論文2001-38SC-5-1

시간-주파수 지역화를 이용한 방사 기준 함수 구조의 최적 설계

(Optimal Design of Radial Basis Function Network Using Time-Frequency Localization)

金 鏞 宅 *, 金 成 柱 *, 徐 在 龍 **, 全 洪 兌 *

(Yong-Taek Kim, Seong-Joo Kim, Jae-Yong Seo, and Hong-Tae Jeon)

요 약

본 논문에서는 신경망에 비해 보다 단순화되고 빠르게 수렴하는 특성을 보이는 방사 기준 함수 구조를 초기에 설계하기 위한 방법을 제안한다. 이를 위해 시간-주파수 지역화를 이용한 분석 기법을 사용하였고 방사 기준 함수 구조를 초기에 주어진 문제에 적합한 최적 상태로 결정하였다. 시간-주파수 평면에서 지역화 특성이 대상 함수를 근사할 수 있는 특성을 지닌 방사 기준 함수를 사용하여 은닉층을 구성할 경우, 근사 능력을 지닌 초기 구조를 결정함에 있어서 장점을 지닌다.

Abstract

In this paper, we propose the initial optimized structure of the Radial Basis Function Network(RBFN) which is more simple in the part of the structure and converges more faster than Neural Network. For this, we use the analysis method using time-frequency localization and we can decide the initial structure of the RBFN suitable for the given problem. When we compose the hidden nodes with the radial basis functions whose localization are similar with the target function in the plane of the time and frequency, we can make a good decision of the initial structure having an ability of approximation.

Ⅰ. 서 론

함수의 근사화 측면에서 살펴보면 다층 신경망은 학습 방법인 역전파 학습알고리즘을 이용하여 전역적인 매핑 구조에 근거한 근사화를 수행하지만, 방사 기준함수 회로망(Radial Basis Function Network; RBFN)은 지역적인 매핑 구조에 근거한 지역적인 근사화를 수행한다.[1,2] 이러한 지역적인 매핑 방법은 학습속도가 빠르기 때문에 실시간 시스템의 구현에 적합하며, 단일 작업을 학습하기 때문에 작은 학습 데이터가 요구되는 장점이 있다.

RBFN은 신경 회로망에 비해 보다 간단한 구조이기 때문에 수렴 속도 측면에서 다층 전방향 신경 회로망(multilayer feed-forward neural network)보다 훨씬 빠른 성능을 보인다.[3,4]

함수 근사의 측면에서 볼 때, RBFN은 지역적 특성을 갖는 기저 함수를 사용하여 함수를 근사화하는 형태이다. 이런 기저 함수의 지역적인 특성으로 인하여 RBFN은 지역적 변화와 불연속을 갖는 함수를 학습하는 데 더욱 적합하다. 그러나 RBFN은 일반적으로 기저 함수들이 직교하지 않기 때문에 전체 회로망을 구성하는 과정에서 필요 이상의 기저 함수들을 사용하게

* 正會員, 中央大學校 電子電氣工學部
(School of Electrical and Electronic Eng., Chung-Ang University)
** 正會員, 韓國技術敎育大學校
(Korea University of Technology and Education)

※ 본 연구는 과학기술부의 뇌과학연구 프로그램의 지원하에 수행되었습니다.
接受日字:2001年1月17日, 수정완료일:2001年8月13日

되고 이것은 곧 효율적이고 고유한 망 구성이 이루어지지 않을 수 있음을 의미한다.

이에 본 논문에서는 이러한 문제를 극복하기 위해 시간-주파수 분석(time-frequency analysis) 기법을 소개하고, 시간-주파수 영역의 지역화에 의한 분석 기법을 이용하여 RBFN을 효율적으로 구성할 수 있는 최적 구조 설계 알고리즘을 제안한다.

Ⅱ. 방사 기준 함수 구조

RBFN은 일반적인 전방향 신경 회로망과 유사한 구조를 지니고 있으나 은닉층의 노드를 구성하는 과정에서 은닉층의 활성 함수로 방사 기준 함수를 사용하여 구성한 구조이다. 또한 입력층과 은닉층 사이의 가중치를 고정하여 인공 신경 회로망에 비해 구조가 간단하고 학습하는 시간을 줄임으로써 보다 효율적인 성능을 보인다.

