

비선형 계획법을 이용한 B-스플라인 곡면의 순정 알고리즘

이현찬^{1*} · 홍충성¹ · 김덕수²

¹홍익대학교 정보산업공학과 / ²한양대학교 산업공학과

A Global Fairing Algorithm for B-spline Surfaces Using Non-linear Programming

Hyun Chan Lee¹ · Chung Seong Hong¹ · Deok-Soo Kim²

¹Dept. of Information and Industrial Engineering, Hongik University, Seoul

²Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University, Seoul

In the reverse engineering, surfaces are modeled for new products by interpolating the digitized data points obtained by measuring the existing shapes. However, many measuring or deviation errors are happened during the measuring process. If these errors are ignored, designers could get undesirable results. Therefore, it is important to handle such errors and fairing procedure with the aesthetics criteria is needed during surface modeling process. This paper presents algorithms for the fairing of B-spline surfaces. The algorithms are based on automatic repositioning of control points for B-spline surfaces. New positions of the control points are determined by solving a non-linear programming of which the objective functions are derived variously using derived surfaces and constraints are established by distance measures between the original and the modified control points. Changes in surface shapes are analyzed by illustrations of their shapes and continuous plotting of gaussian and mean curvatures.

Keywords : B-spline surface, fairing, non-linear programming, derived surface, control points

1. 서론

컴퓨터 그래픽스 환경하에서 높은 정밀도를 가지는 자유 곡면 (free-form surface)은 자동차 차체, 비행기 동체, 그리고 배의 선체 디자인과 같이 많은 산업 분야에 적용 가능하다. 이러한 자유 곡면을 모델링하기 위하여 CAD(Computer Aided Design) 시스템은 다양한 도구들을 제공하고 있는데, 일반적으로 3차원 측정점 데이터를 이용한 자유 곡면 모델링 방법이 널리 사용된다. 그러나 단순히 주어진 3차원 측정점을 지나는 보간 조건(interpolation condition)과 경계 조건(boundary condition)을 만족시켜 자유 곡면을 모델링 하여도, 측정점 자체에 포함되어 있는 오차나 편향성에 의하여 설계자가 원하지 않은 자유 곡면이 생성되기도 한다. 따라서 이러한 오류를 보정하여 설

계자가 원하는 부드러운 자유 곡면을 생성하기 위하여는 곡면을 순정(fairing)하는 과정이 필요하다.

곡면 순정이란 곡면 내부에 존재하는 과도한 곡률을 지니는 지역이나 원하지 않는 곡면의 굴곡 등을 제거해 나가는 작업을 의미한다. 곡면을 순정하는 방법에는 설계자가 반복적으로 곡면의 순정 과정에 참여하는 방법과 설계자가 곡면의 순정 과정에 참여하지 않고 자동적으로 곡면의 모양을 변하게 하는 방법이 있다. 설계자가 순정 과정에 반복적으로 참여하는 방법의 경우, 설계자는 곡면의 모양을 변화시키기 위하여 이동 가능한 조정점을 분별해내고 이를 적절히 이동시킴으로써 변경된 곡면을 모델링하게 된다. 이 작업은 변경된 곡면과 이에 대응되는 곡률 분포를 실제 그려봄으로써, 곡면이 설계자가 만족할 만큼 부드럽게 될 때까지 반복된다. 그러나 이러한 방법은 설계자의 높은 기술이 요구되며 비슷한 작업이 반복되기

* Corresponding author : Professor Hyun Chan Lee, Dept. of Information and Industrial Engineering, Hongik University, 72-1, Sangsu-dong, Mapo-gu, Seoul, 121-791 KOREA, Fax : +82-2-336-1130, e-mail : hclee@wow.hongik.ac.kr

1999년 12월 접수, 1회 수정 후, 2000년 10월 게재 확정.

때문에 시간과 비용 측면에서 매우 비효율적이다.

현재까지 곡면을 자동적으로 순정하는 방법은 실질적으로 존재하지 않는다. 설계자가 직접적으로 곡면의 순정 중간 단계에 참여하지 않는다 하여도 변화할 수 있는 조정점 혹은 곡면 모델링 요소들을 결정하는 문제, 이것들이 실제 이동할 수 있는 범위를 결정하는 문제, 그리고 변경된 곡면이 어떠한 모양을 유지하여야 하는지에 대한 순정 평가 기준을 결정하는 문제는 여전히 설계자의 몫으로 남게된다. 특히 곡면 순정 평가 기준(fairness criteria)의 결정과 이에 따른 순정 척도(fairness metric)의 유도는 순정 후 곡면의 모양을 결정하는 중요한 요소가 된다.

자동적인 곡면의 순정을 위하여 많은 연구자들은 측정점으로부터 부드러운 곡면을 모델링하는 방법, 이미 모델링된 곡면의 요소를 변경하여 곡면의 순정을 행하는 방법, 그리고 여러 개의 패치들로 이루어진 곡면에서 패치 간의 연결 부분을 부드럽게 변화시키는 방법에 대하여 연구하였다. 특히 모델링된 곡면의 요소를 변경하여 곡면의 순정을 행하는 방법은 역공학(reverse engineering)을 이용하여 생산에 필요한 제품의 수리적 모델(mathematical model)을 생성할 때 필수적인 과정이 되었다.

모델링된 곡면의 요소를 변경하여 곡면을 순정할 때, 변경되어지는 곡면 요소의 새로운 값을 결정하는 방법으로써 많은 경우 비선형 계획법(non-linear programming)을 이용하게 된다. 비선형 계획법을 이용할 경우 설계자는 곡면 순정 과정에 반복적으로 참여하지 않을 수 있으며 순정 척도가 설계자의 곡면 순정 의도를 잘 반영할 경우 최적의 순정 결과를 얻게 됨으로써 비선형 계획법을 사용하지 않았을 경우보다 효율적인 순정을 수행할 수 있다.

비선형 계획법을 이용하여 곡면을 순정하는 연구에서, Kaufmann과 Klass는 새로운 종류의 반사선(reflection lines)을 정의하고 반사선의 볼록포(convexity)를 유지시키는 방향으로 B-스플라인 곡면의 조정점을 변경시킴으로써 곡면을 순정하는 알고리즘을 제시하였다(Kaufmann and Klass, 1988). Lott와 Pullin은 전반적인 곡면의 품질을 측정할 수 있는 평가 척도와 곡면 변경에 대한 제약을 각각 비선형 계획법의 목적함수와 제약식으로 정의하고, 곡면 순정 문제를 하나의 변경 요소 혹은 여러 개의 변경 요소를 갖는 문제로 나누어 각각의 알고리즘을 제시하였으며(Lott and Pullin, 1988), Ferguson *et al.*은 곡면의 u, v 방향으로의 일정 매개변수(isoparametric) 곡선이 볼록포를 유지하도록 곡면을 변경시킴으로써 순정을 수행하였다(Ferguson *et al.*, 1988). 또한 Rando와 Roulier는 파생곡면(derived surface)을 이용하여 다양한 순정 척도를 유도하는 방법과 이를 이용하여 베지에르 곡면 순정을 최적화 문제에 적용시키는 방법에 관하여 연구하였으며(Rando and Roulier, 1991; Rando and Roulier, 1994), Hahmann과 Konz는 탐색 전략(searching strategies)을 이용하여 B-스플라인곡면의 절점(knot)들을 제거하고 재삽입함으로써 곡면 순정을 수행하는 방법을 제시하였다(Hahmann and Konz, 1998).

