

### 3차원 전자기 Green 텐서 전하성분의 특이적분에 대하여

송윤호<sup>1)</sup> · 김희준<sup>2)</sup> · 정승환<sup>1)</sup>

## On the Singular Integral of Charge Accumulation Term of 3-D EM Green's Tensor

Yoonho Song<sup>1)</sup>, Hee Joon Kim<sup>2)</sup> and Seung-Hwan Chung<sup>1)</sup>

### 서 론

적분방정식 전자탐사 모델링에서 해의 정확도를 좌우하는 Green 텐서의 특이적분은 많은 연구결과에서 명확히 정리되어 있지 않았으며, 특히 3차원 공간에서 스칼라 Green 함수의 공간 2차 미분으로 정의되는 전하축적항(charge accumulation term)의 특이적분은 Van Bladel(1961) 이후에도 물리탐사 분야에서는 해석적으로 다루어져 오지 않았다. 송윤호와 정승환(2000)은 이러한 Green 텐서의 특이적분을 3차원, 2.5차원, 2차원 및 얇은 판(thin sheet) 적분방정식의 경우에 대해 모두 해석적으로 정리함으로써 적분방정식 전자탐사 모델링의 정확도를 높이는 기초를 마련코자 하였다.

그러나 3차원 Green 텐서 중 전하축적항에 대한 특이적분에서 송윤호와 정승환(2000)의 결과는 principal value로서 정확한 적분 값이 아닌 것이 발견되었다. 본 단보에서는 이러한 오류를 해결한 해석적 특이적분 값을 유도하고 기존에 수치적으로 표현하였던 값들의 정확도도 검증하였다.

### 특이적분해

먼저 특이적분의 대상이 되는 전체공간 Green 텐서를 다시 살펴보자(송윤호와 정승환(2000)의 (8)식).

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1)$$

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} \quad (3)$$

여기서  $k$ 는 전파상수이며,  $\omega$ 는 각 주파수,  $\sigma$ 는 전체공간의 전 기전도도,  $\epsilon$ 은 전체공간의 유전율, 그리고  $\mu$ 는 투자율로서 진공에서의 값( $4\pi \times 10^{-7}$  H/m)과 같다고 가정한다.

(1)식 우변의 첫 번째 항 즉, 전자기유도항의 특이적분은 이미 잘 알려진 바와 같이(Hohmann, 1975; 송윤호와 정승환(2000)의 (14)식),

$$\begin{aligned} & \int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} \left\{ \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right\} dx' dy' dz' \\ & \equiv \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\theta d\phi dR \\ & = \int_0^{R_0} R e^{-ikR} dR \\ & = \frac{1}{k^2} [(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1] \end{aligned} \quad (4)$$

이 되는데, 여기서  $\Delta$ 는 미소 정육면체 모서리의 길이이며,

$$R_0 = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \Delta \quad (5)$$

즉, 정육면체와 체적이 같은 구의 반지름이고

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (6)$$

이다.

송윤호와 정승환(2000)의 정리에서 오류를 야기한 부분은 (1)식 우변의 두 번째 항 즉, 전하축적항의 특이적분이다. 이 전하축적항 중 교차미분항(cross-derivative term)은 대칭성에 의해 0이 된다(송윤호와 정승환(2000)의 (17)식). 따라서 전하

\*2001년 12월 7일 접수

1) 한국지질자원연구원, 탐사개발연구부 (Geophysical Exploration and Mining Research Division, Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources)

2) 부경대학교 환경탐사공학과 (Department of Environmental Exploration Engineering, Pukyong National University)

축적항의 특이적분은 같은 좌표에 대한 2차 미분항만 값을 가지게 되므로

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (7)$$

로부터, 이를  $\mathbf{r}'$ 을 중심으로 하고 반경  $R_0$ 인 구  $V_0$ 에 대해 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{V_0} \nabla^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv + k^2 \int_{V_0} g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv = -1 \quad (8)$$

위 식 좌변의 두 번째 항의 적분은 이미 (4)식에 나타나 있으므로

$$\int_{V_0} \nabla^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv + k^2 \frac{1}{k^2} [(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1] = -1 \quad (9)$$

이며 따라서 전하축적항의 특이적분은 다음과 같이 정리된다.