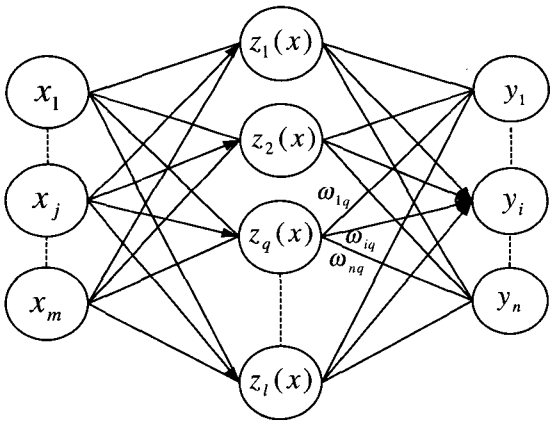

그림 1. 방사 기준 함수 회로망
Fig. 1. Radial Basis Function Network.

RBFN 출력은 은닉층 가중치를 고려한 노드 출력합으로 표현된다. RBFN의 출력식은

$$y_i = a_i\left(\sum_{q=1}^{l} w_{iq} z_q + \theta_i\right) \tag{1}$$

이며 여기서 $a_i(\cdot)$는 활성 함수의 출력이며 θ_i는 임계값(threshold value)이다. 일반적으로, $a_i(\cdot)$는 (출력 노드가 선형인 경우) 전등 함수(identify function)이며 $\theta_i = 0$이다.

Ⅲ. 시간-주파수 지역화

시간-주파수 영역 지역화 내용의 설명은 시간 범위 $[-T, T]$에서 제한되고 주파수 범위 $[\Omega_0, \Omega_1] \cup [-\Omega_0, -\Omega_1]$에서 제한된 함수들을 이용하기로 한다. 시간 또는 주파수 영역에서 함수가 지역화되는 정도는 함수 절대치의 근을 제곱 형태로 취하는 2차 모멘트 값(분산)을 이용하여 측정된다. 그렇지만, 시간-주파수 혼합 영역에서 가능한 지역화 영역의 확장에는 한계가 존재하며, 이는 하이젠베르그(Heisenberg)의 불확정성에 의해 설명된다. 하이젠베르그의 불확정성은 분산값 $|f|^2$와 $|\hat{f}|^2$는 동시에 비례적으로 작아질 수 없으며, 두 값의 내적은 영점으로부터 제한되어 있다. 예를 들면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.[5]

함수 $f \in L^2(R)$에 대해,

$$\int_R x^2 |f(x)|^2 dx \times \int_R \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{4} \|f\|^4 \tag{2}$$

이며, 식 (2)는 가우시안 함수의 상수 배한 함수에 의해 등호가 성립된다. 그러므로 가우시안 함수는 시간-주파수 복합 영역에서 최적의 상태로 구성되어 있음을 알 수 있다.

$$|\hat{f}(-\omega)| = |\hat{f}(\omega)| \tag{3}$$

식 (3)과 같이 같은 절대치를 지닌 함수 f의 지역화 중심점을 다음과 같이 정의한다.

정의 3.1 주어진 함수 $f \in L^2(R)$를 가정한다. 이 때 주어진 함수의 퓨리에 변환은 $\hat{f}$로 표시하며, 식 (3)의 조건을 만족한다.

(1) 함수 f의 지역화 중심점, $x_c(f)$는

$$x_c(f) = \frac{1}{\|f\|^2} \int_R x |f(x)|^2 dx \tag{4}$$

와 같이 정의된다.

(2) $|\hat{f}|^2$, 즉 함수 f의 주파수 지역화 중심점, $\omega_c(|\hat{f}|^2)$는

$$\omega_c(\hat{f}) = \frac{1}{\pi \|f\|^2} \int_0^\infty \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \tag{5}$$

와 같이 정의된다.