그러나 이러한 연구들은 곡선 순정을 반복하여 곡면 순정을 수행함으로써 순정 후 곡면의 전체적인 품질을 보장하지 못하거나(Kaufmann and Klass, 1988; Ferguson *et al.*, 1988), 실제 순정시 계산의 편이성을 위하여 목적함수와 제약식을 지나치게 단순화 시킴으로써 설계자의 곡면 순정 의도를 정확하게 반영하지 못하는 경우가 발생하며(Lott and Pullin, 1988), 곡면의 변화에 대한 제약을 두지 않음으로써 과도하게 곡면의 모양이 변화하는 경우가 생기거나(Rando and Roulier, 1991; Rando and Roulier, 1994), B-스플라인곡면의 절점 벡터를 이용하여 곡면 순정을 수행함으로써 곡면의 모양을 근본적으로 변화시키지 못하여 불필요한 굴곡을 제거하지 못하는(Hahmann and Konz, 1998) 단점들을 가지고 있다.

본 논문에서는 비선형 계획법을 이용한 B-스플라인곡면의 순정에 관하여 다루고 있다. 비선형 계획법의 목적함수로 사용된 곡면 순정 척도는 곡면의 기하학적 불변요소에 기초한 다양한 파생곡면의 표면적이 사용되었으며(Rando and Roulier, 1991), 제약식으로는 B-스플라인곡면의 초기 조정점과 변경된 조정점 간의 거리차이에 제한을 두는 조건이 사용되었다. B-스플라인곡면의 조정점들은 제약조건을 만족시키는 범위 내에서 목적함수를 최소화 시키는 방향으로 이동하게 되며, 비선형 계획법의 해를 구함으로써 도출된 결과는 조정점 변화에 따른 곡면 모양과 곡률의 변화를 살펴봄으로써 분석되었다. 마지막으로 본 논문에서는 앞서 설명한 순정 방법을 사용하여, 기존의 연구에서 많이 사용되어진 곡면의 Gaussian 곡률값의 크기를 줄이는 순정 척도와 Rando와 Roulier가 제시한 방법으로 유도된 순정 척도가 곡면 순정시 어떠한 순정 결과의 차이를 나타내는지 비교하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 B-스플라인곡면의 개요에 대하여 기술한다. 3절에서는 B-스플라인곡면 순정시 필요한 순정 척도를 유도하는 방법과 순정 척도가 실제 곡면 순정시 미치는 영향에 대하여 기술한다. 4절에서는 B-스플라인곡면 순정시 어떻게 비선형 계획법이 사용되어졌는지를 기술하며 순정 알고리즘을 제시한다. 5절에서는 실제로 B-스플라인곡면 순정을 수행하고 결과를 분석하며, 6절에서는 본 논문의 결론 및 추후 연구과제에 대하여 기술한다.

2. B-스플라인 곡면

3차원 공간상에서 B-스플라인곡면은 다음과 같이 정의된다(Piegl and Tiller, 1995).

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (1)$$

여기서 p 와 q 는 매개변수 u, v 방향으로의 차수(order)이며, $P_{i,j}$ 는 $n \times m$ 개의 B-스플라인곡면을 표현하는 조정점(control points)이다. 또한 $N_{i,p}(u)$ 와 $N_{j,q}(v)$ 는 첫 절점과

마지막 절점이 각각 $p+1$ 개와 $q+1$ 개의 중복을 갖는 절점의 집합인 절점벡터(knot vectors)

$$U = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n+p-1}, u_{n+p}, u_{n+p+1}),$$

$$V = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n+p-1}, v_{n+p}, v_{n+p+1})$$

로 정의되는 B-스플라인기저함수(basis function)이다.

B-스플라인곡면에서 기저함수는 매개변수 u, v 의 변화에 따라 각 조정점에 대응되는 기저함수 값이 유동적으로 변할 수 있도록 정의된다. 절점 벡터를 구성하고 있는 절점들이 오름차순으로 정리되어 있다면, 차수 p 의 i 번째 B-스플라인기저함수는 다음과 같이 정의된다.

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{and } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{and otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2)$$

위에서 정의된 B-스플라인곡면은 볼록포 특성(convex hull property), 국부 조정 개념(local modification scheme), 매개변수 방향으로의 (차수-1)차의 연속성 보장 및 미분가능 등의 특성들을 가지게 된다.

3. 곡면 순정 척도

곡면의 모양은 많은 경우에 설계자뿐만 아니라 곡면의 최종 사용자에게도 중요한 요소가 된다. 설계자가 원하는 곡면의 모양에 대한 제약은 곡면을 표현하는 매개변수의 특정 위치에서의 접평면(tangent plane)과 법선 벡터(normal vector)의 방향, 일정 구간에서의 볼록포 유지와 곡률의 점진적인 변화 등에 의하여 결정되어질 수 있다. 그러나 이러한 곡면의 모양에 대한 요구사항이 만족된다 하여도 최종적인 곡면의 모양에 대한 결정이 남게 된다. 이 단계에서 필요한 것이 곡면 순정시 설계자가 원하는 곡면에 대한 순정 평가 기준이다.

곡면 순정 평가 기준을 결정하는 것은 매우 어려운 문제이다. 곡면의 부드러움에 대한 기준은 설계자에 따라 주관적이며 모호할 뿐만 아니라 모든 문제에 있어서 하나로 정의되지는 않는다. 또한 설계자가 정한 순정 평가 기준을 만족했다고 하여도, 곡면의 일부분에서 날카롭게 휘어지거나 부분적으로 평평한 점들이 생기는 것과 같은 원하지 않는 곡면의 모양이 생성될 수 있다. 따라서 곡면의 순정시 순정 수준을 식별할 수 있는 방법이 개발되어야 할 필요가 있다.

곡면 순정 척도는 곡면의 순정 평가 기준을 수리적으로 측정하는 방법이다. 곡면 순정 척도를 만들 때에는 순정 평가 기준이 설계자와 순정하고자 하는 곡면에 따라 다양하게 변한다

는 점이 고려되어야 한다. 결국 하나의 곡면 순정 척도가 모든 상황에서 곡면을 시각적 혹은 공학적으로 부드럽게 변경시키지는 못하며 설계자의 의도를 고려하여 개발되고 선택되어야 한다.

