財務管理硏究 第十九券 第二號(2002. 12), 1~25

코스닥시장과 증권거래소간의 정보비대칭구조와 최적포트폴리오 전략

최 성 근*

〈요 약〉

본 논문은 한국의 대표적인 두 시장, 코스닥시장과 증권거래소간의 투자전략을 비대칭적 정보가정에서 모형화하고, 정보상의 비대칭요소를 추정하여 최적포트폴리오를 구하는데 목적이 있다. 정보상에 비대칭적 시장들에서는 그 시장에 독특한 위험프리미엄이 존재하게 되는데, 이는 시장간의 효율적 포트폴리오를 구성하는데 있어서 비체계적 위험과 체계적 위험간의 구분이 불분명해지는 상황을 의미하며, 따라서 최적포트폴리오도 보다 복잡한 구조를 갖게 된다.

본 연구는 분석적 차원에서 정보상에 비대칭적인 것으로 가정되는 두 자본시장, 즉 코스닥시장과 증권거래소에서의 최적포트폴리오 전략을 살펴보고, 두 시장간의 비대칭성이 주는 의미와 그것이 최적 투자정책에 미치는 영향의 정도를 분석하고, 비대칭적인 두 시장에서의 균형조건을 살펴본다.

먼저, 최적포트폴리오 전략을 살펴보고, 자산가격 움직임에 있어서 차익거래의 영향을 분석하며 이에 대한 정보상으로 비대칭적인 두 시장간의 포트폴리오 전략과의 관계도 분석하였다. 이어서 비대칭적상황을 발생시키는 다양한 요소들을 살펴보며 이와 같은 정보비대칭요소가 기대수익수준에 미치는 영향을 분석하기 위해 확률과정의 최적화 방법을 이용하여 추정하였다. 따라서 관련정보를 보유하지 못한 일반투자자들의 경우, 이 추정치를 이용하여 새로운 포트폴리오를 구성하게 될 것이다. 이 또한 불편추정치로서 최적포트폴리오로서의 역할을 하고 있는 것으로 해석된다.

그러나 비대칭요소 추정치의 정확도를 높이기 위해서는 정보를 확보하여야 하며 이에 따라 정보비용도 증가하게 되며 이 또한 최적포트폴리오의 수익성에 영향을 미치게 된다. 따라서 정보비용수준을 포트폴리오의 수익성을 고려하여 결정하여야 하며 이 점에 있어서 본 연구는 어떤 조건하에서 정보비용을 감안한 코스닥시장에의 투자결정이 이루어질 수 있는지를 분석하고 그 기준을 확률적 방법을 이용하여 제시하였다.

* 단국대학교 강사

** 유익한 조언을 주신 익명의 심사위원에게 감사드립니다.

Ⅰ. 서 론

본 연구는 분석적 차원에서, 한국의 대표적인 두 시장, 코스닥시장과 증권거래소 간의 투자전략을 비대칭적 정보가정에서 모형화하고, 최적화된 포트폴리오를 도출하며 두 시장간의 정보적 균형조건을 찾는데 목적이 있다. 이론적 및 실험적 포트폴리오분석에 있어서 현재까지 제시되고 발전된 주요 이론들을 살펴보면 대체로 두 가지 접근법을 고려해 볼 수 있는데, 하나는 실험적 접근법으로 먼저 CAPM을 들 수 있는데, 이는 평균 및 분산의 분석에 바탕을 둔 모형이며, Markowitz (1952)에 의해 제시되고 Sharpe(1964), Lintner(1965) 및 Mossin(1966) 등에 의해 발전되었다. 이 모형에 의하면 합리적인 투자자들은 효율적 투자선을 구성하고 그들의 선호도에 따라 자산을 선택하게 된다는 것이다. 이 모형의 장점은 그 단순성에 있으나 이 단순성이 또한 이 모형의 약점이 되고 있다. 이와 같은 약점을 보완하기 위해 보다 다양한 변수들을 포함시키는 APT 모형이 Ross(1976)에 의해 제시되었다.

또 다른 투자이론의 발전은 보다 이론적인 접근법으로 확률적 제어를 통한 최적화모형이 그것이며 이를 이용하여 Merton(1969, 1971, 1973)은 최적투자를 통한 부와 소비의 최적관계를 제시하였다. 이 모형은 금융자산의 가격을 마코프(Markóv) 과정으로 보고 수익에 바탕을 둔 소비에서 발생하는 기대효용의 최대화 문제를 해결하려는 것으로, 다루기 힘든 확률미분방정식에 관련된 최적화 문제를 해결하는 단순한 방법을 제시하였다는 것뿐만 아니라 증권가격의 불규칙한 움직임을 보다 잘 설명해줄 수 있다는데에도 그 장점이 있으며 따라서 본 연구도 이와 같은 접근법을 택할 것이다.

이와 병행해서, 금융위험을 관리하는데 있어서 또 다른 이론적 발전이 이루어진 분야가 있는데, 바로 정보에 관한 분석이다. 이는 금융자산의 가격결정에 있어서의 정보의 역할에 관한 분석으로, 정보적 우위를 통한 차익거래의 가능성을 마팅게일(Martingale) 이론을 통해 나타내려는 것이다. 특히, 금융자산의 수익함수가 지니는 마팅게일적 특성은 금융시장의 균형이 단지 마팅게일의 한 현상이라는 것을 보여준다. 그런데 마팅게일 특성을 이론적으로 적용하는데 있어서, 그것이 확률적 도구를 개발하기위한 것이든 또는 금융부문에의 응용을 위한 것이든지 정보요소의 추정을 모형화해야 할 필요성이 대두되며 바로 이 점 또한 본 연구의 주 관심사가 될 것이다.

코스닥시장의 설립이후 금융시장에서의 균형을 분석하는데 있어서 투자자들의 관심을 끄는 몇가지 문제들이 있을 수 있는데, 코스닥시장의 설립이 투자자들에게 두 시장, 즉 코스닥시장과 증권거래소에의 투자를 통한 자본의 효율적 배분에 긍정적 역할을 한다고 볼 수 있지만, 문제는 이와 같은 이점이, 보유하고 있는 금융자산에 관련된 위험들

을 시장에서 형성되는 가격이 정확히 반영할 때 만이 가능한 것이라는 점이다. 만일 역사가 짧아서 충분히 발전되지 않았거나 시장규모가 작은 자본시장의 경우, 대규모자본을 동원하는 소수의 투자자들의 개입이나, 내부자거래, 관련된 선물거래의 부재, 또는 기타의 비효율적 요소들과 같은 정보비대칭적 요소들은 금융자산의 가격을 왜곡시키고, 시장의 유동성을 제한할 수 있으며 이는 결국 가격변수들의 미래움직임에 대한 적절한 기대치를 구하는데 상당한 어려움을 줄 수 있다. 현실적으로도, 정보의 유포 내지 확산이 상대적으로 빈약한 코스닥 시장에 있어서, 거래의 효율성이 정보상의 비대칭성으로 제한될 위험이 있고 또한 투기나 내부자거래등에 노출되어 있는 것이 특징이다.

코스닥 시장이 문을 연 이래로 관련증권들이 보여준 높은 수익률이 코스닥 시장으로의 자본유입의 주요인이 되었지만 최근들어 코스닥 시장의 불확실성과 비정상적 움직임은 많은 투자자들이 시장을 떠나게 만들었는데, 코스닥 시장에 투자하려는 일반 투자가들에게 있어서 불확실한 투자환경하에서 관련정보의 보유여부는 최적포트폴리오를 구성하는데 상당히 중요하다. 정보비대칭적 투자환경하에서 코스닥에 등록된 기업들에 "관련된" 사람들은 일반 투자자들에 비해 상대적으로 정보상의 우위를 지니게 되고, 따라서 일반 투자자들은 투자결정의 최적조건을 구성하기 위해 관련정보를 획득해야 하는데 이는 상당한 비용을 필요로 한다.

투자론에서 강조되는 위험으로 체계적 위험과 비체계적 위험이 있으나, 정보비대칭상황하에서는 첫 번째 위험을 무시할 수는 없을 것이다. 왜냐하면, 일반투자자들에게 체계적인 것으로 인식되는 위험도 관련투자자들에게는 부분적으로 비체계적인 위험이 되기 때문이다. 따라서 일반투자자들에게는 분산화전략으로도 이와 같은 위험을 줄일 수는 없는 것이다.