$$\int_{V_0} \nabla^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv = -(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \frac{\partial^2 e^{-ikR}}{\partial x^2 4\pi R} dx' dy' dz' &= \int_{V_0} \frac{\partial^2 e^{-ikR}}{\partial y^2 4\pi R} dx' dy' dz' \\ &= \int_{V_0} \frac{\partial^2 e^{-ikR}}{\partial z^2 4\pi R} dx' dy' dz' \\ &= -\frac{1}{3}(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

(11)식을 송윤호와 정승환(2000)의 (20)식과 비교하면  $-1/3$ 만큼 차이가 나고 있다. 이러한 문제는 미분값이 정의되지 않은 특이점에 대해 체적적분을 수행함으로써, 수학적으로는 단지 principal value 적분값만이 고려되었던 것이며, 따라서 물리적으로는 직류로 갈 때 ( $k=0$ ), 전하축적항을 무시하였던 것이 된다. 직류일 경우에 전자기유도항의 특이적분은 없었으며 ((4)식), 올바르게 계산된 전하축적항인 (11)식에서는  $-1/3$ 이 되어 비록 물리적인 의미는 약간 달라도 Van Bladel(1991, Ch.3)의 구에 대한 L dyadic과 동일하게 된다.

전자기유도항과 전하축적항에 대한 특이적분을 모두 합쳐 정리하면 다음과 같이 Green 텐서의 3차원 특이 미소체에 대한 적분을 간단히 나타낼 수 있게 된다.

$$\int_{V_0} \underline{\mathbf{G}}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{k^2} \left[ \frac{2}{3}(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1 \right] \mathbf{I} \quad (12)$$

그 외 2차원, 2.5차원 및 얇은 판 적분방정식의 경우에는 송윤호와 정승환(2000)에 서술되어 있는 수식들이 옳다.

### 전하축적항의 특이적분 비교

기준에 많이 사용되고 있는 3차원 적분방정식 전자탐사 모

델링에서의 특이적분 근사해와 (11)식에 표현된 해석적 해를 비교해보자. 앞서 밝힌 바와 같이 대칭성을 이용하여 편의상  $x$ 방향 전류원에 대한  $x$ 방향 반응만 고려한다. 먼저 3차원 적분방정식 모델링의 시초인 Hohmann(1975)은 2차 미분의 체적적분을 divergence 정리를 이용하여 다음과 같이 면적분으로 치환하였으며

$$\int_V \nabla \nabla g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv' = \hat{\mathbf{n}} \int_S \nabla g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dS' \quad (13)$$

따라서  $n$ 번째 미소체에서  $m$ 번째 미소체에 미치는  $x$ 방향에 대한 전하축적항은

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} &= \int_{V_n} \nabla \nabla g(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}') dv' \Big|_{xx} \\ &= \sum_{l=1}^2 (-1)^l \int_{S_n} \frac{\left\{ x_m - x_n - (-1)^l \frac{l\Delta}{2} \right\}}{4\pi R_l} (ikR_l + 1) e^{-ikR_l} dy' dz' \end{aligned} \quad (14)$$

$$R = \left| \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n - (-1)^l \frac{l\Delta}{2} \mathbf{u}_x \right| \quad (15)$$

가 되는데, (14)식의 우변 적분이 해석적으로 구해지지 않기 때문에 급수전개를 이용하여 3번째 항까지로 근사하고 적분하면 다음과 같이 정리된다(Hohmann (1975) (47)식).

$$\Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^2 (-1)^l \left[ \Omega_l + \left( \frac{k^2 \Delta^2}{2R_l} - i \frac{k^3 \Delta^2}{3} \right) \left( x_m - x_n - (-1)^l \frac{l\Delta}{2} \right) \right] \quad (16)$$

여기서  $\Omega_l$ 은 입체각이다. 특히 미소체에서는  $m=n$ 이고,  $R=\Delta/2$  이므로 Hohmann(1975)은 정확도를 높이기 위해 정사각형 옆면을 동일한 면적을 갖는 원판으로 대체하였으며 결과적으로 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} &= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{4\pi}{3} - \Delta \left\{ \pi k^2 \left( \sqrt{a^2 + \frac{\Delta^2}{4}} - \frac{\Delta}{2} \right) - i \frac{k^3 \Delta^2}{3} \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \frac{k^2 \Delta^2}{4\pi} \left[ \pi \left( c - \frac{1}{2} \right) - i \frac{k\Delta}{3} \right], \\ a &= \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (17)$$

(17)식에서도 직류 즉,  $k=0$ 으로 가면 역시  $-1/3$ 만 남게 되어 적어도 저주파 또는 작은 전파상수의 경우에는 정확한 계산값을 제공함을 알 수 있다.