본 논문에서는 파생곡면 $c(u, v)$ 를 이용한 곡면 순정 척도 유도 방법을 사용하였다(Rando and Roulier, 1991; Rando and Roulier, 1994). 파생곡면이란 순정하고자 하는 매개변수 곡면(parametric surface)을 디자인 곡면(design surface) $r(u, v)$ 라 하였을 때, 디자인 곡면의 기하학적 불변요소(geometric invariants)로 이루어진 곡면을 의미한다. 곡면 순정 척도 (Γ)는 식(3)과 같이 파생곡면의 표면적으로 정의된다.

$$\Gamma = \int \int_G \left| \frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v} \right| du dv \quad (3)$$

여기서, G 는 매개변수 (u, v) 의 정의역이다.

디자인 곡면의 기하학적 불변요소를 사용하여 파생곡면을 만들었을 경우, 곡면 순정 척도는 디자인 곡면의 매개변수에 영향을 받지 않는다. 즉, 두 개의 다른 매개변수를 사용하여 같은 디자인 곡면을 표현하였을 때, 두 곡면에서의 순정 척도는 같은 수준을 유지하게 된다. 이 경우 설계자는 가장 사용하기 편리하게 매개변수화된 곡면을 이용하여 곡면 순정 척도를 계산할 수 있다.

곡면상의 한 점 P 에서의 곡률은 곡선에서와는 달리 무한히 존재한다. 무한한 곡률 중 가장 큰 값과 작은 값을 가지는 곡률을 주곡률(principal curvatures) k_1, k_2 라고 하며, 이 때 곡면상의 점 P 에 접하는 접평면에서 주곡률에 대응되는 방향을 주곡률 방향(principal directions)이라고 한다. 또한 곡면상에서 모든 접선 방향이 주곡률 방향인 곡선을 주곡률 연결선(line of curvature)이라 하며, 이것들의 네트워크(network)는 곡면의 매개변수화를 위하여 사용되어질 수 있다. 곡면에서의 기하학적 불변요소인 Gaussian 곡률 K 와 평균 곡률(mean curvature) H 는 주곡률을 이용하여 정의된다(Farin, 1992).

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (4)$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{NE - 2MF + LG}{EG - F^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E &= r_u \cdot r_u, & F &= r_u \cdot r_v \\ G &= r_v \cdot r_u, & L &= n \cdot r_{uu} \\ M &= n \cdot r_{uv}, & N &= n \cdot r_{vv} \end{aligned}$$

곡면 순정시 순정 척도는 설계자에게 순정 척도가 최소화될 때 디자인 곡면이 어떻게 변화될지를 예측 가능하도록 하는 도구로 제공된다. 따라서 순정 후 디자인 곡면의 변화를 예측하기 위하여 순정 척도의 역할을 분석할 필요가 있으며, 이를 위하여 디자인 곡면을 각각의 점에서 식(6)이 만족하도록 호길이(arc length)로 재매개변수화(reparametrization) 한다.

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| = 1 \quad (6)$$

이때 초기 디자인 곡면의 단위 법선 벡터는 다음과 같다.

$$n(u, v) = \frac{(\partial r(u, v)/\partial u) \times (\partial r(u, v)/\partial v)}{|(\partial r(u, v)/\partial u) \times (\partial r(u, v)/\partial v)|} \quad (7)$$

또한 디자인 곡면이 호길이로 재매개변수화 되었기 때문에 식 (8) 또한 성립하게 되며, 결과적으로 곡면 순정 척도인 파생곡면 c 의 표면적을 구하면 식 (9)와 같다.

$$n = \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \quad (8)$$

$$\Gamma = \int \int_G \left| \frac{\partial c}{\partial u} \times \frac{\partial c}{\partial v} \right| du dv = \int \int_{G^*} \left| \frac{\partial c}{\partial s} \times \frac{\partial c}{\partial t} \right| ds dt \quad (9)$$

여기서, G : 매개변수 (u, v) 의 정의역

G^* : 매개변수 (s, t) 의 정의역

이때 식 (6)에 의하여 매개변수 (s, t) 의 정의역인 G^* 의 영역은 디자인 곡면 $r(u, v)$ 의 표면적이 된다.

여기에 재매개변수화 된 곡면 $r(s, t)$ 의 매개변수 곡선들이 직교하도록 조건을 덧붙일 경우 좀 더 순정 척도의 특성을 분하기 쉽게 되므로, 매개변수 곡선들이 주곡률 연결선이 되도록 재매개변수화를 한다. 따라서 $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$ 는 서로 직교하는 단위 벡터가 되며, 식 (10)과 같이 Rodrigues 공식을 사용할 수 있게 된다.

$$\frac{\partial n}{\partial s} = -k_1 \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -k_2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad (10)$$

본 논문에서는 파생곡면을 이용하여 곡면 순정 척도 3가지가 제시되었다.

표 1. 3가지 곡면 순정 척도

순정척도 번호	파생곡면	순정 효과 예측
1	$c = Kn$	flattening smoothing
2	$c = Hn$	rolling smoothing
3	$c = n$	flattening

첫번째 순정 척도의 파생곡면 $c = Kn$ 를 매개변수 s 와 t 로 미분하면 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial s} &= \frac{\partial K}{\partial s} n - K k_1 \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial K}{\partial t} n - K k_2 \frac{\partial r}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

이를 이용하여 파생곡면의 법선 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial s} \times \frac{\partial c}{\partial t} &= -K k_1 \frac{\partial K}{\partial t} \left[\frac{\partial r}{\partial s} \times n \right] - K k_2 \frac{\partial K}{\partial s} \left[n \times \frac{\partial r}{\partial t} \right] \\ &\quad + k_1 k_2 K^2 \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $\frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$ 는 서로 직교하는 단위 벡터이므로 다음과 같이 정리되어질 수 있다.

$$\left| \frac{\partial c}{\partial s} \times \frac{\partial c}{\partial t} \right| = |K| \sqrt{\left(k_1 \frac{\partial K}{\partial t} \right)^2 + \left(k_2 \frac{\partial K}{\partial s} \right)^2 + K^4} \quad (13)$$

곡면 순정시 디자인 곡면은, 식 (13)을 식 (9)에 대입하여 얻은 곡면 순정 척도를 최소화 시키는 방향으로 변화하게 된다. 따라서 디자인 곡면은 주어진 제약 조건하에서 Gaussian 곡률의 크기가 작아짐으로써 가능한 평면에 가까워지도록 변화되며, 주곡률 방향으로 Gaussian 곡률의 변화량이 작아짐으로써 부드러운 곡면이 되도록 변화될 것이다. 결국 위의 곡면 순정 척도는 디자인 곡면을 평평하게 펴는 flattening 효과와, 부드럽게 만드는 smoothing 효과를 함께 낼 것이다.