이와 같은 배경하에서 본 연구는 분석적 차원에서, 먼저 제 Ⅱ장에서는 증권거래소와 정보비대칭 특성을 지니는 것으로 가정되는 코스닥시장간의 포트폴리오투자를 모형화하고 제 Ⅲ장에서는 정보상의 비대칭요소를 추정하여 최적포트폴리오를 구하고 이어서 두 시장간의 정보적 균형조건들을 제시하였다. 본 연구는 투자자들의 다양한 형태의 전략적 행동들을 분석적 모형을 통하여 종합적으로 설명하려는 많은 연구자들의 노력에 감히 동참하여, 미약하나마 분석적 모형의 발전에 도움이 되었으면 하는 바람으로 시작되었다.

Ⅱ. 정보비대칭요소와 두 시장간 최적포트폴리오 분석

먼저, 자본시장간에 있어서 정보비대칭의 특성을 부각시키기 위해 다음과 같은 가정

을 한다. 즉, 상장기업들의 주식을 대상으로 하는 증권거래소는 정보의 효율성이 비교적 적절하게 이루어져 있고 반면에 상장조건을 만족시키지 못하는 기업들의 주식을 대상으로 하는 코스닥시장의 경우 정보의 효율성이 약하다고 가정한다. 여기서 정보의 낮은 효율성이란 불완전경쟁시장을 의미하는 것으로 코스닥기업들에 관련된 소수의 투자자들이 주요정보를 독점하여 일반투자자들보다 주가의 움직임을 예측하고 또한 영향력을 행사하는데 상당한 우위를 지니고 있음을 말한다. 여기서 우리는 정보를 보유하고 있는 투자자집단을 대표하는 투자자를 '관련투자자'로, 정보를 지니지 못하는 투자자집단을 대표하는 투자자를 '일반투자자'로 명하여 구분한다.

1. 정보비대칭요소

금융시장에 있어서 금융자산가격의 평가는 결국 기대수익의 평가로서 이루어진다. 그러나 이는 몇 가지 가정 하에서 고려되는 것으로, 개별증권의 특징들과 일반투자자의 행동이 그것이다. 그리고 금융자산의 특징들은 일반적으로 기대수익률의 분산과 공분산과 같은 통계모수들을 의미한다. 그러나 두개 이상의 증권시장간에 이루어지는 투자거래에 있어서는 또 다른 위험들이 존재하는데, 이런 위험들은 일반투자자들이 접하는 다양한 어려움들을 의미하는 것으로 주주들의 권익보호미흡에서부터 거래청산의 불확실성까지 다양한 장애들이 존재한다. 그러나 코스닥시장과 같이 역사가 짧은 자본시장의 경우, 그와 같은 시장이 보여주는, 불규칙한 수익률을 발생시키는 특정한 위험들도 일반투자자들은 고려해야 하는데, 증권수익률에 상당한 영향을 미치는 이런 요소들에는 다음과 같은 것들이 있다.

(1) 외부자본유입의 영향 : 이는 특히 상당히 불안정하고 증권 수 및 규모가 작은 시장에서 상당한 규모의 국내외 자금들이 소수의 증권에 집중적으로 투자되거나 이탈하는 경우가 그렇다.

(2) 정보비대칭으로 인한 관련정보의 신뢰성부족 및 금융시장의 불투명성 : 이는 정보가 부족하거나 신뢰할 수 없는 정도라든가 또는 정보상의 우위를 지니고 있는 관련투자자의 영향력이 상당한 경우에 해당되는데, 이 경우, 일반투자자는 코스닥증권들에 대한 선물이나 옵션거래가 존재하지 않으므로, 투자헤지가 불가능하거나 또는 상당한 비용을 필요로 하게 된다. 따라서 이와 같은 변수들의 움직임은 일반투자자들에게 주가움직임에 있어서 분석해야 할 주요한 요소들 중 하나이다.

이상과 같이 코스닥시장에 있어서의 주요 특징들을 고려해 볼 때, 최적포트폴리오를 구성하는데 있어서 단지 종래의 변수들, 즉 기대수익과 분산만을 고려한다는 것은 다른

중요한 변수들을 빠뜨림으로써 왜곡된 투자정책을 결정할 위험을 지니게 된다. 따라서, 일반 및 관련투자자들의 전략은 금융자산의 기대수익 뿐만 아니라 다른 주가영향 요소들의 추정치를 감안한 효용의 극대화에 있다고 할 수 있다.

2. 두 시장간 최적포트폴리오정책

코스닥증권의 수요를 분석한다는 것은 결국 투자자들이 증권거래소보다는 코스닥 시장에 투자하는 동기를 분석하는 것이 된다. 이와 같은 분석은 투자자들이 취할 수 있는 포트폴리오의 구조에 대한 이해와 한 시장의 증권들보다 다른 시장의 증권들까지 보유하면서 얻게 되거나 또는 잃게되는 것에 대한 이해가 필요하다. 따라서 두 시장간 투자전략은 분석과정과 의사결정 과정의 보다 분명한 연결이 필요한데, 이와 같은 전략은 우리 모형에서 증권가격에 영향을 미치는 주요 요소들을 중심으로 분석될 것이다.

두 시장간 투자동기는 기본적으로 두 가지 요인으로 구분할 수 있는데, 하나는 한 시장에서보다 다른 시장에서의 높은 수익률을 추구하기 위한 것으로 이는 두 시장의 상대적 움직임을 예측하는 행동을 의미하고 또 하나는 두 시장간의 분산화에 의한 포트폴리오의 총위험의 감소를 추구하기 위한 것이다.

첫 번째 동기는 기본적으로 두 상황에 의거하는데, 먼저 한 시장에서의 투자기회가 거의 존재하지 않는 경우이고 또 다른 경우는 두 시장간 특이성에 관련된 것으로 이는 주어진 유사한 위험수준에 대해 높은 수익률을 얻게 해주는 경우이다. 그런데 두 시장간 포트폴리오관리는 한 시장에서의 포트폴리오관리에 비해 보다 더 확장된 접근법이 필요하며 이는 두 시장간의 투자결정이 수익률이나 거래비용 차원에서 불확실한 예측에 근거하고 있기 때문이다. 결국, 이와 같은 투자관리의 복잡성은 한 시장에서만의 투자에 비해서 보다 많은 수의 요인들을 고려해야 한다는테 있다. 그와 같은 요인들을 고려하여 본 연구는 위험차원에서 다양하면서도 비대칭적인 두 시장에서의 투자자들의 포트폴리오 전략에 대해, 또한 두 시장간의 수익률차에 대한 투자자들의 행동에 대해 살펴보기로 한다.

그러면 이제 한 투자자가 두 시장에 투자하려고 한다고 하자. 문제는 어떻게 그의 자금을 두 시장의 다양한 자산에 배분할 것인가이다. 이 문제에 답하기 위해 먼저 본 모형의 틀을 구성해야 하는데, 증권거래소를 1로, 코스닥시장을 2로 표시하고 마찬가지로 일반투자자를 1로, 관련투자자를 2로 표시하기로 하고, 이 두 시장에서 각각 위험자산이 거래되고 있다고 가정하자. 이 때 제기되는 문제들은 먼저 이 자산들이 시간에 따라 어떻게 변화할 것인 가이고, 둘째로는 어떻게 투자선택기준을 정의할 것인 가이다.

이를 위해서는 두 시장의 투자자들이 수익률과 위험을 기준으로 결정하는 최적 수요량을 고려해볼 필요가 있는데, 이는 Merton(1971, 1973)연구의 결과를 응용하여 최적정책을 유추하도록 한다. Merton의 연구는 이미 잘 알려진 것이므로 구체적인 전개과정을 제시하지 않고 간단히 나타내기로 한다. 그리고 끝으로 두 시장간의 균형조건에 대해 분석하려고 하는데, 여기서 균형이 갖는 의미는 위험자산의 수요공급에 대한 정보상의 최적화상태를 의미하며 이는 두 시장간 금융자산의 가격결정에 중요한 역할을 하게 된다.

