

## 다중분해능 웨이브렛에 의한 지하공동모형의 전기비저항 역산

서백수<sup>1)</sup> · 이재영<sup>1)</sup> · 김용인<sup>1)</sup> · 이창환<sup>2)</sup>

### Resistivity Inversion of Underground Cavity Model Using a Multi-Resolution Wavelet

Baek-Soo Suh<sup>1)</sup>, Jae-Young Lee<sup>1)</sup>, Yong-In Kim<sup>1)</sup> and Chang-Hwan Lee<sup>2)</sup>

**요 약 :** 본 논문에서는 유한 요소법과 민감도를 이용한 역산 알고리즘을 결합하여 물리 탐사에서 많이 사용되는 시추 공-시추공 모형의 2차원 푸리에 정식화에 따른 역산문제에 적용하였다. 역산기법의 효율향상을 위해 웨이브렛의 다중 분해능 특성을 응용한 기법을 적용하였고 타당성은 수치해석을 통한 데이터를 이용하여 검증하였다. 이론모형으로는 석회암 지하공동을 존재한다고 설정하여 이론모형 지하공동모형에 16개의 전류 및 전위 전극을 사용하여 계산을 행하였다. 본 연구에 의해서 지하공동과 같은 작은 영역의 불연속 매질일 경우, 이 역산법이 정확하고 적용이 용이한 해석법임을 알 수 있었다.

**주요어 :** 유한요소법, 민감도, 웨이브렛, 다중 분해능, 지하공동

**Abstract :** The finite element method combined with the sensitivity method is adopted for 2-dimensional Fourier transform inversion. To improve the efficiency of inversion calculation, multi-resolution wavelet method is proposed. Theoretical data which is obtained from above method is shown to examine the proposed method. Theoretical model assumes that underground cavity is located in limestone area. In theoretical model, 16 current and potential electrodes are located to get theoretical data. It is shown that the about inversion method is very exact and useful calculation method, in case the target model is very small such as under ground cavity.

**Keywords :** finite element method, sensitivity method, wavelet, multi-resolution, underground cavity

## 서 론

지하공동의 존재는 대형구조물의 건설 현장에서 매우 심각한 문제로 대두된다. 특히, 석회석 지역에서는 대형 지하 공동이 물로 채워져 있을 가능성이 많기 때문에 큰 재앙을 초래할 가능성도 있다. 최근에는 지하 비축시설, 원자력 발전소와 같은 지하 구조물이나 핵폐기물, 유류 지하저장소와 같은 대단위 지하 공사에는 유류 지하저장소와 같은 대단위 지하 공사에는 재해 방지를 위한 지하에서의 지하수 거동상태의 연구가 매우 필요하며 관리도 요구된다. 지하공동 탐사법으로는 주로 전기 탐사와 탄성과 탐사를 이용해 왔다. 본 연구에서는 전기 탐사를 이용하고, 석회암 지역에 지하 공동 모델을 기반으로 수치 해석 결과를 제시하였다. 지하공동모형은 전도도 등의 물성분포가 모암에 비해서 한정된 영역에 작게 나타나므로 이런 모형계산에서 능률적인 계산법이 요구된다. 대부분의 영역에서는 낮은 분해능을 사용하고 공동모형부분에는 고분해능을 사용하는 다중분해능 해석방법을 사용하였다. 효율적인 역산결

과를 얻기 위하여 웨이브렛의 다중분해능 특성을 응용한 영역 변수 분리를 이용하였다(Adler, and Guardo, 1996; Enokizono, Kato, and Tsuchida, 1996). 또한, 여기에 일반적인 역산 기법인 평활화 방법을 적용하였다(Beylkin, 1991; Pierri, R. 1998; Ratnajae van, 1991)

## 유한 요소 정식화

본 연구에서 Forward modelling은 유한요소법으로 계산하였으며 많은 모형에서 검증하였다.