같은 방법으로 순정 척도 2의 파생곡면 $c = Hn$ 의 법선 벡터 크기는 다음과 같이 유도된다.

$$\left| \frac{\partial c}{\partial s} \times \frac{\partial c}{\partial t} \right| = |H| \sqrt{\left(k_1 \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 + \left(k_2 \frac{\partial H}{\partial s} \right)^2 + H^2 K^2} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (9)에 대입하여 얻어진 순정 척도를 최소화 할 경우 디자인 곡면은 평균 곡률이 최소화 되거나 주곡률 방향으로 평균 곡률의 변화량이 작게 되는 방향으로 변화되며, 결과적으로 위의 순정 척도는 디자인 곡면을 원주 곡면의 일부분에 접근하도록 변화시키는 rolling 효과와 smoothing 효과를 낼 것이다.

많은 기존 연구에서 곡면 순정시 사용되었던 Gaussian 곡률의 크기를 최소화하는 순정 척도의 경우, Rando와 Roulier가 제시한 파생곡면을 이용하여 곡면 순정 척도를 유도하는 방법으로도 구할 수 있었다. 순정 척도 3의 파생곡면 $c = n$ 을 이용할 경우 법선 벡터의 크기는 다음과 같이 유도된다.

$$\left| \frac{\partial c}{\partial s} \times \frac{\partial c}{\partial t} \right| = |K| \quad (15)$$

곡면 순정시 식 (15)를 식 (9)에 대입하여 얻어진 순정 척도를 최소화 할 경우 디자인 곡면은 Gaussian 곡률의 크기를 최소화 하는 방향으로 변화하게 된다. 이때 디자인 곡면에서 주곡률 방향으로 Gaussian 곡률의 변화량은 영향을 받지 않게 되므로, 전체적인 곡면의 모양은 유지하면서 곡면이 평평하게 되는 flattening 효과가 나타나게 될 것이다.

4. 비선형 계획법을 이용한 B-스플라인곡면의 순정 알고리즘

B-스플라인곡면의 순정에 사용되는 비선형 계획법은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(x) \\ & \quad x \in R^n \\ & \text{subject to } \begin{cases} c_i(x) = 0, & i = 1, \dots, k \\ c_i(x) \geq 0, & i = k+1, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 목적함수 $f(x)$ 와 제약식 $c_i(x)$ 는 비선형 함수이다. 비선형 계획법인 식 (16)의 해를 구하기 위하여 반복적인 수리적 최적화 방법이 사용된다. 각각의 단계에서 최적화 방법은 목적함수와 제약식으로 구성된 단순화된 모델을 만들게 되는데, 각 단계의 모델에서는 현재의 해가 새로운 점으로 이동됨으로써 해가 구하여지고 현재의 해는 새로운 해로 개선되어진다.

B-스플라인곡면 순정 문제를 제약식이 있는 비선형 계획법으로 적용하기 위해서는 목적함수와 제약식이 결정되어야 한다. 본 논문에서는 2절에서 유도된 3가지 곡면 순정 척도들이 목적함수로 B-스플라인곡면에서 조정점들이 움직일 수 있는 범위에 관한 제약이 제약 조건으로 사용됨으로써 디자인 곡면이 설계자가 원하지 않는 방향으로 변화하는 것을 방지할 수 있었다. 비선형 계획법의 해는 상용 툴인 GAMS/MINOS (Brooke, A. et al., 1990)를 사용하여 구하였다.

앞서 언급한 바와 같이 본 논문에서 곡면의 순정은 입력된 B-스플라인곡면의 조정점을 이동시킴으로써 순정을 행하였다. B-스플라인곡면의 조정점을 이동시키는 방법을 사용할 경우, 절점 벡터를 변경시키는 것과는 달리 B-스플라인곡면의 근본적인 모양이 변화된다. 이는 B-스플라인곡면에서 조정점은 일정 구간의 곡면을 조정점 방향으로 끌어당기는 것과 같은 역할을 하기 때문이다.

조정점 이동을 통한 B-스플라인곡면의 순정 알고리즘은 다음과 같다.

- step 1. 초기 B-스플라인곡면 $r_0 = r_{P_0, U, V}$ 를 입력받는다.
- step 2. 원하는 곡면 순정 척도를 결정한다.
- step 3. 움직일 수 있는 조정점들과 고정되어야 할 조정점들을 결정하고, 이들이 움직일 수 있는 범위를 설정한다.
- step 4. 곡면 순정 척도를 목적함수로, 이동 가능한 조정점들이 이동할 수 있는 범위를 제약식으로 놓고 비선형 계획법의 해를 구한다.
- step 5. step 4에서 얻어진 새로운 조정점의 집합 P 를 이용하여, 순정 후의 B-스플라인곡면 $r = r_{P, U, V}$ 를 모델링한다.

5. B-스플라인곡면 순정의 수행 및결과 분석

일반적으로, 부드러운 곡면의 예로 평면이나 구면, 그리고 원추곡면을 들 수 있다. 따라서 곡면이 부드러우지를 판별하는 방법으로 곡면의 모양이 위의 곡면에 가까운지를 살펴보게 된다. 그러나 시각적으로 부드러운 곡면으로 판단되더라도, 곡면 전반에 걸쳐 곡률 변화가 심하거나 불규칙할 경우 부드러운 곡면을 만들기 위하여 곡면 순정 과정이 필요하다.

본 논문에서는 예제를 통하여 비선형 계획법을 이용한 B-스플라인곡면 순정시 곡면 순정 척도가 디자인 곡면의 모양 변화에 어떠한 영향을 미치는지를 알아보았다. B-스플라인곡면의 조정점들과 u, v 방향의 절점벡터들이 입력 값으로 주어졌으며, 이를 이용하여 4절에서 제시된 알고리즘을 통하여 곡면 순정이 수행되었다.

B-스플라인곡면의 순정시에 목적함수인 파생곡면의 표면적을 구하기 위하여 초기 디자인 곡면의 매개변수 u, v 방향으로 균일한 매개변수 값을 가지는 파생곡면의 위치 $c(u_i, v_j)$ 를 찾았다. 여기서 $u_i = i/10$ 이며, $v_j = j/10$ 이다(단, $i = 0, 1, \dots, 10$ 그리고 $j = 0, 1, \dots, 10$).

파생곡면의 위치는 각각 사각 패치(rectangular patch)를 형성하게 되고, 각 사각 패치는 다시 두 개의 삼각형으로 나누어져 그 면적을 구하여 합을 구해나감으로써 전체 파생곡면의 표면적을 근사화시켰다. 곡면 순정시 입력된 조정점들은 z 좌표만이 이동 가능하도록 설정되었으며 곡면의 경계 조정점들은 고정되었다. 이동 가능한 조정점들이 이동될 수 있는 범위는 예제 1과 예제 2에서 이웃한 조정점들 간의 거리 중에서 최소 거리의 10%와 25%로 각각 설정되었다.