1) 기본 가정

확률공간(Ω, $\Im$, P)이 존재하며 $\Im$은 Ω의 σ-집합체이고 P는 확률이다. 본 연구가 다루게 되는 변수들의 움직임은 과정(process)으로 표현되는데, 여기서 과정이란 $\Omega \times [0, \infty]$ 상에서 가측(mesurable) 함수로 정의된다. 이렇게 공간 (Ω, $\Im$)는 부분집합족 ($\Im_t$, t $\in R^+$)을 갖는데 이는 정보축적상태를 뜻한다. 즉, 만일 $B \in \Im_t$ 이면, 이는 투자자가 t 시점에서 B 라는 사건이 발생하였는지 아닌지 알고있다는 것을 의미한다. $z(t)$를 평균 0과 분산 1을 가진 브라운 운동을 하는 확률변수라고 할때, $\Im_t$는 브라운 운동의 σ-집합체, 즉 $\Im_t = \sigma(z(s), s \le t)$이다. 이와 같은 σ-집합체는 증가함수, 즉 $s \le t$에 대해 $\Im_s \subset \Im_t$ 이다. 그리고 $E(.)$는 $E(\ |\ \Im_t)$, 즉 $\Im_t$에 대한 조건부 기대치이다. 그리고 $t, x \in C([0, T] \times R, R)$이며 이는 연속함수집합 $f(t, x)$를 뜻한다.

$S_1(S_2)$를 증권거래소(코스닥시장) 증권들을 대표하는 증권가격이라고 하고 S_1와 S_2는 내재적 가치를 나타내는 생산량, Y(펀더멘탈요소로 인식)와 시간에 의해 영향을 받는다고 가정하자. 즉 $S_i = S_i(Y, t), i = 1, 2$. 먼저 각 시장의 대표적인 생산함수 Y_1와 Y_2는 다음과 같이 확률과정(Ito process)을 따르는 것으로 가정한다(여기서 시간함수표시 '(t)'는 생략했다).

$$dY_1 = Y_1 \mu_{Y1} \mathrm{dt} + Y_1 \sigma_{Y1} dz_{Y1}$$
$$dY_2 = Y_2 \mu_{Y2} \mathrm{dt} + Y_2 \sigma_{Y2} dz_{Y2} \tag{2-1}$$

그리고 두 시장의 증권가격, S_1와 S_2는 이토정리를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$dS_1(t) = S_1(t)\, \mu_1(t)\, dt + S_1(t)\, \sigma_1(t)\, dz_1(t)$$
$$dS_2(t) = S_2(t)\, \mu_2(t)\, dt + S_2(t)\, \sigma_2(t)\, dz_2(t) \tag{2-2}$$

위 식에서

$$\mu_1 = Y_1 S_1'(Y_1)\mu_{Y1} + \frac{1}{2} Y_1^2 \ S_1''(Y_1)\ \sigma_{Y1}^2$$

$$\mu_2 = Y_2 S_2'(Y_2)\mu_{Y2} + \frac{1}{2} Y_2^2 \ S_2''(Y_2)\ \sigma_{Y2}^2$$

$$\sigma_1 dz_1 = Y_1 \ S_1'(\ Y_1)' \sigma_{Y1} \ dz_{Y1}$$

$$\sigma_2 dz_2 = Y_2 \ S_2'(\ Y_2)' \sigma_{Y2} \ dz_{Y2}$$

그리고 z_1와 z_2는 브라운(Brown) 과정이다. 우리는 또한 $\mathfrak{I}_t^{S_1 S_2}$ 상에서 $\mu_1(t)$와 $\mu_2(t)$ 그리고 $\sigma_i(t) = \{\sigma_i(t), \mathfrak{I}_t, i = 1, 2\}$가 다음과 같은 조건을 충족한다고 가정한다.

$$P(\int_0^T | \mu_i(s) | dt < \infty) = P(\int_0^T \sigma_i(s)^2 < \infty) = 1, \ i = 1, 2 \qquad (2\text{-}3)$$

코스닥시장에서 금융자산의 가격만이 관찰된다고 가정하자. 그래서 브라운운동 $z(t)$의 움직임과 수익률 변화는 투자자들이 보유하고 있는 정보에 의해서만 추정된다고 하자. 만일 $\mu_i*(t)$가 $\mu_i(t)$의 실제값이라면 $\mu_i(t)$는 정보축적치인 σ-집합체에 의한 시장 i의 금융자산수익률의 조건부 기대치 $\mathrm{E}[\mu_i*(t) \mid \mathfrak{I}_t^{\mu}]$을 뜻한다. 여기서 $\mu_i(t)$, 즉 추정된 수익률과 $\sigma_i(t)$의 구조에 대한 조건은 결국 다음과 같은 과정이 존재함을 의미한다.

$$dz_i(t) = [\, dS_i(t) / S_i(t) - \mu_i(t)\, dt\} / \sigma_i(t), i = 1, 2 \qquad (2\text{-}4)$$

위 조건들은 따라서 $\{\mathfrak{I}_t^{\mu} : t \in [0, T]\}$와 $\{\mathfrak{I}_t^{z} : t \in [0, T]\}$가 동등함을 보장하며, 따라서 $z(t)$의 관찰로부터 수집된 정보는 금융자산의 가격의 관찰로부터 수집된 정보와 동등하다. 즉, $\mathfrak{I}_t^{\mu} = \mathfrak{I}_t^{z}$이며 이와 같은 특성은 두 시장간 효율성의 존재에 있어서 중요한 역할을 한다.

2) 최적포트폴리오 전략

각 시장에서 있어서 투자자들은 t시점에 가법적(additive)이고 가분한(separable) 부, $W_i(t)\,(i = 1, 2)$를 가지고 있다고 하자. 최적화 프로그램은 다양한 목적과 제약 그리고 주어진 위험수준하에서 수익을 최대화하는 최적배분을 결정하게 해주는데, 먼저 투자자들의 선호도가 $W_i(t)\,(i = 1, 2)$ 흐름의 함수와 말기$(t = T)$의 부로 나타내어진다고 가정

하자. 부의 과정, $W_i(t)$ $(i=1,2)$는 $[0, \infty]$내에서 값을 갖는 가측과정이며 다음 조건을 만족한다 : $\int_t^T W_i(s)\,dt < \infty$ $p.s.$ $(i=1,2)$. 여기서 부의 공간은 2승 적분가능한 양수의 확률변수공간, $L^{2+}(\Omega, \mathfrak{I}, \mathrm{P})$이다. 그리고 V를 R에서 값을 갖는 효용함수라고 하고 또한 연속적인 오목함수이며 증가함수라고 하자. 문제는 다음과 같은 효용함수의 기대치를 시간에 걸쳐 최대화하는 것이다.

$$E_t \int_t^T \mathrm{V}[\mathrm{s}, W_i(\mathrm{s})]\,ds, \mathrm{i} = 1, 2 \tag{2-5}$$

투자자들은 연속적으로 그들의 부를 두 시장의 금융자산에 배분한다고 하고, 우리는 두 분류의 투자자들의 행동을 각각 살펴볼 것이다.