전기 전도도를 물질상수로 갖는 유한요소 정식화를 하기 위한 맥스웰 방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다. 등방성의 매질내에서 Ohm의 법칙에 의해 식 (1)로 기본 방정식을 쓸 수 있다.

$$\nabla \times J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (1)$$

\*2001년 4월 19일 접수

1) 강원대학교 지구환경공학부

2) 서울대학교 전기전자공학부

$$J = \sigma E \quad (2)$$

$$-\nabla \phi = E \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \sigma \nabla \phi &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \\ &= I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서

- $J$  : 전류 밀도(current density)
- $\rho$  : 체적 전하 밀도(volume charge density)
- $\delta(x)$  : 디랙 델타 함수(dirac delta function)
- $\sigma$  : 전기 전도도(electric conductivity)
- $E$  : 전기장의 세기(electric field intensity)
- $\phi$  : 전위(electric potential)

2차원 축으로 매질이 일정하다 가정하고 3차원을 2차원화시킬 수 있다. 즉 다시 말해  $x, z$ 축과 관계된 영역만으로 변환시키고  $y$ 축은 파수  $K_y$  영역으로 Fourier 변환시켜 적분함으로써 원래의 공간에서의 전위값을 알 수 있게 된다. Fourier 변환과 그 역변환은 다음과 같다.

$$\phi(x, K_y, z) = \int_0^x \Phi(x, y, z) \cos(K_y y) dy \quad (5)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi(x, K_y, z) \cos(K_y y) dK_y \quad (6)$$

여기서  $\phi, \Phi$ 는  $y$ 축에서 우함수이다. 식 (5), (6)의 변환에 따라 2차원 전도도  $\sigma(x, z)$ 가 분포되어 있는 공간에서  $(x_s, y_s, z_s)$  위치의 점전원에 의한 3차원 전위분포  $\Phi(x, y, z)$ 는 2차원으로 변환된  $\psi(x, K_y, z) \phi(x, K_y, z)$ 로 바뀌어 진다. 위 식의 (5)식을 식(4)에 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다. 따라서 우리가 FEM으로 풀어야 할 지배방정식은 다음과 같이 바뀐다.

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \{ \sigma(x, z) \nabla \phi(x, K_y, z) \} + K_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, K_y, z) \\ = Q \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $Q$ 는  $I/2A$ 이고  $I$ 는 입력 전류이고  $A$ 는 입력시의 전류 node의 단면적이다. 이 적분을 위하여 파수  $K_y$ 가 연속적인 선형요소들로 나누어지고  $K_y$  영역에서의 함수가 좁은 구간에서 선형적으로 변한다고 가정하면  $\Phi(x, y_0, z)$  ( $x, y_0, z$ )는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y_0, z) &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^L \int_{k_i}^{k_{i+1}} \phi(x, K_y, z) \cos(K_y y) dK_y \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^L D_i(y_0) \phi(x, K_y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $L$ 은 적분요소의 개수이고  $D_i$ 는  $i$ 번째 요소의 적분값(사

다리꼴의 넓이)이다.

2.5차원 직류 전장 문제에 대해서 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} -\sigma \left( \frac{\partial^2 \phi(x, K_y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, K_y, z)}{\partial z^2} \right) + K_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, K_y, z) \\ = I \delta(x_s) \delta(z_s) \end{aligned} \quad (9)$$

한 요소 내부에서의 함수 값은 요소 절점에서의 값과 형상 함수를 이용하여 표현한다. 형상함수  $N_i$ 로 보간하여  $A$ 를 표현하면 다음과 같다.

$$\phi(x, K_y, z) = \sum N_i(x, z) \phi(x, K_y, z) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} \sum_{i,j} \int_{\Omega_e} \left[ \sigma \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + K_y^2 \sigma N_i N_j \right] \\ \phi(x, K_y, z) dx dz = \sum_{e=1}^{ne} \sum_{i,j} \int_{\Omega_e} N_i I \delta(z_s) dx dz \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $ne$ 는 전체 해석 영역에 존재하는 총 요소를 의미한다.

식 (11)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같고

$$[K_e][\phi_e] = [f_e] \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_e &= K_{e1} + K_{e2} \\ K_{e1} &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz \end{aligned} \quad (13)$$

$$K_{e2} = \int_{\Omega} K_y^2 \sigma N_i N_j dx dz \quad (14)$$

$$f_e = \int_{\Omega} N_i I \delta(x_s) \delta(z_s) dx dz \quad (15)$$

이다.

## 다중분해능

본 논문에서는 전도도 변화는 공간적으로 한정된 영역에서만 생겨난다고 가정을 사용하였다. 전도도 값은 대부분의 영역에서는 일정한 값을 가지며, 결함이 발생한 영역에서만 급격히 변화하는 분포 형태를 갖게 될 것이다. 이런 경우에는 일정한 전도도를 갖는 대부분의 영역에는 낮은 분해능을 사용하고, 급격히 변화하는 결함 영역에는 고 분해능을 사용하는 다중 분해능 해석 방법을 사용하면 효과적으로 변수의 개수를 줄일 수 있다. 웨이브렛 함수  $\phi(2^j x - k)$ 는 이러한 다중 분해능을 사용하여 적응적으로 해석하는데 매우 효과적이다.