Ⅳ. 방사 기준 함수 구조의 최적 설계

1. 시간-주파수 분석

그림 2에서 시간, 주파수 한정의 중심과 폭은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$t_c(f) = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} t\,|f(t)|^2 dt \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_c(f))^2\,|f(t)|^2 dt \quad (6)$$

$$\omega_c(\hat{f}) = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{0}^{\infty} \omega\,|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (7)$$

$$\sigma_\omega^{\,2} = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{0}^{\infty} (\omega-\omega_c(\hat{f}))^2\,|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (8)$$

식 (5)~(8)에서 중심과 폭이 정해지면 중심과 폭을 이용하여 시간-주파수 원자를 그림 2와 같은 모습으로 구성할 수 있다.

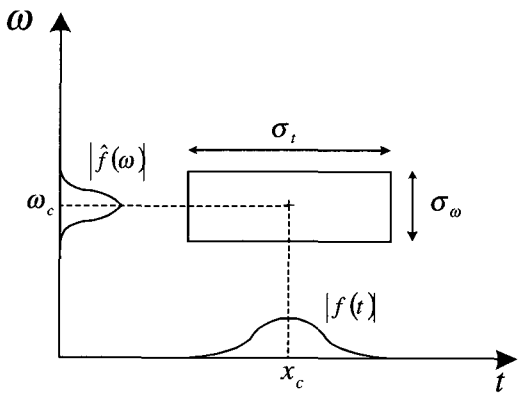

그림 2. 시간-주파수 원자
Fig. 2. Time-frequency atom.

이는 함수의 특성을 분석하는 기법으로 본 논문에서는 근사하고자 하는 대상 함수를 시간-주파수 분석을 한 후, 동일 평면에서 RBFN을 구성할 수 있는 기저 함수의 변수를 적절히 조절하여 대상 함수의 영역을 포함할 수 있도록 구성한다. 이 때, 기저 함수는 RBFN의 은닉층을 구성하며 이를 기반으로 은닉층 노드 개수를 결정한다.

2. 구조설계

본 절에서는 시간-주파수 분석을 통해 대상 함수를 분석하고 이를 포함하는 영역에 대해 수용 공간의 기저 함수(활성 함수)를 결정하여 구조를 최적화하는 과정을 소개한다.

시간-주파수 분석은 다음과 같은 과정으로 이루어진다.

[단계 1] RBFN을 기저 함수를 이용하여 구성하고 기저 함수를 결정하는 중심점, 폭을 결정하기 위해 입출력 데이터의 시간-주파수 분석을 수행한다. 입출력 데이터의 시간-주파수 윈도우 Q_f는 데이터의 시간과 퓨리에 변환을 이용하면 다음 식 (9)과 같이 얻을 수 있다.

$$Q_f = [x_{\min}, x_{\max}]\times[\omega_{\min}, \omega_{\max}] \quad (9)$$

여기서 $x_{\min}$과 $x_{\max}$는 함수나 시스템의 시간축 상의 한정된 영역의 최소, 최대 값을 의미하고, $\omega_{\min}$과 $\omega_{\max}$는 주파수축 상의 한정된 영역의 최소, 최대 값을 나타낸다.

[단계 2] 식 (5)-(8)을 이용하여 일반적인 가우시안 함수에 대한 시간, 주파수축 상의 중심점을 분석한다.

[단계 3] 분석된 대상 함수가 속해 있는 영역을 포함할 수 있도록 RBFN의 은닉층 노드에 사용될 활성 함수(본 논문에서는 일반적인 가우시안 RBF를 사용한다)의 변수를 단계 2에서 분석된 결과를 참고하여 설정한다. 이 과정에서 대상 함수와 RBF를 같은 평면 상에서 시간-주파수 분석하여 비교해 보면, RBF의 변수를 설정할 수 있으며 이 때 설정된 RBF 변수 쌍은 곧 하나의 RBF를 의미한다. 결국 이 과정에서 전체 RBFN에 사용될 은닉층의 노드 수가 결정된다. 이로써 시간-주파수 분석에 의한 RBFN의 초기 구조가 결정된다.