곡면 순정 후의 변화된 디자인 곡면은 Gaussian 곡률과 평균 곡률의 분포를 살펴봄으로써 분석되어졌다. 곡률값은 디자인 곡면의 매개변수 u, v 방향으로 균일하게 각각 30개씩 총 900개를 표본으로 추출하였으며, 매개변수와 선형 대응되는 x, y 좌표와 추출된 곡률값을 z 좌표로 가지는 점들을 설정하고, 이 점들을 지나는 부드러운 곡면을 형성시킴으로써 곡면의 곡률 분포를 살펴보았다.

<그림 1>은 예제 1의 초기 입력된 디자인 곡면의 모양을 보여주고 있다. 초기 디자인 곡면은 8×8 의 조정점들로 모델링되었으며, 경계 조정점들을 제외한 36개의 조정점들이 조정점 간의 거리차 중 최소거리의 10% 이내에서 이동 가능하도록 설정되었다. <그림 2>와 <그림 3>은 예제 1의 초기 디자인 곡면의 Gaussian 곡률과 평균 곡률을 보여주고 있다. <그림 2>와 <그림 3>에서 초기 디자인 곡면은 Gaussian 곡률과 평균 곡률의 변화가 심하게 일어남을 알 수 있다.

<그림 4>는 예제 1을 곡면 순정 척도 1을 이용하여 순정한 디자인 곡면의 모양을 보여주고 있다. 앞서 순정 척도를 유도하는 과정에서도 살펴보았듯이, <그림 4>의 우측면도(아래쪽)를 살펴보았을 때 순정 후의 디자인 곡면은 중앙 부분에 나타난

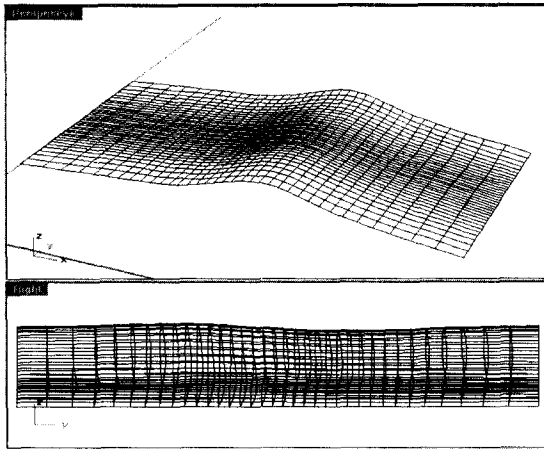


그림 1. 예제 1의 초기 디자인 곡면.

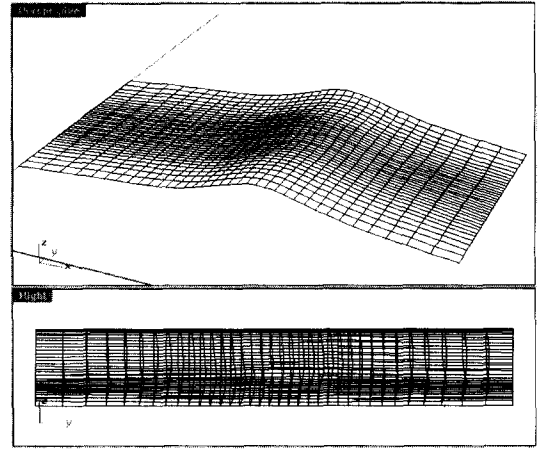


그림 4. 예제 1을 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 모양.

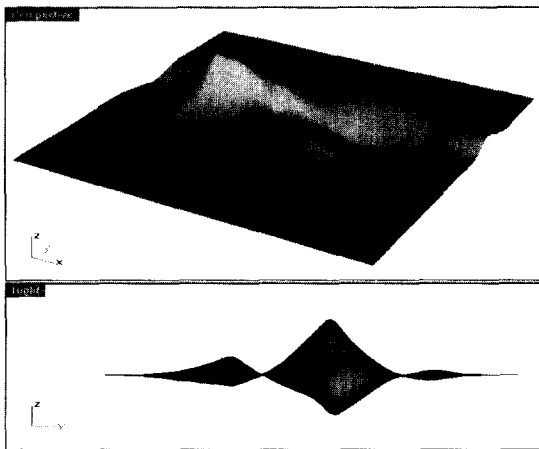


그림 2. 예제 1의 초기 디자인 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

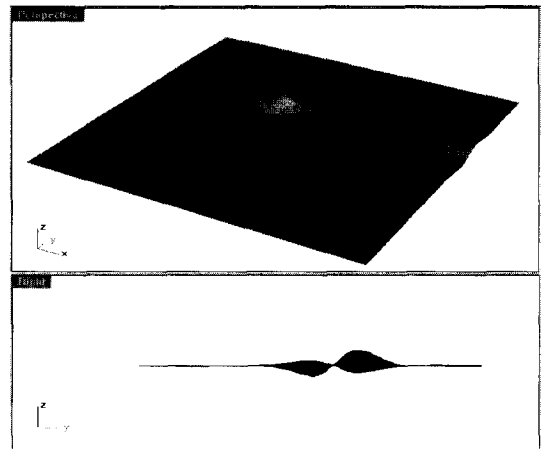


그림 5. 예제 1을 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

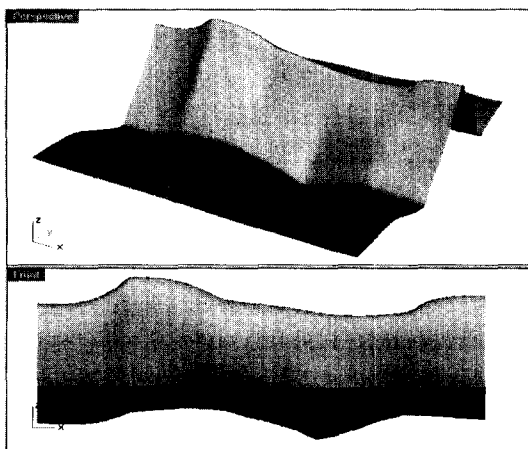


그림 3. 예제 1의 초기 디자인 곡면의 평균 곡률 분포.

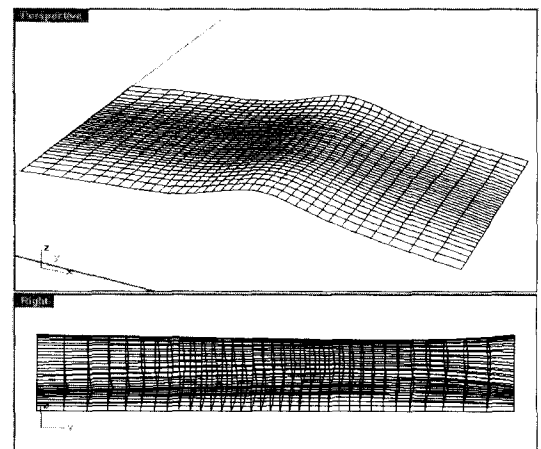


그림 6. 예제 1을 순정 척도 2를 사용하여 순정한 곡면의 모양.