이 함수들 사이의 관계는

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (16)$$

이며,

$$V_j \ni V_j = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j - k) \tag{17}$$

$$W_j \ni W_j = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j - k) \tag{18}$$

이 되고,  $k$ 는 정수이다.  $j$ 는 확장(dilation)변수라고 하는 스케일 인자이고 임의의 미분 방정식 근사에서는 근사 레벨이라고도 한다. 연산자  $P_j$ 는 임의의 함수  $f$ 를 부분공간  $V_j$  위로 사영한 것을 의미하고,  $Q_j$ 는  $W_j$  위로 사영한 것을 의미하며 그 표현은 다음과 같다

$$f(x) \approx P_j f(x) \approx \sum_k C_{j,k} \Phi_{j,k}(x) \tag{19}$$

$$f(x) \approx Q_j(x) f(x) \approx \sum_k d_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \tag{20}$$

여기서  $C_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ ,  $D_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle$  (21)

$W_j$ 는 부분공간  $V_{j+1}$ 에서  $V_j$ 와 정규 직교 하므로, 식 (16)에 의해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{j+1} f(x) &= P_j f(x) + Q_j f(x) \\ &= \sum_k C_{j,k} \phi_{j,k}(x) + \sum_k D_{j,k} \varphi_{j,k}(x) \end{aligned} \tag{22}$$

다중분해능으로 해석하기 위해서는 고분해능을 필요로 하는 구간에서만 항을 계속적으로 더해줌으로써 이를 수행할 수 있다. 여기서, 부분공간은 각각 서로 정규직교 관계에 있으므로 기존에 구한 계수 벡터는 보존하고 새로 더해진 항의 계수만 구하면 되므로 매우 효과적으로 해석을 수행할 수 있다.

존재하는 많은 종류의 웨이브렛 함수 중에서 본 논문은 Haar 웨이브렛을 기저함수로 사용하였다. 이는 웨이브렛이라는 개념이 정립되기 전부터 많이 사용되던 함수로, 유한 구간 존재하는 정규 직교 실수 함수이다. 이 함수의 형태는 Figure 1에서 보듯이 매우 단순한 사각형 모양의 함수로 매끄러운 곡선의 근사가 어렵다는 단점이 있지만, 그 계산의 단순성 때문에 이 논문에서 채택하여 사용하였다. 여기서 적용된 모델은 2차원의 전기비저항 분포를 구하는 문제이므로 2차원의 기저 함수가 필요한데, 웨이브렛으로 고차의 기저함수를 나타내기 위해서는 텐서 적(tensor product) 형태를 사용하며 다음과 같다.

$$\phi_{n,k_1,k_2}(x, y) = \phi_{n,k_1}(x) \phi_{n,k_2}(y) \tag{23}$$

$$\phi_{n,k_1,k_2}^{(2)}(x, y) = \phi_{n,k_1}(x) \phi_{n,k_2}(y) \tag{24}$$

$$\phi_{n,k_1,k_2}^{(3)}(x, y) = \phi_{n,k_1}(x) \phi_{n,k_2}(y) \tag{25}$$

$$\phi_{n,k_1,k_2}^{(4)}(x, y) = \phi_{n,k_1}(x) \phi_{n,k_2}(y) \tag{26}$$

Figure 1은 2차원 Haar 웨이브렛을 도시한 것이다.

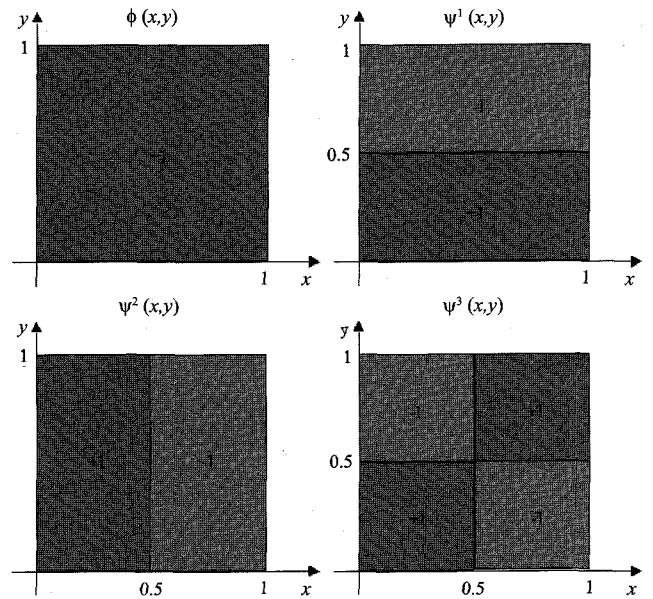


Fig. 1. Two-dimensional Haar wavelet.