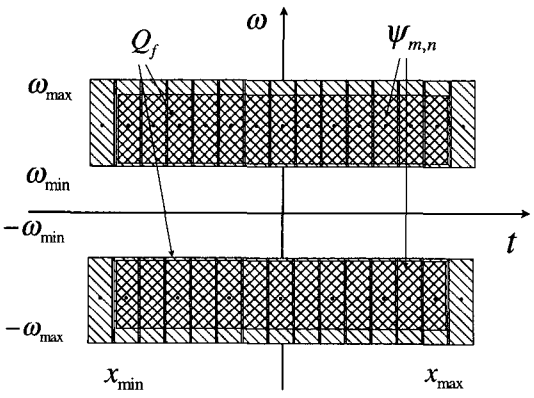

그림 3. 시간-주파수 표현
Fig. 3. Time-frequency representation.

[단계 4] 결정된 RBF를 이용하여 구성된 RBFN을 일반적인 다층 전방향 신경 회로망, 폭을 고정한 후 일정한 간격으로 중심점을 이동하여 구성한 일반적인 RBFN과 비교하여 비선형 함수를 근사하는 모의 실험을 진행한다.

V. 모의 실험

1. 함수에 대한 근사화 실험

모의실험에서는 비주기적인 근사화 대상 함수를 사용했다. 근사화 대상 함수는 식 (10)과 같으며 시간축상에서 [0,1]을 고려했다.

$$f(t) = t\sin(t)\cos(5t)\sin(10t)\cos(30t)\sin(50t) \quad (10)$$

시간-주파수 분석 [단계 1]의 과정을 통해 근사화 대상 함수의 시간-주파수 평면의 분포를 구한다. 먼저 근사화 대상 함수를 퓨리에 변환을 통해 주파수 상의 분포를 분석한다. 본 논문에서는 양의 주파수 영역 만을 고려한다. 근사화 대상 함수의 유효 주파수 분포는 정규화된 진폭 (amplitude)의 63%로 설정했다.

근사 대상 함수와 RBF를 동시에 분석한 모습은 다음 그림 4와 같다. 이를 기반으로 대상 함수를 근사할 수 있는 방사 기준 함수를 선택할 수 있다.

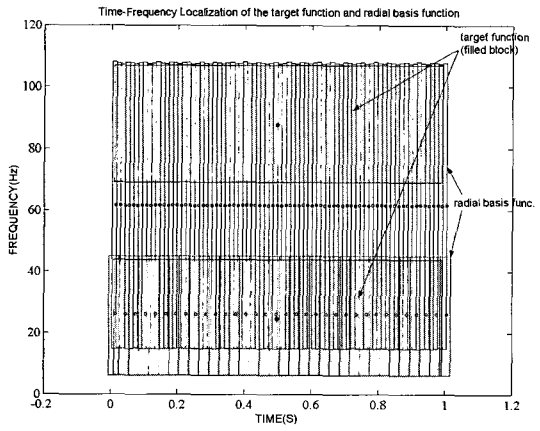

그림 4. 시간-주파수 지역화
Fig. 4. Time-Frequency Localization.

그림 4에서 보여지는 것과 같이 근사 대상 영역을 포괄할 수 있는 RBF는 전체 111개가 필요하며 각각의 폭은 0.013, 0.031이며 중심점을 각각 0.013, 0.03씩 이동하여 RBFN의 은닉층을 구성한다.

위의 단계를 통해 구성된 RBFN을 이용하여 근사 대상 함수의 근사화 문제에 적용하여 모의실험을 수행한다.

RBFN의 초기 구조는 본 논문에서 제안한 방법을 통해 구성하였고, 은닉층과 출력층 사이의 가중치는 임의로 초기화하였다. 또한, 가중치의 갱신은 일반적으로 사용되는 역전파 알고리즘을 이용하여 수행하였다.

다음에 근사 대상 함수를 근사한 결과를 보인다.

근사 대상 함수에 대해 총 111개의 RBF를 사용하여 근사화 한 결과이다.