굴곡이 평평하게 퍼지는 flattening 효과가 나타났음을 알 수 있다. 또한 <그림 5>의 Gaussian 곡률의 분포에서, 곡률의 변화가 크게 줄어 전체적으로 0에 가까워지는 flattening 효과와 곡률의 변화가 부드러워지는 smoothing 효과가 나타났음을 알 수

있다.

<그림 6>은 예제 1을 곡면 순정 척도 2를 이용하여 순정한

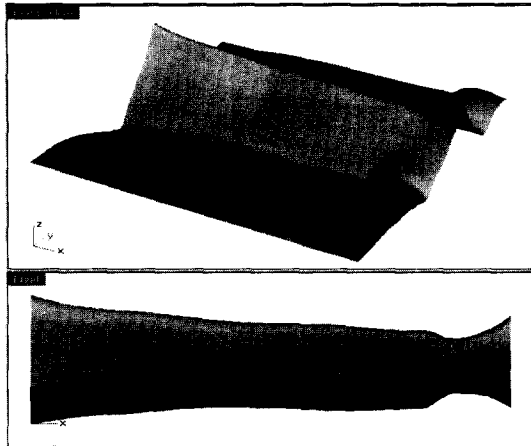


그림 7. 예제 1을 순정 척도 2를 사용하여 순정한 곡면의 평균 곡률 분포.

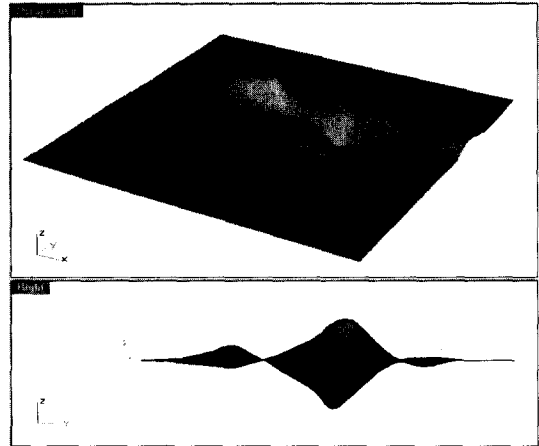


그림 9. 예제 1을 순정 척도 3을 사용하여 순정한 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

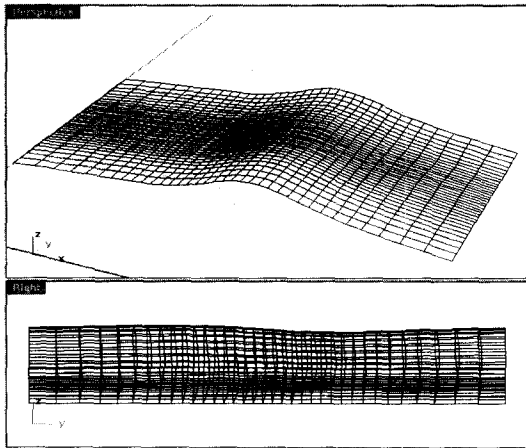


그림 8. 예제 1을 순정 척도 3을 사용하여 순정한 곡면의 모양.

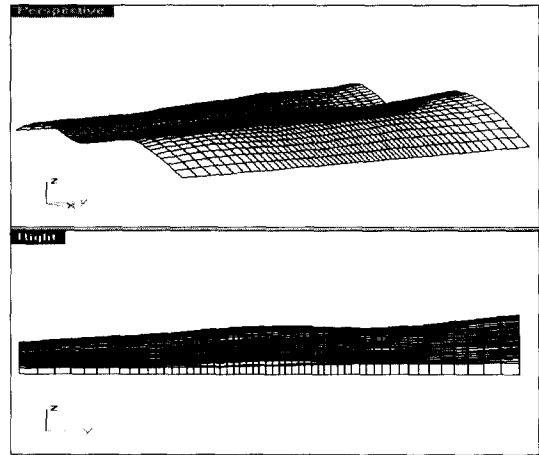


그림 10. 예제 2의 초기 디자인 곡면.

디자인 곡면의 모양을 보여주고 있다. 순정 후의 디자인 곡면은 <그림 7>에서 알 수 있듯이 평균 곡률의 크기가 줄었으며 변화도 부드러워지는 smoothing 효과가 나타났다. 또한 <그림 4>와 <그림 6>의 아래쪽 그림을 비교하였을 때, <그림 4>에서는 곡면이 평평하게 퍼지는 모양으로 변하였지만 <그림 6>에서는 원기둥의 일부와 같은 모양으로 곡면이 변화하는 rolling 효과가 나타났음을 알 수 있다.

<그림 8>은 예제 1을 곡면 순정 척도 3을 이용하여 순정한 디자인 곡면의 모양을 보여주고 있다. 곡면 순정에 사용되어진 순정 척도는 기존의 많은 곡면 순정 연구에서 사용되어진 척도임에도 불구하고 순정 후 디자인 곡면의 모양 변화가 크게 눈에 띄지 않았으며, <그림 9>에서 알 수 있듯이 전반적인 Gaussian 곡률의 크기는 초기 디자인 곡면보다 줄어들기는 하였으나 곡면 순정 척도 1을 이용한 곡면 순정 보다 순정 효과가 덜하였음을 알 수 있었다. 또한 단순히 Gaussian 곡률의 크기만을 줄임으로써 주곡률 방향으로의 곡률의 변화를 부드럽

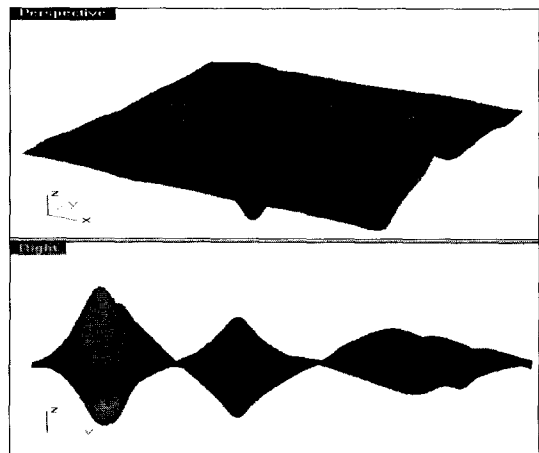


그림 11. 예제 2의 초기 디자인 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

게 하지 못하는 결과도 나타났다.

<그림 10>과 <그림 11>은 예제 2의 초기 입력된 디자인 곡면의 모양과 Gaussian 곡률 분포를 보여주고 있다. 초기 디자

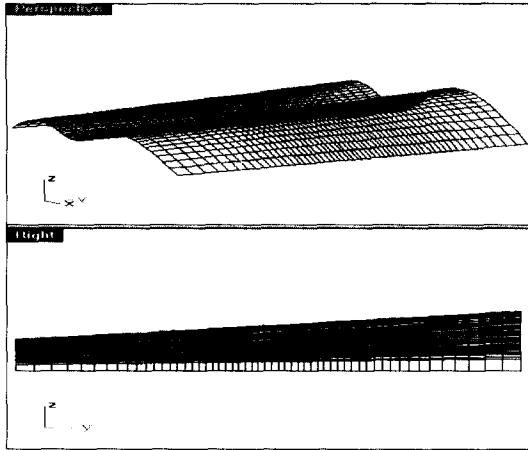


그림 12. 예제 2를 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 모양.