3) 일반 증권투자자의 경우

먼저 두 시장에 투자하는 일반투자자 1의 행동이 어떤 조건하에서 영향을 받는지 분석해 보기로 한다. 그리고 이어서 두 시장간 균형조건을 형성하는 금융자산의 기대수익률수준을 살펴보기로 한다. 1로 표시되는 합리적인 일반투자자는 그의 부에서 발생하는 효용을 최대화하려고 한다. 그는 t시점에서 부 $W_1(t)$를 보유하고, 이를 끊임없이 금융자산에 배분하고 있으며 이 자산들은 확률적 수익을 발생시킨다고 하자. 두 시장에 걸쳐 투자자 1은 그가 가진 부의 p_1 부분을 증권 1(증권거래소)에, 그리고 p_1* 부분을 증권 2 (코스닥시장)에 투자한다고 하자($p_1 + p_1* = 1$). 예산제약식은 그가 보유한 자산의 수익과 부의 변화로 표현될 수 있는데, 투자자의 소득원천이 유일하게 자본이득에서만 발생한다고 가정하면 식 (2-2)을 이용하여 다음과 같이 부의 과정(예산제약식)을 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} W_1(t) = W_1(0) &+ \int_0^t p_1(\mathrm{s})\, W_1(\mathrm{s})\, dS_1(\mathrm{s}) / S_1(\mathrm{s}) \\ &+ \int_0^t p_1*(\mathrm{s})\, W_1(\mathrm{s})\, dS_2(\mathrm{s}) / S_2(\mathrm{s}) \end{aligned} \tag{2-6}$$

식 (2-6)을 미분하면 부는 다음과 같이 확률미분방정식에 따라 변화하게 된다.

$$\begin{aligned} dW_1 = p_1\, W_1\, \mu_1\, dt + p_1*\, W_1\, \mu_2\, dt + p_1\, W_1\, \sigma_1\, dz_1 \\ + p_1*\, W_1\, \sigma_2\, dz_2 \end{aligned} \tag{2-7}$$

투자자들의 관심은 그들의 효용을 최대화시키는 두 시장의 금융자산들의 최적수요량을 결정하는데 있다. 이를 위해 본 연구는 폰트리아긴(Pontriaguine)의 원리에 근거한 최적화 과정에서 헤밀톤-벨만(Hemilton-Bellman)방정식을 이용하여 다음과 같이 코스닥증권에 대한 최적수요을 나타내는 p_1*을 다음과 같이 구하였다(중간 과정들은 부록에 제시하였다).

$$p_1* = \frac{A_1(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} \tag{2-8}$$

위에서 $A_1 = \dfrac{-J_{W_1}}{J_{W_1 W_1} W_1}$ 이며 J는 W_1의 효용에 대한 $(t, W) \in [0, T] \times (0, \infty)$인 가치함수이다. 따라서 A_1는 일반투자자의 위험에 대한 회피도를 의미한다.

식 (2-8)에서 코스닥증권에 대한 일반투자자의 수요는 증권 2의 수익률과 증권 1의 수익률의 차익, 즉 증권거래소 보다 더 위험성(정보차원에서)이 있다고 가정되는 코스닥시장의 증권들에 투자하는데에 대한 보상적 의미인 위험프리미엄(물론, 무위험자산과 위험자산 간의 위험프리미엄과는 다르다) 에 대해 양함수임을 알 수 있는데, 이는 코스닥증권에 보다 많은 투자가 이루어지기 위해서는 그 보상적 성격으로서 위험프리미엄도 증가되어야 함을 나타낸다. 위 식은 또한 일반투자자의 코스닥증권수요와 증권 1과 증권 2의 공분산 사이에 음의 관계가 있음을 보여주는데 이는 증권거래소 증권의 가격변동과 코스닥증권의 가격변동의 유사성이 크면 클수록 위험분산효과가 적어지며 따라서 코스닥증권에의 투자의 유인요소가 감소함을 의미한다. 결국 이는 포트폴리오 전체위험에 대한 코스닥증권위험의 추가정도를 나타낸다고 볼 수 있다.

이어서 코스닥증권의 수익률의 함수관계를 살펴보기 위해 식 (2-8)를 수익률형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{1}{A_1}[\sigma_{12} + p_1*(\sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12})] \tag{2-9}$$

위의 관계식에서 우리는 코스닥증권의 수익률이 어떤 요소들에 의해 결정되는지를 확인할 수 있다. 즉, 위험프리미엄 결정 요인으로서 경쟁시장인 거래소증권의 수익률 μ_1과 공분산 σ_{12}, 그리고 분산과 공분산의 차 $\sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}$를 고려한 수요량 p_1*에 비례하여 결정됨을 확인할 수 있다.

4) 관련투자자의 경우

완전한 또는 부분적인 정보를 보유하고 있는 관련투자자의 경우에 증권투자를 통한 그의 부의 최적화 과정은 위의 과정과 동일하나, 일반투자자의 투자결정과정과 다른 점은 관련투자자는 해당주식(코스닥증권)의 가격움직임에 영향력을 미칠 수 있다는 점이다. 즉, 일반투자자의 경우, 그들의 투자정책이 해당주식의 가격(수익률)변화에 영향을 미치지 못하므로 $\frac{\partial \mu_2}{\partial p_1*}=0$ 이었으나, 반면에 관련투자자의 경우 $\frac{\partial \mu_2}{\partial p_2*} \neq 0$ 이라고 볼 수있다는 점이다.

이와 같은 상황에서 p_2*에 대한 도함수를 이용한 최적화 문제의 1차 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0 = J_{W_2}(\mu_2 - \mu_1) + J_{W_2} p_2* \mu_{2,p_2*} + J_{W_2W_2} p_2* W_2(\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + J_{W_2W_2} W_2 \sigma_{12} \qquad (2\text{-}10)$$

단, $\mu_{2,p_2*} = \frac{\partial \mu_2}{\partial p_2*}$.

관련투자자들이 존재할 경우에 코스닥증권의 수익률의 함수관계를 살펴보기 위해 식 (2-10)을 풀어서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{1}{A_2}[p_2*(\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + \sigma_{12}] + \mu_{2,p_2*} p_2* \qquad (2\text{-}11)$$

위에서 $A_2 = \frac{-J_{W_2}}{J_{W_2W_2} W_2}$ 이며 이는 관련투자자의 위험에 대한 회피도를 의미한다.

여기서 우리는 식 (2-9)과 식 (2-11)를 비교하면서 관련투자자들의 존재로 인한 수익률 결정에 있어서의 차이점을 확인할 수 있는데, 식 (2-9)와는 달리 위 식에는 추가요소인 $\mu_{2,p_2*} p_2*$이 존재한다는 점이다. 먼저 μ_{2,p_2*}은 관련투자자의 투자결정에 대한 코스닥증권의 수익률변화, 즉 수익률에 대한 관련투자자의 영향정도를 나타낸다. 이것에 그들의 수요량을 곱한 것, 즉 $\mu_{2,p_2*} p_2*$ 는 수요량에 비례한 구체적인 영향수준을 나타낸다.

Ⅲ. 증권거래소와 코스닥의 정보적 균형

다양한 비효율적 요인으로 두 증권시장간에 위험수준의 차이가 존재하는 경우, 이를 보상하기 위한 수익률의 차이가 투자자들에게 코스닥시장에 대한 투자유인 요소로서의 역할을 하고 있지만, 두 시장간에 비효율적 요소는, 이를 이용하려는 투자자들의 노력(차익거래)에 따라 감소하면서 위험수준의 차이도 감소하고 따라서 투자자들을 끌어모았던 높은 기대수익률도 점차 균등해질 것이며, 코스닥시장의 유인요소로서의 효과가 감소될 것이다. 그러나 단순히 위험프리미엄으로 인식되는 두 시장간 수익률의 차가 보다 복잡한 요소로 구성되어 있는 경우, 두 시장간 수익률의 균등화 과정은 단순한 위험프리미엄의 감소 이상으로 보다 더 복잡해지는데, 특히 정보요인이 개입될 경우가 그러하다. 즉 정보비대칭요소가 존재하는 경우 투자자의 투자결정 과정에는 이 정보비대칭 요소를 추정하는 과정도 포함되어야 하며 이 또한 상당한 비용을 필요로 한다는 점이다. 이를 위해 우리는 정보비대칭 요소, 정보비용 그리고 시장간 정보적 균형조건을 살펴보고 이를 고려한 두 시장간 최적포트폴리오를 일반투자자 입장에서 구성하는데 필요한 주요 조건들이 제시할 것이다.

1. 정보비대칭 요소의 고려

포트폴리오의 최적성에 대한 정보의 영향력은 해당 금융자산의 가격변동과 수익률의 상관관계에 미치는 영향에 따라 결정된다. 그런데 정보가 불충분하게 유포되는 코스닥시장에 있어서 투자활동은 정보비대칭현상에 의해 제한되고 내부자거래와 같은 비정상적 요인에 의해 상당한 투기위험에 노출되어있다. 더구나 시장규모가 적정수준에 이르지 못한 경우, 즉 소수의 증권가격들이 전체 시장의 움직임을 유도하는 경우에 정보의 역할은 더욱 더 크게 느껴질 것이다. 저발전된 증권시장의 주요 특징 중 하나인 정보비대칭성의 거의 시스템적인 영향력은 증권시장에서 형성되는 가격의 효율성을 심각하게 저해하고 또한 위험감소(높은 수익률만이 보상할 수 있는 것)와 같은 분산효과의 이점을 감소시킨다. 따라서 일반투자자가 코스닥시장정보의 영향정도를 정확하게 예측할 수 없다는 점은 해당 금융자산들의 수익률수준에 심각하게 왜곡된 격차를 발생시킬 수 있다.