학습률(η) : 0.1, 역전파 학습 iteration : 2000, Sampling time : 0.01

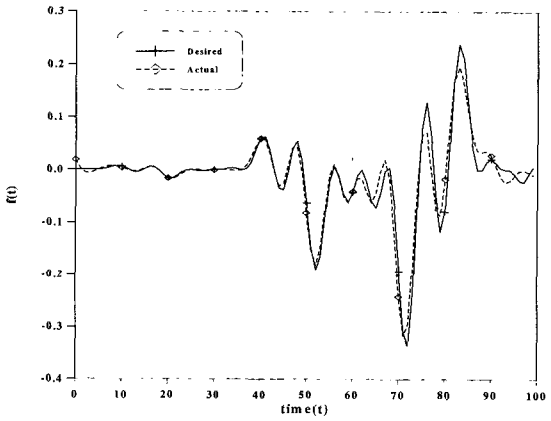

그림 5. 제안한 RBFN에 의한 근사 결과
Fig. 5. Result of the Proposed RBFN.

표 1. 시간-주파수 지역화에 의한 RBFN의 구성
Table 1. The Parameters of the RBFN based on Time-Frequency Localization.

반경	중심점 이동 간격	개수
0.013	0.013	77
0.031	0.03	34

일정한 간격으로 배열한 방사 기준 함수에 의해 구성된 회로망으로 근사한 결과이다.

학습률(η) : 0.1, 역전파 학습 iteration : 2000, Sampling time : 0.01

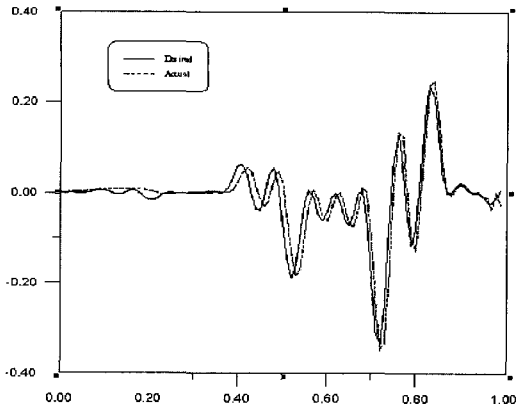

그림 6. 균등 배열 RBFN으로 근사한 결과
Fig. 6. Result of the Regular RBFN.

표 2. RBFN의 구성
Table 2. The Parameters of the RBFN.

반경	중심점 이동 간격	개수
0.5	0.01	100

다음은 다층 전방향 신경 회로망을 이용하여 근사한 결과이다.

학습률(η) : 0.1, 역전파 학습 iteration : 2000, Sampling time : 0.01

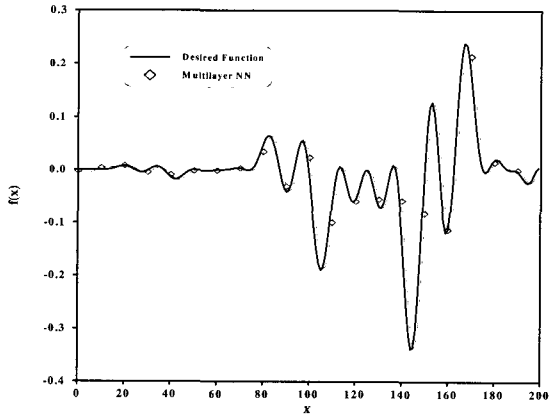

그림 7. 다층 신경 회로망 결과
Fig. 7. Result of the MNN.