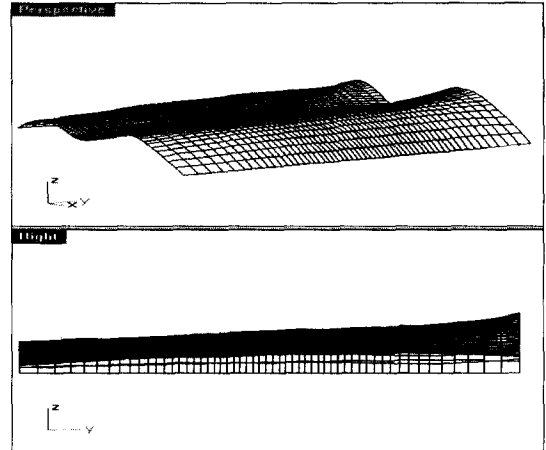


그림 14. 예제 2를 순정 척도 3을 사용하여 순정한 곡면의 모양.

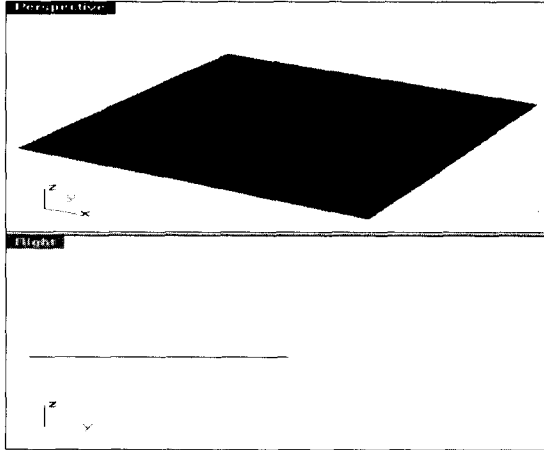


그림 13. 예제 2를 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

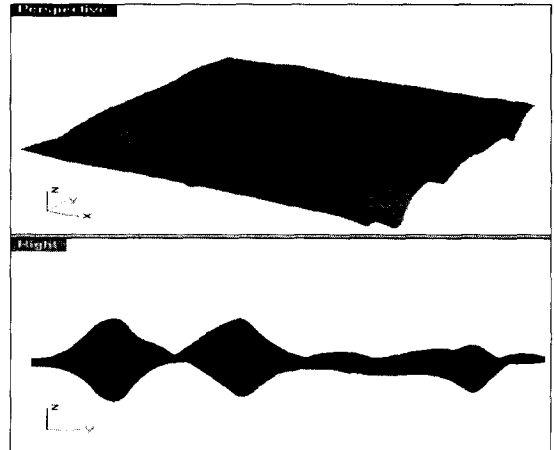


그림 15. 예제 2를 순정 척도 3을 사용하여 순정한 곡면의 Gaussian 곡률 분포.

인 곡면은 예제 1과 같이 8×8 의 조정점들로 모델링 되었으며, 경계 조정점들을 제외한 36개의 조정점들이 조정점들 간의 거리차 중 최소 거리의 25% 범위 내에서 이동 가능하도록 설정되었다.

<그림 12>는 예제 2를 곡면 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 모양을 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 순정후의 곡면은 초기 디자인 곡면에 존재하던 곡면 중간 부분의 굴곡이 제거된 반지름이 단조 증가하는 원기둥 두 개가 부드럽게 연결된 모양으로 나타났다. 이는 <그림 13>의 Gaussian 곡률 분포를 살펴 보면 더욱 자세히 알 수 있는데, 초기에 변화가 심하던 Gaussian 곡률 분포가 전역적으로 0에 가깝게 변화하였으며 곡률의 변화도 부드러워졌음을 알 수 있다.

<그림 14>와 <그림 15>는 예제 2를 곡면 순정 척도 3을 사용하여 순정한 곡면의 모양과 Gaussian 곡률 분포를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 곡면 순정 척도 3은 예제 1에서와 같이 Gaussian 곡률의 크기는 줄었으나 곡률의 변화를 부드럽

게 만들지는 못하였다.

곡면 순정시 비선형 계획법을 사용하지 않을 경우 일반적으로 지역적 순정 과정을 반복하는 알고리즘을 사용하여 곡면 순정을 수행하게 된다. <그림 16>과 <그림 17>은 예제 2를 Eck와 Jaspers가 제시한 지역적 순정 과정을 반복하는 알고리즘과 본 논문에서 사용되어진 순정 척도 1을 사용하여 순정한 곡면의 모양과 Gaussian 곡률 분포를 보여주고 있다(Eck and Jaspers, 1994). 곡면의 모양은 지역적 순정을 반복함으로써 <그림 12>와는 달리 변경 가능한 곡면의 중앙 부분에서는 flattening 효과가 나타났으나 오히려 변경 불가능한 곡면의 가장자리 부분과의 연결 부분에서는 부드러워지지 않은 결과가 나타났다. 이는 <그림 17>의 Gaussian 곡률 분포를 살펴 보아도 알 수 있는데, 곡면 중앙 부분의 순정으로 인하여 오히려 가장자리 쪽에서의 곡률은 초기 디자인 곡면보다 나빠졌음을 알 수 있다. 이는 지역적 순정 과정에서 각각의 순정 단계에서 전체적인 곡면의 품질을 개선하는 방향으로 곡면 순정이 이루어지지 않고, 특