다수의 증권시장에서의 투자자들의 행동을 분석하기 위한 포트폴리오 균형의 모형화에 관해 많은 연구들이 발표되었으나 그와 같은 모형들은 대부분 동일한 발전수준의, 즉 동일한 조건을 갖고 동일한 규모를 가진 시장간의 투자에 관한 것들이며 이질적 조건과 규모를 가진 시장간의 균형에 관한 연구는 희박한 것이 사실이다. 또한 한국에서의 코스

닥시장 개장이후 그 기능에 있어서의 새로운 환경에서의 투자구조는 일반투자자들의 행동에 상당한 영향을 미치고 있으며, 그와 같은 영향을 고려해볼 때, 코스닥시장 증권들을 포함하는 두 시장간 포트폴리오의 최적 전략에 관한 분석이 필요하다. 따라서 여기서 우리는 불완전 정보하에서 두 시장간 포트폴리오 정책에 있어서 정보비대칭 요소의 추정문제를 다루고 이를 이용한 효율적 투자모형을 제시하려고 한다.

1) 코스닥 시장의 정보구조

여기서는 위에서 언급한 사항들을 공식화하여 정보비대칭 상황하에서 시장간 포트폴리오 전략을 모형화할 것이다. 정보비대칭이란 본 연구에서는 관련투자자들이 일반투자자들에 비해 정보상의 우위를 지니고 있는 상황을 의미한다. 본 연구는 일반투자자의 입장에서, 즉 코스닥시장의 증권가격에 대해 영향을 미치는 정보비대칭 요소들을 직접 관찰할 수 없는 투자자들의 입장에서 최적포트폴리오 모형을 살펴볼 것이다.

정보비대칭적 상황을 보다 분명히 나타내고 정보비대칭 요소의 영향정도를 고려하기 위하여 몇 가지 가정들이 필요한데, 물론 본 연구의 모형이 현실을 완벽하게 묘사하고 있다고 볼 수는 없지만 다만 본 연구의 의의는 비교적 인정할만한 모형에 이르게 해주는 몇 가지 주요한 특징들을 유추하는데 있다.

[기본 가정] 우리는 위에서 코스닥시장의 증권가격을 생산수준의 함수, $S_2 = S_2(Y_2)$로, 즉, S_2의 움직임에 영향을 미치는 요소로 내재적 가치를 나타내는 생산량 Y(펀더멘탈 요소로 인식)만을 고려했었다. 그런데 코스닥시장의 증권가격 변동에 대해 부분적으로 영향을 줄 수 있는 관련투자자들이 보유한 주요정보를 공유하지 못하는 일반 투자자들에게 정보비대칭 요소는 가격분석에 고려해야 할 또 다른 변수가 된다. 따라서 증권가격 결정에 있어서 정보비대칭 변수를 도입할 필요가 있으며 이 변수를 $\triangle$로 표시하면, 다음과 같이 $S_2 = S_2(Y_2, \triangle)$로 나타낼 수 있다. 이 요소는 관련투자자들과는 달리 일반투자자들에게는 확률변수로서 인식된다.

이와 같이 두 변수(생산량과 정보비대칭변수)를 고려해 볼때, 증권 2의 가격 S_2는 이토정리를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$dS_2 = S_2 \mu_2 dt + S_2 \sigma_2 dz_2 \tag{3-1}$$

위에서

$$\mu_2 = Y_2 S_2'(Y_2)\ \mu_{Y2} + \triangle\ S_2'(\triangle) + \frac{1}{2}\ (Y_2{}^2 S_2''(Y_2)\sigma_{Y2}{}^2$$
$$+ S_2''(\triangle)\ \sigma_\triangle{}^2)$$
$$\sigma_2\, dz_2 = Y_2\ S_2'(Y_2)'\ \sigma_{Y2}\ dz_{Y2} + \sigma_\triangle\ d\Phi$$

위 식에서 Φ의 존재는 증권 2의 가격이 펀더멘탈요소에 의해서만 유일하게 결정되는 것만은 아니라는 것과 관련투자자들에게조차 항상 불확실한 요소가 존재한다는 것을 보여준다. 위 식에서 μ_2는 다시 다음과 같이 두 부분으로 구분할 수 있는데,

$$\mu_2 = \mu_a + \xi$$
$$\mu_a = Y_2 S_2'(Y_2)\ \mu_{Y2} + \frac{1}{2}\ Y_2{}^2\ S_2'''(Y_2)\ \sigma_{Y2}{}^2$$
$$\xi = \triangle\ S_2'(\triangle) + \frac{1}{2}\ S_2''(\triangle)\ \sigma_\triangle{}^2 \qquad (3\text{-}2)$$

여기서 ξ가 바로 정보비대칭요소이며, 따라서 S_2의 움직임은 관련투자자들에게 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$dS_2 = S_2(\mu_a + \xi)dt + S_2\ \sigma_2\ dz_2 \qquad (3\text{-}3)$$

이미 언급했듯이 관련투자자들은 ξ를 직접 관찰하거나 그 수준에 영향을 미치기 때문에 정보상의 우위를 지니고 있으나 반면에 일반투자자들은 ξ를 관찰하지 못하므로 이는 확률변수로서 인식된다. 만일 투자자들이 ξ를 알고있다면 이를 바탕으로 각 증권들에 대해 보다 정확한 기대수익률을 산정할 수 있게 되고 따라서 이를 이용하여 적정한 포트폴리오를 구성할 수 있을 것이다. 그러나 일반투자자들은 ξ를 관찰할 수 없으므로 자신들의 포트폴리오 수익률을 최적화하기 위해서 ξ를 추정해야 할 필요가 있다.

2) 정보비대칭 요소의 추정

정보상의 혜택을 누리지못하는 일반투자자들에게 있어서 코스닥 증권가격 결정에 관련된미확인 요소의 추정 및 그 추정치의 정확도는 중요한 투자결정 요인이 된다. 따라서 투자자들은 정보비대칭요소 ξ를 정보수집을 통해 추정하고, 이 추정치에 기반을 둔 최적 포트폴리오 전략을 구성해야 하는데, 이를 위해 본 연구는 조건부기대치를 이용한 단순

한 방법과 최적 우도함수를 이용한 방법으로 추정하고자 한다.

먼저, 일반 투자자가 ξ의 실제수치를 직접 관찰할 수 없다고 하고 ξ 대신 $\xi*$를 관찰한다고 가정하자. 그리고 일반투자자들에게 있어서 $\xi*$는 확률변수로서 인식되며 ξ의 분포는 정규분포를 이루고 평균 ξ_o와 분산 ζ_o^2를 갖는다고 하자. 따라서 일반투자자는 코스닥증권에 영향을 주는 "신호"로서 $\xi*$를 관측하게 되며 ξ에 관한 정보를 "소음 섞인 신호"인 $\xi+\varepsilon$의 형태로 얻게 된다. 여기서 ε는 평균이 0이고 분산이 ζ^2인 백색잡음(*white noise*)이다. 즉,

$$\xi * = \xi + \varepsilon,\ \ \xi \sim N(\xi_o,\ \zeta_o^2),\ \ \varepsilon \sim N(0, \zeta^2) \tag{3-4}$$

그리고 $Cov(\xi, \varepsilon) = 0$.