### 역산이론

최적화 대상인 시스템을 해석하기 위해 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 유한 차원화된 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K][X] = [f] \tag{27}$$

여기서  $[K]$ 는 시스템 행렬이고  $[X]$ 는 상태변수 벡터이고  $[f]$ 는 구동 벡터이다. 시스템이 최적 특성을 갖을 때 최소값을 갖는 목적함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$F = F([X], [p]) \tag{28}$$

여기서  $[p]$ 는 물질변수 벡터를 의미한다. 이때 물질변수에 대한 목적함수의 변화율 즉 민감도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} \frac{\partial [X]}{\partial [p]} \tag{29}$$

이 때, 우변 둘째 항의 뒷 항  $\partial [X] / \partial [p]$ 를 계산하기 위해 상태 방정식 식 (27)의 양변을 설계변수에 대하여 미분한 후 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d[X]}{d[p]} = [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]} ([f] - [K][\bar{X}]) \tag{30}$$

여기서  $[\bar{X}]$ 는 식 (30)의 해이며, 물질변수에 대한 미분에 대해 상수임을 의미한다. 식 (30)를 식 (29)에 대입하면 다음의 민감도 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [X]} [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]} ([f] - [K][\bar{X}]) \tag{31}$$

역산 문제는 수학적으로 다음과 같이 구속 조건이 있는 최소화 문제(constrained minimization problem)로 간주할 수 있다.

$$\text{minimize } F([X],[P]) \tag{32}$$

본 논문에서는 목적함수를 계산된 전위와 측정된 전위의 차이의 제곱을 최소화 시키는 것으로 설정하였다.

또한 초기치는 전도도가  $3.5 \times 10^{-3}$ 으로 하였고, 계산에 사용된 컴퓨터 기종은 Pentium III이며, 계산 시간은 2 sec 정도 소요되었다.

### 모형계산

알고리즘의 유용성을 증명하기 위해 Fig. 2와 같이 이론모형을 제시하였다. 설정한 모형은 특정한 크기의 석회암 모암내에 길다란 공동이 있는 형태로 모암의 전도도는  $7.22 \times 10^{-3}$  mho/m, 공동의 전기전도도는  $3.57 \times 10^{-3}$  mho/m로 설정하였다. 지하 공동의 경우는 물성에 있어 크게 두가지 경우로 상정되는데 하나는 공기로 찬 빈공간이고 또 하나는 지하수로 가득 채워진 경우이다. 공동 및 모암의 전기비저항 물성은 현장에 따라 매우 다양하며, 본연구에서 설정한 값의 대비는 약 2배 정도로서 이 경우의 역산 시뮬레이션이 효과적이라면 전도도 값대비가 2배보다 훨씬 더 큰 경우에는 더욱 유효한 방법이라 할 수 있을 것이다. 또한 전류전극이 16개, 전위 전극이 16개가 위치하도록 하였으며 전류는 1A씩 전극을 옮겨가면서 상대적인 전위를 측정한다. 따라서 수치해석 상에서도 Dirichlet 경계조건을 첫 번째 전위전극에 주어야 한다. 왜냐하면 그렇지 않

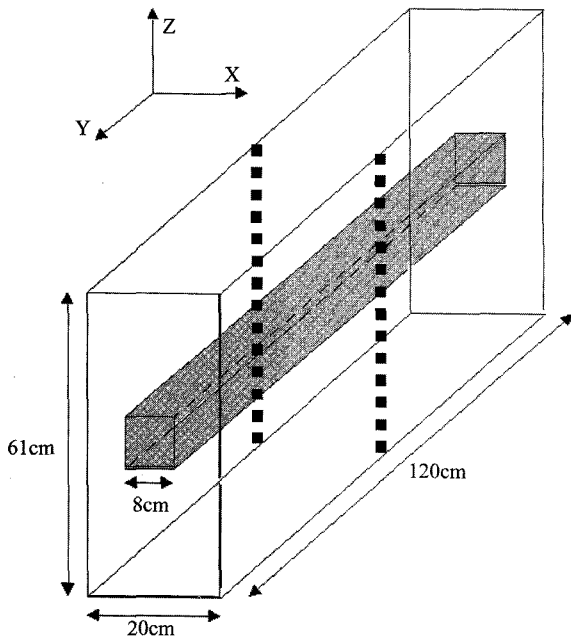


Fig. 2. Target model.