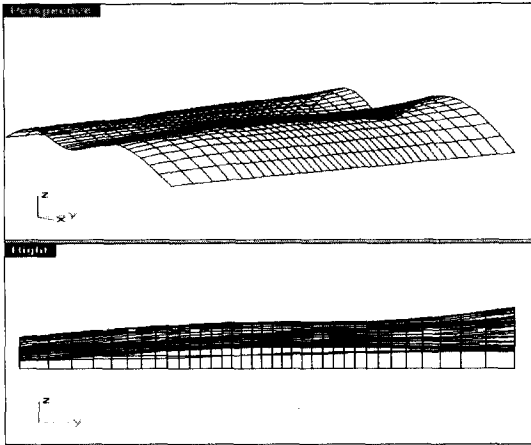


그림 16. 예제 2를 지역적 순정 과정과 순정 척도 1을 사용하여 순정한 결과 곡면

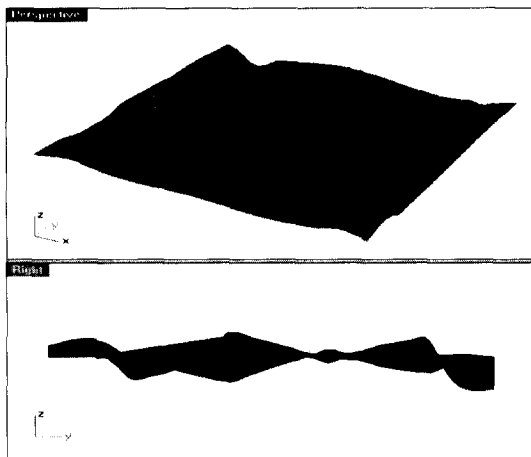


그림 17. <그림 16> 곡면의 Gaussian 곡률 분포

정 부분에서의 곡률값을 개선하는 방향으로 곡면이 변화되었기 때문이다. 결국 이러한 지역적 순정 과정을 반복하는 알고리즘의 경우 순정하고자 하는 디자인 곡면의 규모가 커질 경우에도 구하고자 하는 해를 구하는 문제가 일정한 크기로 정의되어 전역적 순정보다 쉽게 순정을 수행할 수 있는 장점이 있으나, 설계자가 만족할만한 곡면 순정 결과를 보여주지는 못한다.

앞의 두 예제로부터 나온 결과 그림에서 알 수 있듯이 예제 2가 예제 1보다 각각의 순정 척도를 사용하여 순정을 행하였을 때 곡면의 모양을 변화시키는 순정 효과가 더욱 크게 나타났음을 알 수 있는데, 이는 곡면의 모양을 변화시키는 조정점들이 움직일 수 있는 범위가 예제 2에서 커졌기 때문으로 분석되었다. 일반적으로 조정점들이 움직일 수 있는 범위가 커질수록 곡면 순정 효과가 크게 나타나지만, 조정점들이 움직일 수 있는 범위를 너무 크게 설정할 경우 순정 후 곡면의 모양이 설계자가 원하지 않는 방향으로 변화할 수 있기 때문에 설계

자의 의도와 상황에 맞는 범위의 설정이 요구되어 진다.

또한 순정 척도 1과 2에 비하여 순정 척도 3을 이용하여 곡면을 순정하였을 경우, 순정 결과가 만족스럽지 못하게 나타났다. 이는 순정 척도 1과 2의 경우, 곡면 순정을 수행하는 과정에서 비선형 계획법의 목적함수로 사용되어진 순정 척도에 Gaussian 곡률과 평균 곡률의 변화량을 작게 만드는 부분이 추가됨으로써 곡면이 변화되어야 하는 방향을 명확하게 제시하였기 때문인 것으로 분석되었다.

6. 결론 및 추후 연구과제

본 논문에서는 비선형 계획법을 이용하여 B-스플라인곡면의 순정을 수행하였다. 비선형 계획법의 목적함수로는 순정하고자 하는 디자인 곡면의 기하학적 불변요소로 표현되는 파생곡면을 이용하여 유도한 곡면 순정 척도가 사용되었으며, 제약식으로는 입력된 B-스플라인곡면의 이동가능한 조정점들이 움직일 수 있는 범위에 제한을 두는 것이 사용되었다. 곡면 순정의 결과는 순정 후 나온 곡면의 모양과 Gaussian 곡률과 평균 곡률의 분포를 살펴봄으로써 분석되었다.

곡면 순정은 곡면 모델링시 측정점에 포함된 오차나 편향성을 제거하여 설계자가 원하는 곡면을 만들기 위하여 반드시 필요한 과정이다. 그러나 기존의 곡면 순정 방법은 설계자가 곡면의 순정과정에 반복적으로 참여함으로써 매우 비효율적으로 이루어져 왔다. 본 논문에서는 비선형 계획법을 이용한 B-스플라인곡면의 순정을 행하는 알고리즘을 제시하고, 제시된 알고리즘을 실제 예제를 통하여 곡면 순정에 적용, 분석함으로써 설계자가 손쉽게 곡면 순정을 수행할 수 있도록 하였다. 본 논문의 곡면 순정에 사용되어진 3개의 곡면 순정 척도 중 flattening 효과와 rolling 효과와 함께 smoothing 효과를 같이 내는 순정 척도의 경우 만족할만한 수준의 곡면 순정이 이루어졌으나, 기존 논문에서 많이 사용되어졌던 flattening 효과만 내는 순정 척도의 경우 충분한 곡면 순정 결과를 내지 못함을 알 수 있었다.

본 논문에서 사용되어진 곡면 순정 척도는 설계자가 원하는 B-스플라인곡면을 모델링하기 위한 순정 과정에 도움을 줄 수 있을 것으로 판단되나, 다양한 제품 환경과 설계자의 요구사항을 고려하였을 때 좀 더 세분화되고 구체적인 곡면 순정 척도의 유도와 검증이 필요할 것이다. 또한 본 논문에서는 초기 디자인 곡면이 순정 과정을 통하여 얼마나 변화하였는지를 어떻게 측정할 것인가에 대한 문제와 비선형 계획법에 이를 적용시킬 경우 문제의 복잡도가 커지는 문제 때문에 실제 곡면이 변할 수 있는 범위에 제한을 두는 제약 조건을 사용하지 못하였다. 따라서 추후 연구에서는 이러한 제약조건을 곡면 순정에 어떻게 적용시킬 것인가에 대한 연구가 수행되어야 할 것이다.

참고문헌

- Brooke, A., Kendrick, D. and Meeraus, A. (1990), *GAMS: A User's Guide*, The Scientific Press.
- Eck, M. and Jaspert, R. (1994), Automatic Fairing of Point Sets, *Designing Fair Curves and Surfaces*, SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics), 45-60.
- Farin, G. (1992), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 389-405.
- Ferguson, D. R., Frank, P. D. and Jones, A. K. (1988), Surface Shape Control Using Constrained Optimization on the B-spline Representation, *Computer Aided Geometric Design*, **5**(2), 87-103.
- Hagen, H. and Schulze, G. (1987), Automatic Smoothing with Geometric Surface Patches, *Computer Aided Geometric Design*, **4**(3), 231-235.
- Hahmann, S. and Konz, S. (1998), Knot-removal Surface Fairing Using Search Strategies, *Computer-Aided Design*, **30**(2), 131-138.
- Kaufmann, E. and Klass, R. (1988), Smoothing Surfaces Using Reflection Lines for Families of Splines, *Computer-Aided Design*, **20**(6), 341-346.
- Lott, N. J. and Pullin, D. I. (1988), Method for fairing B-spline Surfaces, *Computer-Aided Design*, **20**(10), 597-604.
- Piegl, L. and Tiller, W. (1995), *The NURBS Book*, springer, 81-116.
- Rando, T. and Roulier, J. A. (1991), Designing Faired Parametric Surfaces, *Computer-Aided Design*, **23**(7), 492-497.
- Rando, T. and Roulier, J. A. (1994), Measures of Fairness for Curves and Surfaces, *Designing Fair Curves and Surfaces*, SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics), 75-122.