이와 같은 신호에서 일반투자자는 그것의 추정치를 결정하게 되는데, 그 추정치는 ξ에 대한 정보에 바탕을 둔 $\xi*$의 조건부 기대치로 나타낼 수 있으며 이는 조건부 확률계산에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(\xi \mid \xi*) &= \xi_o + \frac{Var(\xi)}{Var(\xi*)}[\xi* - E(\xi*)] \\ &= \xi_o + \frac{\zeta_o^2}{\zeta_o^2 + \zeta^2}(\xi* - \xi_o) \end{aligned} \tag{3-5}$$

이것이 일반투자자의 ξ에 대한 추정치이며, 일반투자자는 이 추정치를 고려하여 코스닥증권에 대한 최적수요량을 결정하게 된다. 따라서 코스닥증권 수익률을 $\mu_2 = \mu_a + E(\xi \mid \xi*)$ 와 같이 나타낼 수 있으므로 이를 앞에서 본 식 (2-8)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 최적수요량을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_1* &= \frac{A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} + \frac{A_1 E(\xi \mid \xi*)}{\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \\ &= \frac{A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} + \frac{A_1\ \xi_o}{\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \\ &\quad + \frac{\zeta_o^2}{\zeta_o^2 + \zeta^2}\ \frac{A_1(\xi* - \xi_o)}{\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \end{aligned} \tag{3-6}$$

위의 식은 수요량 결정요인으로서 정보비대칭 요소가 존재하지 않을 때의 초과수익률

(위험프리미엄) $\mu_a - \mu_1$과 거래소증권과의 공분산 뿐만 아니라 정보비대칭 요소의 추정치, 그 분산비율 및 기대오차도 고려해야함을 보여준다.

ξ에 대한 또 다른 추정방법으로 최적 우도함수에 의한 추정량을 구할 수 있다. 이를 위해 우리는 로그변형을 이용, 등가확률측도에 관련된 확률과정차원에서 ξ를 추정하려고 한다. 앞에서와 마찬가지로 마코프과정의 특성들을 이용하여 포트폴리오 투자전략의 모형을 구성할 수 있는데, 이미 제시한 금융자산의 가격에 대한 정의들(즉 금융자산이 정보비대칭요소와 함께 확률과정을 따른다는 브라운가정)에 따라 확산과정인 [$W_1(t)$, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $E(\xi)$] 시스템을 고려해보자.

먼저 다음을 가정하고

$$P_\xi\left[\int_0^T(\mu_1(s)+\mu_a(s)+\xi(s))^2 dt<\infty\right]=1$$

$$P_\xi\left[\int_0^T \Omega(s)^2\,dt<\infty\right]=1 \tag{3-7}$$

최적 추정량을 구하기 전에 확률측도의 등가성 개념(Dana and Jeanblanc, 1994. Duffie, 1992)을 살펴보자.

[정 의] : 확률변환

(1) (Ω, $\mathfrak{I}$) 상에 정의된 두 확률측도 P와 Q는 다음과 같은 조건이 만족될 경우에 "등가"라고 한다.

$$P(A)=0 \Leftrightarrow Q(A)=0(P(A)>0 \Leftrightarrow Q(A)>0)$$

(2) 이 경우, 양수인 가측 확률변수 q가 존재하며 이 때 $Q(A)=E_P(1_A q)$이 된다. 이를 *라돈-니코딤(Radon-Nikodym)*밀도라고 부르며 $q=\dfrac{dQ}{dP}$라고 쓴다. 그리고 P 하에서의 조건부 기대치에 대한 Q하에서의 변수 X의 조건부 기대치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_Q(X \mid Y)=\frac{E_P(Xq \mid Y)}{E_P(q \mid Y)}$$

(3) 만일 확률변수 X가 Q에 대해 마팅게일 일때, 그리고 *라돈-니코딤*도함수 $\dfrac{dQ}{dP}$의

분산이 한정되어 있을 때, 등가확률 Q는 확률변수 X에 대해 등가인 마팅게일측도라 한다.

이와 같은 조건하에서 우리는 ξ의 추정치를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

[정리 1] 정보비대칭 요소의 최적 우도함수에 의한 기대추정량 ξ^M은 다음의 방정식을 충족한다([정리 1]의 증명은 부록에 제시하였다).

$$\xi^M = \frac{\int_0^T \frac{p_1}{W_1} d\, W_1}{\int_0^T p_1{*}^2 \, dt} - \frac{\int_0^T (p_1{*}\ p_1\ \mu_1 + p_1{*}^2\ \mu_a)\, dt}{\int_0^T p_1{*}^2 \, dt} \qquad (3\text{-}8)$$

식 (3-8)는 일반투자자가 0 시점에서 T 시점까지의 투자결과, 즉 투자정책(p_1, p_1)에 따른 결과로서의 그의 부와 수익률의 변화를 정보로서 이용하여 정보비대칭요소 ξ를 최적우도함수에 의해 추정한 것을 나타낸다. 보다 구체적으로 위의 식은 수익률변화가 확률적으로 마팅게일이라는 가정하에서, 정보비대칭 추정치가 부에 대한 투자비율(확정적 부분)에서 두 증권시장의 투자수익(불확정적 부분)을 차감한 형태임을 나타내고 있다.

이처럼 정보비대칭상황 하에서 관련투자자들이 지니고 있는 정보상의 우위로 그들은 정보비대칭 요소를 부분적으로 확정적 과정으로 인식할 수 있는 반면 그와 같은 정보상의 우위가 없는 일반투자자들은 확률적 과정으로 인식하게 된다. 따라서 일반투자자들은 정보비대칭 요소를 추정할 수 있는 정보를 획득해야 하는데, 이는 일반적으로 상당한 비용을 지불해야 한다. 이와 같은 상황하에서, 일반 투자자들이 코스닥 증권에의 투자결정을 하면서 정보비대칭요소에 대한 정보비용을 고려하는 조건들을 살펴볼 필요가 있다.

2. 정보비대칭 하에서 정보비용조건

일반투자자는 정보비대칭 요소를 추정하기 위해 정보를 구하게 되는데, 문제는 정보획득에 있어서 비용이 요구된다는 점이다. 따라서 정보비대칭요소의 추정과정은 수반되는 정보비용의 수준도 동시에 고려하면서 결정되어야 하며 또한 정보비용의 적정수준에 대한 조건이 필요하다.

적정수준의 정보비용은 두 가지 측면에서 살펴볼 수 있는데, 먼저 정보비용지출로 인해 어느 정도의 투자수익률 상승효과가 있는 가이며, 두 번째는 정보비용 지출은 코스닥시장의 증권에 해당되므로 거래소증권에 대한 코스닥증권의 초과수익률 보다 정보지출

비용이 커서는 안된다는 점이다.

먼저 첫 번째 기준에서 적정한 정보비용조건을 살펴보기로 하자. 이를 위해 몇 가지 가정이 필요한데, k로 표시되는 (한계)정보비용이 일정하다고 가정하고 대표적인 일반투자자가 코스닥시장증권의 수익률에 대하여 사전적 믿음을 가지고 있다고 하자. 그는 가격이 주는 신호를 관찰하며 그것으로부터 그의 예측치를 조정하여 코스닥증권의 수요량을 결정하게 되는데, 이 최적 수요량에 의해 결과로 나타나는 포트폴리오 총(순간)수익은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$R = p_1 \ W_1 \mu_1 + p_1 * W_1 \mu_2 \tag{3-9}$$

식 (3-9)에 p_1를 $1 - p_1*$로 대체하고 위에서 구한 최적 수요수준을 p_1*에 대입하면 다음과 같다.

$$R = W_1 \mu_1 + W_1 (\mu_a + E(\xi) - \mu_1) \frac{A_1 (\mu_a + E(\xi) - \mu_1) - \sigma_{12}}{{\sigma_2}^2 - 2\sigma_{12}} \tag{3-10}$$

여기서 정보비용 k가 ξ의 추정치의 정확도(ζ^2)에 비례한다고 가정하자. 즉, 정보비용을 많이 지출할수록 ξ의 추정치의 정확도는 커지게 되며 따라서 ζ^2는 감소하게 된다. 이와 같은 경우, 정보비용의 적정수준에 대한 조건은 다음과 같은 공리에서처럼 결정될 수 있다.