모의 실험의 결과를 분석해 보면, 본 논문에서 제안한 방법에 의해 구성된 RBFN의 수행 결과에서 RMSE 값이 다른 비교 대상(균등 배열 RBFN, 다층 전방향 신경 회로망)에 비해 적은 값을 보여줌으로써 근사 대상 함수에 대한 근사화가 효율적으로 이루어졌음을 보여준다. 망 크기에 있어서는 다층 전방향 신경 회로망에 비해서는 작지만, 균등 배열 RBFN에 대해서는 약간 크다는 사실을 알 수 있다. 그렇지만, 제안한 RBFN의 RMSE값이 균등 배열 RBFN에 비해 월등히 작다. 중요한 비교 지점은 균등 배열 RBFN은 초기에 임의로 은닉층 노드수를 결정해야 하지만 제안한 RBFN은 초기에 대상 문제를 분석하여 결정할 수 있으므로 대상 문제가 변화하는 경우에 균등 배열 RBFN에 비해 우수한 성능을 보일 수 있다는 점으로 볼 때, 전반적으로 본 논문에서 제안한 RBFN은 균등 배열 RBFN, 다층 전방향 신경 회로망에 비해 우수한 성능을 나타냄을 확인하였다.

표 3. 결과비교
Table 3. Comparison of Results.

	다층 전방향 신경 회로망	균등 배열 RBFN	제안한 RBFN
최소 RMSE	0.038	0.042	0.031
# of nodes	128	100	111

VI. 결 론

본 논문에서는 RBFN의 초기 구조 결정 과정에서 대상 함수의 시간-주파수 특성을 분석한 후 이와 동일한 시간-주파수 분석을 보이는 기저 함수를 설정하는 방법으로 RBFN의 초기 구조를 결정한다. 제안한 시간-주파수 분석은 과다 기저 함수 사용을 극복하고 초기에 은닉층의 개수와 활성함수의 변수를 대상 문제에 적합하게 결정함으로써 RBFN의 구조를 초기에 최적 설계할 수 있는 장점이 있다. 제안한 RBFN의 최적 구조 설계 방법의 우수성을 검증하기 위해 동일한 반경의 기저 함수를 선택하여 기저 함수의 중심을 일정하게 나열하여 구성하는 방법과 모의 실험 수행을 통하여 수행 결과를 비교한 경우 제안한 최적 구조 설계 방법의 수행 결과가 우수함을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Chen, S., C. F. N. Cowan, and P. M. Grant., "Orthogonal least squares learning algorithm

for1 radial basis function networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.2, No.2, pp.302-309, Mar. 1991.

[2] V. T. Sunil Elanayar and Y. C. Shin, "Radial Basis Function Neural Network for Approximation and Estimation of Nonlinear Stochastic Dynamic Systems," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 5, No. 4,pp. 594-603, Jul. 1994.

[3] Xiao D. Ji and Babajide O. Familoni, "A Diagonal Recurrent Neural Network-Based Hybrid Direct Adaptive SPSA Control System," *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 44, No. 7, pp.1469-1473, July 1999.

[4] A. Karakasoglu, S.I. Sudharsanan, and M. K. Sundareshan, "Identification and decentralized adaptive control using dynamic neural networks with application to robotic manipulators," *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 4, No. 6, pp. 919-930, November 1999.

[5] H. Dym and H. P. McKean., *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, San Diego, 1972.

[6] Mark J. L. Orr, *Introduction to Radial Basis Function Networks*, Center for Cognitive Science, Scotland, 1996.

저 자 소 개

金 鏞 宅(正會員)

1967年 2月 23日生. 1992년 2월 중앙대학교 전자공학과 졸업(학사). 1994년 8월 중앙대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1996년 9월~현재 : 중앙대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. 주관심분야 : 신경망, 로보틱스, 퍼지 등임

金 成 柱(正會員)

1971年 12月 12日生. 1999년 2월 중앙대학교 전자공학사. 2001년 2월 중앙대학교 전자공석사. 2001년 3월~현재 : 중앙대학교 전자전기공학부 박사과정 재학중. 주관심분야 : 웨이블렛, 모듈라네트워크, 진화연산 등임

徐 在 龍(正會員)

1969年 7月 21日生. 1996년 2월 중앙대학교 전자공학과 졸업(학사). 1998년 2월 중앙대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 2001년 9월 중앙대학교 대학원 전자공학과 졸업예정(박사). 주관심분야 : 퍼지, 유전알고리즘, 신경망, FNN 등임

全 洪 兌(正會員)

현재 : 중앙대학교 전자전기공학부 교수