

속되는 것이 아니라 완만하고 느리게 감소하여 종국에는 소멸한다. 그러므로 궁극적으로는 충격이 모두 소멸하여 평균에 회귀한다. 한국종합주가지수의 일별수익률은 평균회귀 과정을 따르고 있다. 주가가 장기기억과정에 의하여 생성되고 있는 것은 포트폴리오의 형성과 투자전략, 옵션 및 선물의 포트폴리오전략에 중요한 역할을 담당한다. 그리고 주말효과와 소규모기업의 수익률과 같은 이상현상을 설명해 주고 있다.

참 고 문 헌

이일규, "주가의 장기적기억, 자기회귀 분수적분 이동평균과정과 주가형성", 명지대학교, 2002.

이일규, "분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정", 재무관리연구, 제18권 제1호, (2001), 6, 1-21.

이일규, "주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산", 증권학회지, 제25집, (1999), 31-70.

이일규, "쪽거리, 분수브라운 운동과정, 장기기억 및 분수적분 일반자기회 귀 이분산 : 주가형성과정에 대한 한 탐구", 증권학술지 제24집, (1999), 1-51.

이일규, "주가의 비선형성과 시계열적 특성", 재무관리논총, 제3권 제1호, (1996), 1-30.

Baillie, R. T., "Long Memory Process and Fractional Intergration in Economics and Finance," *Journal of econometrics*, 73, (1996), 15-131.

Bhargava, A., "On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series," *Review of Economic Studies*, 53, (1986), 369-384.

Bhargava, A., *Statistics for Long Memory Process*. New York : Chapman and Hall, 1994.

Beran, J., "Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter for Invertible and Short and Long Memory Autoregressive Integrated Moving Average Models," *Journal of the Royal Statistical Society*, 57, (1995), 659-672.

Berk, K. N., "Consistency of Spectral Estimates," *The Annals of Statistics*, 2, (1974), 489-502.

BYERS, D., J. Davidson and D. A. Peel, "Modelling Political Popularity : An Analysis of Long-range Dependence in Opinion Polls Series," *Journal of the Royal Statistical Society Series*, A, 160, (1997), 471-490.

Davidson, J., *Stochastic Limit Theory*. New York : Oxford University Press, 1994.

Davidson, J. and R. M. Dejong, "The Functional Central Limit Theorem and Weak Convergence to Stochastic Integrals II : Fractionally integrated Processes," Unpublished Manuscript, Michigan State University, 1999.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, "Distribution of Estimations of Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Journal of the American Statistical Associa-*

tion, 74, (1979), 427-431.

Dickey, D. A. and W. A. Fuller, "Likelihood Ratio Tests for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica*, 49, (1981), 1057-1072.

Diebold, F, X. and G. D. Rudebusch, "On the Power of the Dickey-Fuller Tests against Fractional Alternatives," *Economic Letters*, 35, (1991), 155-160.

Dolado, J. J., J. Gonzalo and L. Mayoral, "Long-range Dependence in Spanish Opinion Poll Data," forthcoming in *Journal of Applied Econometrics*, 2001.

Dolado, J. J., J. Gonzalo and L. Mayoral, "A Fractional Dickey-Fuller Test for Unit Roots," *Econometrica*, 70, (2002), 1963-2006.

Dolado, J. J. and F. Marmol, "Asymptotic Inference for Nonstationary Fractionally Integrated Processes," Working Paper Series No.99-68, (1999), Universidad Carlos Ⅲ de Madrid.

Fox, R. and M. S. Taqqu, "Large Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series," *The Annals of Statistics*, 14, (1986), 517-532.

Galbraith, J. W. and V. Zinde-Walsh, "Time Domain Methods for the Estimation of Fractionally-integrated Ime Series Models," Mimeo, 1997.

Geweke, J. and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis*, 4, (1983), 221-238.

Gil-AlaÑA, L, A. and P. M. Robinson, "Testing of Unit Root and Other Nonstationary Hypotheses in Macroeconomic Series," *Journal of Econometrics*, 80, (1997), 241-268.

Gonzalo, J. and T. Lee, "Pitfalls in Testing for Long Run Relationships," *Journal of Econometrics*, 86, (1998), 129-154.

Gourieroux, C., F. Maurel and A. Monfort, "Least Squares and Fractionally Integrated Regressors," Document de Travail No.8913, INSEE, 1989.