[정리 2] 만일 일반투자자가 ξ의 조건부기대치 $E(\xi \mid \xi*)$를 구하고 그가 받는 신호의 분산 ζ^2를 줄이기 위해 정보를 획득하려는 경우, 그는 그 정보비용 k를 다음과 같은 조건하에서 부담할 것이다 :

$$k \le \frac{A_1 W_1}{{\sigma_2}^2 - 2\sigma_{12}} \{ 2 (\mu_a - \mu_1 + \xi_o) - \sigma_{12} + \frac{{\zeta_o}^2 (\xi* - \xi_o)}{{\zeta_o}^2 + \zeta^2} + \frac{{\zeta_o}^2 (\xi* - \xi_o)}{{\zeta_o}^2 + \zeta^2} \} \frac{- {\zeta_o}^2 (\xi* - \xi_o)}{(\zeta^2 + {\zeta_o}^2)^2} \tag{3-11}$$

[증 명] 총수익을 나타내는 식 (3-10)에서 관찰에 의한 정보를 바탕으로 추정한 $E(\xi)$, 즉 $E(\xi \mid \xi*)$를 대입하면 총수익은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(R \mid \xi*) = W_1 [\mu_1 + (\mu_a - \mu_1) \frac{A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}]$$

$$+ W_1 E(\xi \mid \xi*) \frac{2A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}$$

$$+ W_1 E(\xi \mid \xi*)^2 \frac{A_1}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}} \qquad (3\text{-}12)$$

그런데 앞에서 보았듯이 $E(\xi \mid \xi*) = \xi_o + \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2}$ 이므로 식 (3-12)는 다음과 같이 된다.

$$E(R \mid \xi*) = W_1 [\mu_1 + (\mu_a - \mu_1) \frac{A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}]$$

$$+ W_1 [\xi_o + \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2}] \frac{2A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}$$

$$+ W_1 [\xi_o + \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2}]^2 \frac{A_1}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}} \qquad (3\text{-}13)$$

그리고 이를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$E(R \mid \xi*) = \Psi_1 + \Psi_2 \qquad (3\text{-}14)$$

여기서

$$\Psi_1 = W_1 [\mu_1 + (\mu_a - \mu_1) \frac{A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}]$$

$$+ W_1 \xi_o \frac{2A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}} + \frac{W_1 \xi_o^{\ 2} A_1}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}$$

$$\Psi_2 = \Psi_2(\zeta^2)$$

$$= W_1 \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2} \frac{2A_1(\mu_a - \mu_1) - \sigma_{12}}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}}$$

$$+ \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2} \frac{A_1 W_1}{\sigma_2^{\ 2} - 2\sigma_{12}} [2\xi_o + \frac{\zeta_o^{\ 2}(\xi* - \xi_o)}{\zeta_o^{\ 2} + \zeta^2}]$$

즉, 총 수익은 두 부분 Ψ_1와 Ψ_2로 나눌수 있으며, Ψ_1는 $\zeta^2 \to \infty$일 때의 수익을 의미하며 이는 바로 일반투자자들이 정보비대칭요소에 관해 어떤 정보도 얻지 못하는 상태를 의미한다. 즉 정보비대칭요소가 두 시장간 투자수익에 미치는 기대영향정도를 나타낸다. 따라서 Ψ_2는 정보의 가치를 나타낸다. 그런데 코스닥시장에 존재하는 정보의 비대칭적 상황때문에 투자자들이 포트폴리오를 구성하는데 있어서 정보비용을 고려해야 하며, 이는 결국 한계정보비용에 대한 한계수익을 고려해야 함을 의미한다. 따라서 ζ^2의 변화에 대한 수익 Ψ_2의 변화가 정보보유가 수익에 미치는 효과로 해석될 수가 있다. 즉, ζ^2에 대한 Ψ_2의 도함수를 구해야 할 필요가 있는데, 이는 적정한 정보획득 비용, k의 수준을 결정하는 조건이 된다. 따라서 한계수익보다 크지않는 범위에서 투자자는 정보비용을 지출하려고 할 것이다. 즉

$$k \leq \frac{\partial \Psi_2(\zeta^2)}{\partial \zeta^2} \tag{3-15}$$

이는 결국 식 (3-11)을 의미한다. <증명 끝>

이어서 두 번째 기준으로, 정보수집에 있어서 그 비용이 거래소증권에 대한 코스닥증권의 초과수익률을 고려하여 결정되어야 한다는 점을 살펴보자. 이는 정보비용에 한계치를 정하게 해준다. 정보비대칭요소 ξ가 코스닥증권의 수익에 영향을 주므로 일반투자자는 ξ의 변화를 추정할 필요가 있고 추정에 필요한 정보를 수집하기 위해서는 정보비용을 고려해야 한다. 초과수익률에 대해 정보비용을 고려한 투자자의 행동을 분석하는 방법은 초과수익률과 정보비용 간의 차이를 고려하면서 투자기준으로 확률변수 ξ의 추정오차를 고려하는 것이다. 이를 위해 일반투자자는 수집된 정보를 바탕으로 초과수익률을 추정할 것이며, 추정과정에서 이용된 확률치들을 이용하여 초과수익률의 추정치가 정보비용보다 클 확률을 구할 수 있는데, 일반투자자는 그 확률이 일정수준 $f(\xi)$(이는 투자자의 위험에 대한 태도에 따라 결정된다)보다 큰 경우에 기꺼이 정보비용을 지불할 것이다. 즉 보다 구체적으로 다음과 같은 조건하에서 일반투자자는 코스닥증권에 투자할 것이다.

$$P(\mu_a + \xi - \mu_1 \geq k) \geq f(\xi) \tag{3-16}$$

그런데 일반투자자는 $\xi*$를 통하여 ξ를 추정하게되며 따라서 $E(\mu_a + \xi - \mu_1 \mid \xi*)$

$= \mu_a + E(\xi \mid \xi*) - \mu_1$ 이므로 이를 위의 부등식의 양변에서 차감하면, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P[\xi - E(\xi \mid \xi*) \geq k - \mu_a - E(\xi \mid \xi*) + \mu_1] \geq f(\xi) \qquad (3\text{-}17)$$

위 식은 추정오차 $\xi - E(\xi \mid \xi*)$에 대한 확률관계를 나타내는데, 여기서 $f(\xi)$의 분포함수를 이용하면, 다음의 식을 구할 수 있다.

$$F(k - \mu_a - E(\xi \mid \xi*) + \mu_1) \leq 1 - f(\xi) \qquad (3\text{-}18)$$

여기서 k를 구하기 위해 위 식의 역함수를 구하면 다음과 같이 정보비용의 적정수준에 대한 조건을 구할 수 있다.

$$k \leq \mu_a + E(\xi \mid \xi*) - \mu_1 + F^{-1}[1 - f(\xi)] \qquad (3\text{-}19)$$

부등관계 (3-19)는 정보비용이 두 요소, 즉 초과수익률 $\mu_a + E(\xi \mid \xi*) - \mu_1$ (위험프리미엄)과, 정보비용과 초과수익률의 차가 양수가 될 확률의 역함수인 $F^{-1}[1 - f(\xi)]$의 합과 같거나 또는 작아야 한다는 것을 의미한다.

따라서, 두 부등식 (3-15)(정보비용지출은 수집된 정보를 이용한 투자수익률 상승분보다 커서는 안된다)과 식 (3-19)(정보비용지출은 거래소증권에 대한 코스닥증권의 초과수익률보다 커서는 안된다)는 일반투자자들이 정보비대칭적이라고 가정되는 코스닥증권에 투자결정을 하게되는 조건들이 된다.

Ⅳ. 결 론

서로 통합되고 효율적인 자본시장들간에 동일한 특성(수익률 및 위험)을 가진 금융자산들의 가격은 거래비용이 존재하지 않는다는 가정하에서 동일하며 증권들 간에 완벽한 대체성이 존재하게 된다. 그러나 통합정도가 떨어지고 비효율적인, 즉 서로 비대칭적인 시장들에서는 그 시장에 독특한 위험프리미엄이 존재하게 되며 이는 시장간의 균형상태에 일종의 왜곡현상을 발생시키게 된다. 본 연구는 이론적인 면에서, 비대칭적인 것으로 가정되는 두 자본시장, 즉 코스닥시장과 증권거래소에서의 최적포트폴리오 정책을 살펴보았고, 두 시장간의 비대칭성이 주는 의미와 그것이 최적 투자정책에 미치는 영향의 정도를 분석하였고, 비대칭적인 두 시장에서의 균형조건을 살펴보았다.