으면 보조 변수 식의 해가 비슷하게 나와서 민감도 계산값이 너무 작아지므로 변화량을 추정할 수가 없기 때문이다.

y 방향의 Fourier 변환이 가능하도록 기준이 되는 면에서 전류의 값을 작게 제한하였다. 3차원 모델이지만 Fourier 변환으로  $y=0$  즉,  $(x, 0, z)$  평면 상에서의 전위값을 쉽게 앞의 정식화로 구해낼 수 있다. 2차원 FEM에서 삼각형 요소수는 3282개, 절점수는 1260개로 해석하였다.

먼저 다중 분해능 기법을 적용하지 않고 문제를 풀었을 때의 결과이다.

Figure 3에서 확인할 수 있듯이 모든 변수를 지정하면 가운데의 물질 값이 다른 영역을 찾아가지만 정확한 영역과 양끝 쪽에 원치 않는 물질 값이 나타나게 된다. Fig. 4는 목적 함수의 수렴 양상이다. 목적 함수는 다소의 피크가 존재하지만 전반적으로 양호한 수렴의 형태를 띤다.

다음으로 Figure 5와 Figure 6은 최적경사법에 다중분해능 기법을 적용한 결과이며 Figure 5는 첫 번째 웨이브렛의 기저함수(V1)로 근사했을 때, Figure 6은 두 번째 웨이브렛 기저함

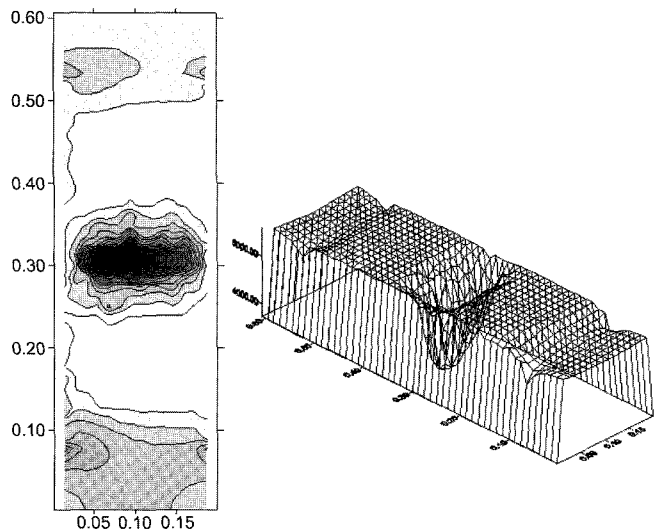


Fig. 3. Result from inverse analysis without multi-resolution method.

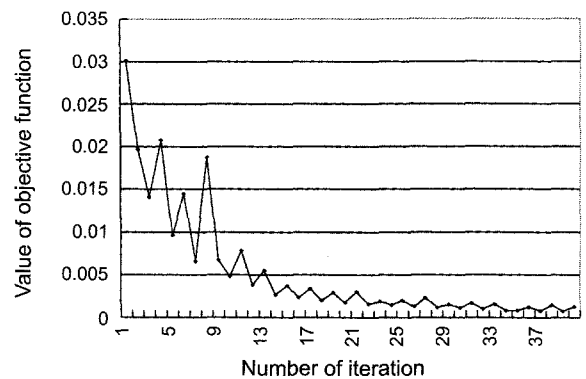


Fig. 4. Convergence trend of objective function.