한편 Das and Verma(1981)는 전하축적항의 적분에 있어서 역시 면적분을 동원하였으나 미소체를 원통형으로 가정하여

$$\Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} = \left[ \frac{\Delta e^{-ik\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + a^2}}}{2\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + a^2}} - e^{-ik\frac{\Delta}{2}} \right] = \frac{e^{-ikc\Delta}}{2c} - e^{-ik\frac{\Delta}{2}} \quad (18)$$

으로 유도하였는데, 이 경우 직류에서 앞서의 두 경우와 달리  $-1/3$ 로 접근하지 않게 된다.

마지막으로 Hohmann(1988)은 전하축적항의 적분에서 공간 좌표에 대한 미분을 차분으로 변형하고 체적적분을 이용하면 적은 수의 미소체 분할 만으로도 더 정확한 해를 얻을 수 있다고 하고, 이를 평면파 송신원에 대한 2차원 유한요소 모델링 결과와의 비교를 통하여 설명하였다(Hohmann, 1988, p. 348, Fig. 12). 이에 따르면 전하축적항의 적분은

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} = & -\frac{1}{\Delta^2} \left[ -\int_{n^-} G\left(\mathbf{r}_m + \frac{\Delta}{2}\mathbf{u}_x, \mathbf{r}'\right) dv' \right. \\ & + \int_{n^+} G\left(\mathbf{r}_m + \frac{\Delta}{2}\mathbf{u}_x, \mathbf{r}'\right) dv' \\ & \left. + \int_{n^-} G\left(\mathbf{r}_m - \frac{\Delta}{2}\mathbf{u}_x, \mathbf{r}'\right) dv' - \int_{n^+} G\left(\mathbf{r}_m - \frac{\Delta}{2}\mathbf{u}_x, \mathbf{r}'\right) dv' \right] \quad (19) \end{aligned}$$

와 같이 나타나며(Hohmann (1988)의 Fig. 11 및 (120)식 참조) 여기서  $G$ 는 스칼라 Green 함수이다. (19)식에서  $n^-$ ,  $n^+$ 는 각각  $n$ 번째 미소체에서  $x$ 방향으로 이를  $-\Delta/2$  및  $\Delta/2$  만큼 이동시킨 미소체를 말하며 따라서  $x$ 방향으로의 미분을 차분으로 근사하게 된다. 특히 미소체의 경우에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi mn}^{P(xx)} = & -\frac{2}{k^2 \Delta^2} \\ & \left[ \frac{e^{-ik\Delta}}{k\Delta} \{ \sin(kR_0) - kR_0 \cos(kR_0) \} + (ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1 \right] \quad (20) \end{aligned}$$

위 식은 앞서 살펴본 세 가지 경우와는 달리 분모에 전파상수 ( $k$ )의 제곱항을 포함하고 있어 저주파수나 전기전도도가 낮은 경우에는 수치적으로 불안해질 우려가 있음을 보여준다.

이제 지금까지 살펴본 4가지 경우의 해를 직접 비교해보자. Fig. 1은 100 ohm-m 균질 전체공간내에 위치한 10 m × 10 m × 10 m 크기의 특이 미소체에 대한 전하축적항의 한 성분(즉  $xx$ ,  $yy$  혹은  $zz$  성분)을 주파수에 따라 계산하여 도시한 것이다. 실수성분을 살펴보면, 수식에서 예상된 바와 같이 Hohmann (1975)의 결과가 저주파수에서는  $-1/3$ 로 해석적 해와 동일하며 Das and Verma(1981)의 결과는 약간 큰 값을 보여주고 있다. 주파수가 증가함에 따라 Hohmann(1975)의 결과는 해석적 해에서 벗어남에 반해 오히려 Das and Verma(1981)의 결과는 해석적 해와 근접함을 볼 수 있다. 주파수가 증가할수록 참 값에서 멀어지는 문제는 대상체를 더 많은 수의 미소체를 분할하여 미소체의 체적을 작게 만듦으로써 해결해야 한다. 반면에, 체적적분의 차분을 통해 전하축적항의 적분을 해결함으로써 정확도를 향상시켰다는 Hohmann(1988)의 결과는 저주파에서 실수성분이  $-1/3$ 과는 동떨어진 결과를 보여주고 있으며, 주파수가 낮아질 때는 (20)식에서 예상된 바와 같이 허수성분에서 심각한 오류를 야기한다. 따라서 특이 미소체에 대한 별도의 계산 부분을 알고리즘에 포함시키지 않는다면 결과적인 모델