먼저 본 연구는 고전적 의미에서 최적포트폴리오 정책을 살펴보았으며, 자산가격 움직임에 있어서 차익거래의 영향을 분석하였으며 이에 대한 비대칭적인 두 시장간의 포트폴리오 정책과의 관계도 분석해 보았다. 이어서 정보비대칭 상황을 발생시키는 다양한 요소들을 살펴보았으며 이와 같은 정보비대칭 요소가 기대수익 수준에 미치는 영향을 분석하기 위해 확률과정의 최적화 방법을 이용하여 추정하였다. 따라서 관련정보를 보유하지 못한 일반투자자들의 경우, 이 추정치를 이용하여 새로운 포트폴리오를 구성하게 될 것이며 이 또한 불편추정치로서 최적포트폴리오로서의 역할을 하고 있는 것으로 해석되었다.

그런데 이처럼 코스닥시장과 같이 역사가 짧고 저발전된 자본시장에 있어서 일반투자자들의 주관심사는 비대칭적인 정보를 확보하는 것이며 이는 비대칭요소 추정치의 정확도를 높이게 된다. 그러나 정보확보에 따른 정확도의 향상에 비례해서 정보비용도 증가하게 되며 이 또한 구성된 최적포트폴리오의 수익성에 영향을 미치게 된다. 따라서 정보비용수준을 포트폴리오수익성을 고려하여 결정되어야 할 필요가 있으며, 따라서 본 연구는 어떤 조건하에서 정보비용을 감안한 코스닥시장에의 투자결정이 이루어질 수 있는지 분석하고 그 기준을 확률적 방법을 이용하여 제시하였다.

참 고 문 헌

Dana, D. and M. Jeanblanc, *Financial Markets*, Economica, 1994.

Darrell Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton Univ. Press, 1992.

Markowitz, H. M., "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, December 1952.

Merton, R. C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : the Continuous Time Case," *Review of Economics and Statistics*, Vol.51, 1969.

__________, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model," *Journal of economic theory*, No.3, (1971), 373-413.

__________, "An intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, 41, (1973), 867-888.

Mossin, I., "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, Vol.34, (1966), 768-783

Ross, S., "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, Vol.13, (1976), 341-360.

Sharpe, W. "Capital Asset Prices," *Journal of Finance*, Vol.19, No.3, (1964), 425-442.

<부 록>

1. 최적 수요량 결정

먼저, $(t, W) \in [0, T] \times (0, \infty)$인 가치함수 J는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J[W_1(\mathrm{t}), \mathrm{t}] = Max\ E_t \int_t^T V[W_1(\mathrm{s}), \mathrm{s}]\, ds$$

$$= Max\ E_t \{ \int_t^{t+h} V[W_1(\mathrm{s}), \mathrm{s}]\, ds + J(W_1(t+h), t+h)\} \tag{1}$$

이는 부에서 발생하는 효용의 최대치로 볼 수 있다. 그런데 $[t.t+h]$ 구간에 속하는 $t*$가 존재한다고 볼 수 있으므로 $\int_t^{t+h} V[W_1(s), s]\, ds = V[W_1(t*), t*]h$으로 표현될 수 있다. 이를 다시 h로 나눈 후 극한치를 취하면 다음과 같이 된다.

$$0 = Max \lim_{h \to 0} E_t (1/h) [V(W_1(t*), t*)h + J(W_1(t+h), t+h) - J(W_1(t), t)] \tag{2}$$

위 식에 2계도 테일러공식을 다음과 같이 적용할 수 있다(높은 계도는 무시).

$$\begin{aligned} J(W_1(t+h), t+h) - J(W_1(t), t) = {} & J_t h + J_{W_1} [W_1(t+h) - W_1(t)] \\ & + \frac{1}{2} \{ J_{tt} h^2 + J_{W_1 W_1} [W_1(t+h) - W_1(t)]^2 \} \\ & + J_{W_1 t} [W_1(t+h) - W_1(t)] h \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 J_t와 J_{W_1}는 t와 W_1에 대한 J의 도함수이며 $J_{W_1 t}$는 W_1와 t에 대한 도함수이다.

최적치의 존재조건인 2차 조건은 $J_{W_1 t}$의 음부호인데 이는 J의 오목성에 의한 것이다. 이어서 h로 나눈 후 기대치를 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & E_t [J(W_1(t+h), t+h) - J(W_1(t), t)]/h = J_t + J_{W_1} [W_1(t+h) - W_1(t)]/h + \\ & + \frac{1}{2} \{ J_{tt} h + J_{W_1 W_1} [W_1(t+h) - W_1(t)]^2 / h \} + J_{W_1 t} [W_1(t+h) - W_1(t)] \end{aligned} \tag{4}$$

h가 0으로 접근하면서 위식의 우항들의 극한치들이 h를 dt로 바꾸면서 구해질 수

있으며, $\lim_{h \to 0} E_t V(W_1(t*), t*)$는 $V(W_1(t), t)$가 된다. $t*$가 t로 접근하면서 $V(W_1(t*), t*)$는 $V(W_1(t), t)$로 접근하고 $E_t V(W_1(t), t)$는 $V(W_1(t), t)$가 된다. p_1를 $1 - p_1*$로 대체하면서 식 (3)은 다음과 같이 된다.

$$0 = Max\{V(dW_1 / W_1, t) + J_t h + J_{W_1} W_1 [\mu_1 + p_1*(\mu_2 - \mu_1)] + \frac{1}{2} J_{W_1 W_1} W_1^2 [p_1*^2 \sigma_2^2 + p_1^2 \sigma_1^2 + 2 p_1* \sigma_{12} - 2 p_1*^2 \sigma_{12}] \tag{5}$$

여기서 $\sigma_{12} = Cov(dS_1 / S_1, dS_2 / S_2)$.

이와 같은 최적화 문제의 1차 조건을 식 (5)에서 p_1*에 대한 도함수를 제거하면서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0 = J_{W_1}(\mu_2 - \mu_1) + J_{W_1 W_1} p_1* W_1(\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + J_{W_1 W_1} W_1 \sigma_{12} \tag{6}$$

위의 식을 p_1*와 μ_2에 대해서 정리하면 본문에서의 관계식을 구할 수 있다.

2. [정리 1]의 증명

먼저 두 측도 m_W^{ξ}와 m_{z*}가 $W_1(t)$와 $z*(t)$에 대한 확률측도라고 하자. 즉,

$$m_W^{\xi}(C) = P_{\xi}\{\omega : W_1 \in C\}, \quad m_{z*}(C) = P_{\xi}\{\omega : z* \in C\} \tag{7}$$

여기서 C는 가측 연속함수공간이다.

두 측도 m_W^{ξ}와 m_{z*}가 등가이므로 우리는 $E(\xi)$와 함께 *라돈-니코딤* 도함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dm_{W_1}^{\xi}}{dm_{z*}} = \exp\left[\int_0^T \left(\frac{W_1}{\Omega^2}\right)(x_1\mu_1 + x_2\mu_a + x_2\xi)\, dW_1 - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{W_1^2}{\Omega^2}\right)(x_1\mu_1 + x_2\mu_a + x_2\xi)^2 dt\right] \tag{8}$$

식 (8)에 로그변환을 취하고 최적화 원리를 적용하면 최적 우도함수에 의한 기대추정량, ξ^M을 구할 수 있다. 즉, 먼저 다음과 같이 1계도 조건을 취하고

$$0 = \int_0^T p_1{*}\, dW_1 - \int_0^T W_1 \left(p_1{*}\, p_1\, \mu_1 + p_1{*}^2\, \mu_a \right) dt$$
$$- \xi \int_0^T W_1\, p_1{*}^2\, dt \tag{9}$$

위 식으로부터 다음과 같은 최적 추정치 ξ^M를 구할 수 있다.

$$\xi^M = \frac{\int_0^T \frac{p_1}{W_1}\, dW_1}{\int_0^T p_1{*}^2\, dt} - \frac{\int_0^T (p_1{*}\, p_1\, \mu_1 + p_1{*}^2\, \mu_a)\, dt}{\int_0^T p_1{*}^2\, dt} \tag{10}$$