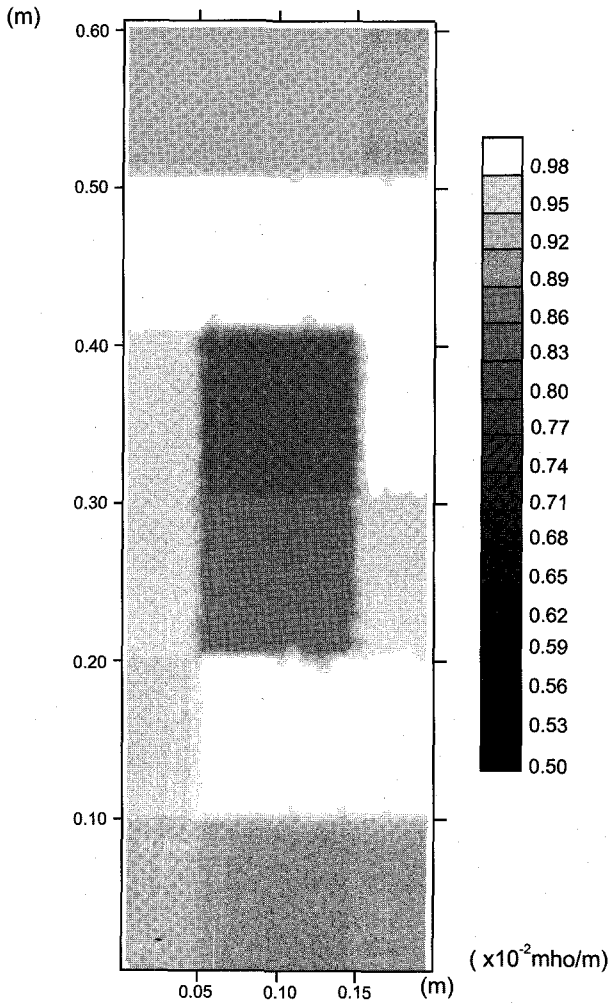


Fig. 5. Grids and material property distribution for the V1 approximation.

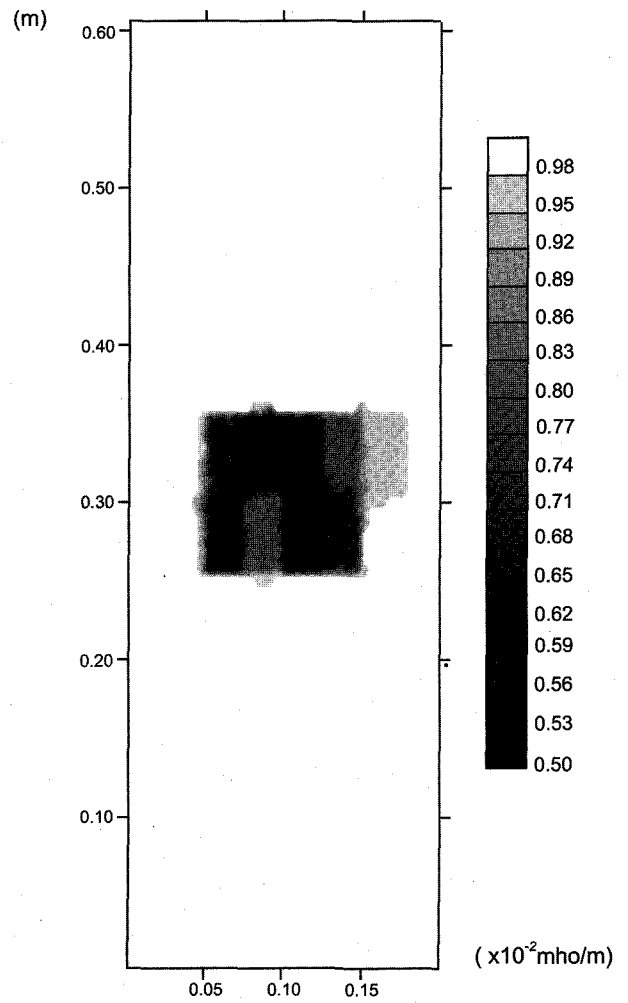


Fig. 6. Grids and material property distribution in the case of V2 approximation.

수(V2)로 근사했을 때의 구간영역과 물질분포를 추정해 가는 정도를 나타낸 그림이다. 아래 물질 값 보간을 통해서 가운데 영역이 지배적임을 확인할 수 있다. 물질 분포의 변화와 목적함수의 추이에 따라 분해능을 적절하게 높여 다음의 기저함수 영역으로 변환한다.

아래의 해석에서 편의상 초기 기준값으로 표준화한 수치를 그림을 통해 나타내었다. 이 같은 모델에서 요소 각각의 물질 값을 전부 변수로 하지 않고 구간을 나누어서 변수화하는 것이 훨씬 효율적임을 확인할 수 있다. 다음 그림은 목적함수의 수렴양상을 나타낸 것이다.