Granger, C. W. J. and K. Joyeux, "An Introduction to Long-memory Time Series and Fractional Differencing," *Journal of Time Series Analysis*, 1, (1980), 15-29.

Gray, H. L and N. F. Zhang, "On a New Definition of the Fractional of the Fractional difference," *Mathematics of Computation*, 50, (1988), 513-529.

Johansen, S., "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in

Gaussian Vector autoregressive Models," *Econometrica*, 59, (1991), 1151-1580.

Hall, P. and C. C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Applications*. New York : Academic Press, 1980.

Hauser, M. A., B. M. Potscher and E. Reschengofer, "Measuring Persistence in Aggregate Output : ARMA Models, Fractionally Ingetrated ARMA Models and Nonparametric Procedures," *Empirical Economics*, 24, (1999), 243-269.

Helland, I. S., "Central Limit Theorems for Martingales with Discrete or Continuous Time," *Scandinavian Journal of Statistics*, 9, (1982), 79-94.

Kramer, W., "Fractional Integration and the Augmented Dickey-Fuller Test," *Economic Letters*, 61, (1998), 239-272.

Lee, D. and P. Schmidt, "On the Power of the KPSS Test of Stationarity against Fractionally Integrated Alternatives," *Journal of Econometrics*, 73, (1996), 285-302.

Mandelbrot, B. B. and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications," *SLAM Review*, 10, (1968), 422-437.

Marinucci, D. and P. M Robinson, "Alternative Forms of Brownian Motion," *Journal of Statistical Planning and Inference*, 80, (1999), 11-122.

Marmol, F., "Searching for Fractional Evidence Using Combined Unit Root Tests," Working Paper Series No.98-39, (1998), Universidad Carlos III de Madred.

Mayoral, L., "A New Minimum Distance Estimation Procedure of ARFIMA Processes," Working Paper Series No.00-17, (2000), Universidad Carlos III de Madrid. Revised version(2002) available upon request.

Nelson, C. R. and C. I. Plosser, "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series," *Journal of Monetary Economics*, 10, (1982), 139-162.

Ng, S. and P. Perron, "Unit Root Tests in ARMA Models with Data Dependent Methods for the Selection of the Truncation Lag," Journal of the American Statistical Association, 90, (1995), 268-281.

Phillips, P. C. B. and Z. Xlao, "A Primer on Unit Root Testing," *Journal of Economic Surveys*, 12, (1998), 423-470.

Robinson, P. M., "Semiparametric Analysis of Long Memory Time Series," *Annals of Statistics*, 22, (1992), 515-539.

Robinson, P. M., "Efficient Tests of Nonstationary Hypotheses," *Journal of the*

American Statistical Association, 89, (1994), 1420-1437.

Said, S. E. and D. A. Dickey, "Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order," *Biometrika*, 71, (1984), 599-608.

Samaronditski, G. and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussion Random Process.* New York : Chapman and Hall, 1994.

Sargan, J. D. and A. Barghava, "Maximum Likelihood Estimation of Regression Models with First Order Moving Average Errors when the Root Lies on the Unit Circle," *Econometrica* 51, (1983), 799-820.

Sowell, F. B., "The Fractional Unit Root Distribution," *Econometrica,* 58, (1990), 495-05.

Sowell, F. B., "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally-integrated Time-series Models," *Journal of Econometircs*, 53, (1992), 165-188.

Stock, J. H. and M. W. Watson, "Testing for Common Trends," *Journal of the American Statistical Association*, 83, (1988), 1097-1107.

Tanaka, K., *Time Series Analysis : Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory.* New York : Wiley, 1996.

Tanaka, K., "The Nonstationary Fractional Unit Root," *Econometric Theory,* 15, (1999), 549-582.

Tieslau, M., P. Schmidt and R. Baillie, "A Minimum Distance Estimator for Long Memory Errors," *Journal of Econometrics*, 71, (1996), 249-264.

Velasco, C. and P. M. Robinson, "Whittle Pseudo-Maximum Likelihood Estimation for Nonstationary Time Series," *Journal of the American Association,* 95, (2000), 1229-1243.

Xlao, Z. and P. C. B. Phillips, "An ADF Coefficient Test for a Unit Root in ARMA Models of Unknown Order with Empirical Applications to the US Economy," *Econometrics journal*, 1, (1998), 27-43.