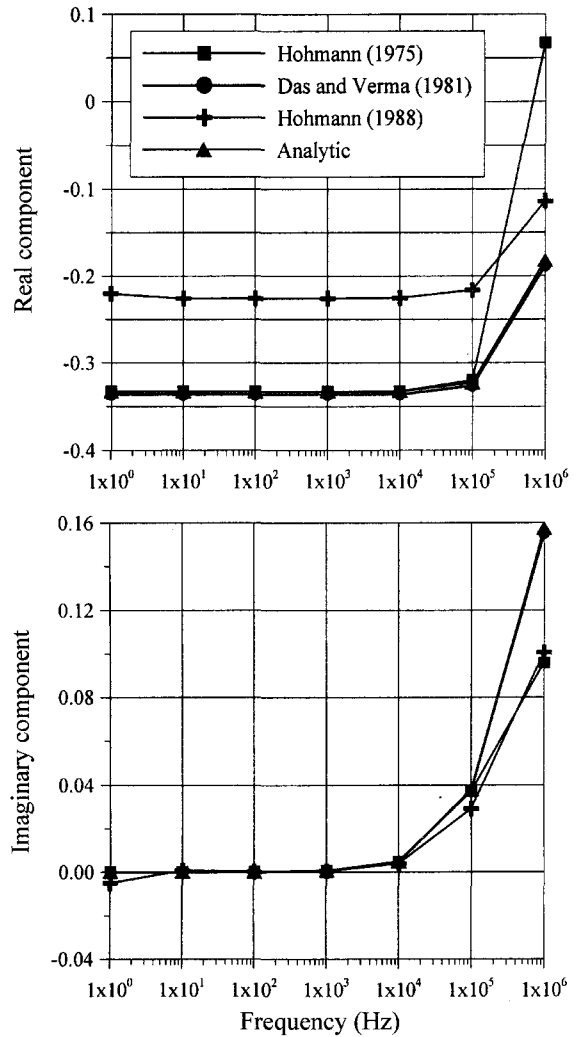


Fig. 1. Comparison of singular integrals of the charge accumulation term of Green tensor. The cubic singular cell, length of the edge being 10 m, is located in a whole space of 100 ohm-m.

링 해의 정확도를 많이 떨어뜨릴 우려가 있음을 확인할 수 있다.

### 결론

3차원 전자기 Green 텐서 중 전하축적항의 특이적분을 간단하게 해석적으로 유도하고 기존에 발표된 여러 수치적 적분 값과 비교하였다. 송윤호와 정승환(2000) 및 본 단보에서 기술한 수식은 기존의 모델링 알고리즘에 쉽게 포함될 수 있으므로, 특이적분값이 적분방정식 모델링 해의 정확도를 좌우한다는 점에서 매우 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 한편 정확하다고 알려진 Hohmann(1988)의 방식은 특이 미소체에 대해 가장 부정확한 계산 값을 내주기 때문에, 특이 미소체 부분에 대해서는 해석적 해를 이용하도록 알고리즘이 개선되어야 할 것이다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술부 지정 “99 국가지정연구실 사업”으로 선정되어 그 연구비 지원에 의해 이루어진 결과의 일부임을 밝힌다.

## 참고문헌

송윤호, 정승환, 2002, 적분방정식 전자탐사 모델링에서 Green 텐서의 특이 적분: 물리탐사, **3**, 13-18.  
 Das, U. C., and Verma, S. K., 1981, Numerical consideration on computing the EM responses of three-dimensional inhomogeneousities in a layered earth: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **66**, 733-740.

Hohmann, G. W., 1975, Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling: *Geophysics*, **40**, 309-324.  
 Hohmann, G. W., 1988, Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics, in Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics, Volume 1, Theory: Soc. Expl. Geophys.*  
 Van Bladel, J., 1961, Some remarks on Green's dyadic for infinite space: *IRE Trans. Ant. Prop.*, **9**, 503-506.  
 Van Bladel, J., 1991, *Singular electromagnetic fields and sources: IEEE Press.*