격자마다의 물질상수 모두를 변수로 설정하지 않았으므로 목적함수 수렴의 한계가 첫 번째 수준으로 근사했을 때는 존재한다. 즉 아래 Figure 7에서 13번째 반복까지가 첫 번째 수준으로 근사했을 경우이다. 더 이상의 감소가 존재하지 않음을 확인한 후 Figure 7에서 볼 수 있듯이 민감한 영역 근방에 웨이브렛 계수와 기저함수를 추가하여 다시 최적화 알고리즘에 적용하였다.

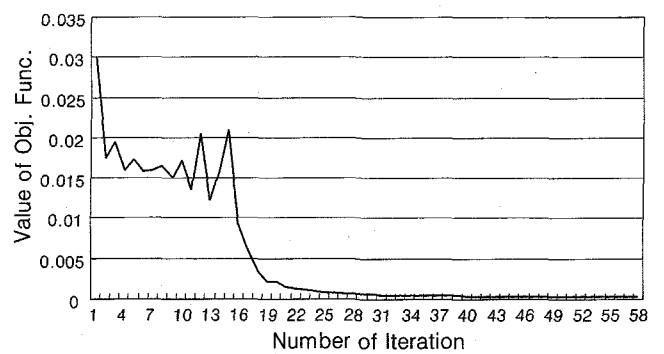


Fig. 7. Convergence trend of objective function.

기저함수의 수준을 바꿈에 따라 순간적인 목적함수의 증가가 있었으나 급격한 수렴양상을 확인할 수 있었다. 이러한 다중 분해능 기법을 적용한 알고리즘은 이질적인 경계가 확실히 보장된 경우 즉 불연속성이 보장되는 모델의 경우 상당히 효율이 높을 것으로 예상되나, 문제점으로 수준을 높이는 것이 불연속성이 보장되지 않는 경우 상당히 모호하다는 것이다.

## 결 론

## 참고문헌

기존의 FEM을 이용한 역산에서 민감도를 이용한 경우는 상당히 많이 연구되어 왔다. 비저항 역산 문제에 있어서의 문제점 즉 많은 변수의 불연속성을 적절하게 반영하기 위해 다중분해능 기법을 이용하여 변수의 개수를 줄여나감으로써 적응적으로 해석하는 방법을 제시하였다. 2.5차원 강제경계 조건을 부여하였을 경우 단 두 번째 영역의 분할 수준만으로 목적함수의 임계치에 도달함을 볼 수 있었다. 물질 값의 연속성보다는 불연속한 매질이나 좁은 영역에서의 불연속성을 지닌 매질일 경우 해석이 정확하며 적용이 용이한 알고리즘이라는 점을 앞의 예로 증명하였다. 또한 영역의 경계까지도 정확하게 추적해 나가는 것을 확인함으로써 크랙의 형태나 위치를 찾는 비파괴 검사 등 정밀한 역해석이 필요한 분야에서 많은 응용과 적용 가능성이 있음을 확인하였다.

여기에서 개발된 알고리즘은 지하공간구조의 규명에 적용될 수 있음은 물론이고, 다양한 분야와 기법에도 적용될 수 있을 것이다.

- Adler, A. and Guardo, R., 1996, Electrical Impedance Tomography: Regularized Imaging and Contrast Detection: *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **15**(2), 170-179.
- Beylkin, G., Coifman, R. R., and Rokhlin, V., 1991, Fast wavelet transforms and numerical algorithm I: *Comm. Pure and Appl. Math.*, **44**, 141-183.
- Pierri, R., Rubinacci, G., Tamburrino, A., Ventre, S., and Villone, F., 1998, Non-linear inverse resistivity profiling using wavelets: *IEEE Trans. Magn.*, **34**(5), 2920 -2923.
- Enokizono, M., Kato, E., and Tsuchida, Y., 1996, Inverse Analysis by Boundary Element Method with Singular Value Decomposition: *IEEE Transactions on Magnetics*, **32**(3).
- Ratnajeevan, S. H., Subramaniam, H. S., Saldanha, R., Coulomb, J. L. and Sabonnadiere, J. C., 1991, Inverse Problem Methodology and Finite Elements in the Identification of Cracks, Sources, Materials and their Geometry in Inaccessible Locations: *IEEE Transactions on Magnetics*, **27**(3).