

論文2001-38SC-4-2

반복 학습 제어의 수렴 특성에 관한 연구

(A Study on Convergence Property of Iterative Learning Control)

朴 洸 賢 * , 卞 增 男 **

(Kwang-Hyun Park and Z. Zenn Bien)

요 약

본 논문에서는 반복 학습 제어의 수렴 특성에 대해 다룬다. 우선, 기존의 λ -노름을 사용하여 반복 학습 법칙의 수렴성을 증명한 것과는 달리 상한노름(sup-norm)을 사용한 수렴성 증명 방법을 보인다. 또한, 구간화된 학습 방법을 사용한 반복 학습 법칙을 제안하고, 임의의 시간구간에 대해 상한노름 관점에서 출력 오차의 단조감소적 수렴 특성을 얻을 수 있음을 보인다. 마지막으로, 제안한 구간화된 학습 방법에서의 나누어진 시간 구간이 학습 이득값에 의해 영향을 받는다는 것을 보이고, 적절한 학습 이득값을 선택함에 따라 학습 속도가 증가함을 보인다. 제안한 반복 학습 법칙의 유효성을 보이기 위하여 두 가지 수치 예를 보인다.

Abstract

In this paper, we study the convergence property of iterative learning control (ILC). First, we present a new method to prove the convergence of ILC using sup-norm. Then, we propose a new type of ILC algorithm adopting intervalized learning scheme and show that the monotone convergence of the output error can be obtained for a given time interval when the proposed ILC algorithm is applied to a class of linear dynamic systems. We also show that the divided time interval is affected from the learning gain and that convergence speed of the proposed learning scheme can be increased by choosing the appropriate learning gain. To show the effectiveness of the proposed algorithm, two numerical examples are given.

I. 서 론

최근 들어 산업용 로봇, NC 기계, MODD (magneto-optical disk drive) 등과 같은 자동화 시스템에서 주어진 작업을 정밀하게 수행하는 제어 시스템에 대한 요

* 正會員, 韓國科學技術院 人間親和 福祉 로봇시스템 연구센터

(HWRS-ERC, KAIST)

** 正會員, 韓國科學技術院 電子電算學科

(Dept. of EECS, KAIST)

接受日字:2000年5月6日, 수정완료일:2001年6月20日

구가 높아지고 있다. 시스템 동특성 모델링(modeling)의 부정확성이나 파라미터(parameter) 변동 등에 따른 불확실성에 대한 기존의 제어기가 가지는 한계를 극복하기 위한 연구가 활발히 진행되고 있는데, 이러한 해결책의 하나로, 주어진 작업이 반복적인 경우에 같은 동작을 반복적으로 수행함에 따라 주어진 목표 궤적을 정밀하게 추종하는 제어 기법인 반복 학습 제어 기법이 Arimoto^[1] 등에 의해 이론적으로 정립된 이후로 활발한 연구가 진행되어 왔다^[2-8].

기존의 제안된 반복 학습 제어 법칙에 대한 목표 궤적의 추종 효과는 엄격한 수렴성 해석에 따라 보장되는데, Arimoto에 의해 제안된 λ -노름(norm)을 사용하여 증명이 되어 왔다. 즉, 주어진 목표 궤적 $y_d(\cdot)$ 혹은

은 이를 생성시키는 제어 입력 $u_d(\cdot)$ 에 대해 플랜트의 출력 궤적 $y_k(\cdot)$ 나 플랜트의 제어 입력 $u_k(\cdot)$ 가 다음의 식 (1) 혹은 식 (2)를 만족함을 보임으로써 반복 학습 법칙의 수렴성을 증명하였다.

$$\|e_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} \leq \rho_e \|e_k(\cdot)\|_{\lambda} \quad (1)$$

$$\|\Delta u_{k+1}(\cdot)\|_{\lambda} \leq \rho_u \|\Delta u_k(\cdot)\|_{\lambda} \quad (2)$$

여기서,

$$e_k(\cdot) = y_d(\cdot) - y_k(\cdot),$$

$$\Delta u_k(\cdot) = u_d(\cdot) - u_k(\cdot)$$

이고, $0 \leq \rho_e < 1$, $0 \leq \rho_u < 1$ 이다. 벡터 함수

$$h : [0, T] \rightarrow R^n, \quad h(t) = (h^1(t), \dots, h^n(t))^T$$

에 대한 λ -노름의 정의는 다음과 같다.

$$\|h(\cdot)\|_{\lambda} = \sup_{0 \leq t \leq T} e^{-\lambda t} \|h(t)\|_{\infty}$$

여기서,

$$\|h(t)\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq n} |h^i(t)|$$

이다. 이와 같은 λ -노름의 정의로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\|h(\cdot)\|_{\lambda} \leq \|h[0, T]\|_{sup} \leq e^{\lambda T} \|h(\cdot)\|_{\lambda} \quad (3)$$

여기서, $\|h[0, T]\|_{sup}$ 은 다음과 같이 정의되는 상한노름(sup-norm)이다.

$$\|h[0, T]\|_{sup} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|h(t)\|_{\infty}$$

따라서, λ -노름 관점에서 수렴성을 보임으로써 식 (3)과 같이 동치 관계를 가지는 상한노름 관점에서의 수렴성을 증명할 수 있다. 반복 학습 법칙을 실제 적용할 때에는 출력 오차의 주어진 시간 구간에서의 최대값과 같은 특정한 대표값이 원하는 정밀도를 가질 때까지 학습을 하게 되는데, 수렴성의 관점에서는 λ -노름과 상한노름 모두 이러한 대표값으로 사용될 수 있다. 하지만, 학습이 진행되는 수렴 과정에서 λ -노름의 관점에서는 지수감소적인 수렴특성이 보장됨에도 불구하고, 상한노름의 관점에서는 큰 오버슈트(overshoot)이 관찰되

기도 한다. 학습 과정 동안 허용할 수 있는 오차의 최대값이 보장되어야 하는 안정성 측면에서 이러한 오버슈트 현상은 심각한 문제를 야기할 수 있다. 따라서, 반복 학습 법칙의 수렴성 뿐만 아니라, 수렴이 진행되는 과정에 대한 고찰이 필요하다. 안정성 측면에서 중요한 상한노름 관점에서의 수렴 과정을 살펴보기 위해서는 상한노름을 사용한 수렴성 증명이 필요하다. 앞에서 살펴본 오버슈트 현상은 Lee와 Bien^[2]에 의해 처음으로 소개되었으며, PD형의 반복학습법칙을 사용하면 출력오차의 이득값이 상한노름 관점에서 지수감소적 수렴특성이 보장되는 시간 구간의 크기에 중요한 역할을 한다는 것을 보였다. 즉, 양의 실수 T_{sup} 이

$$T_{sup} < \frac{1}{\|A\|_{\infty}} \ln \left(1 + \frac{\|A\|_{\infty}(1-\rho_u)}{\|I(CA-RC)\|_{\infty}\|B\|_{\infty}} \right) \quad (4)$$

을 만족한다고 할 때, 다음의 식 (5)와 같은 시불변 선형시스템과 식 (6)과 같은 PD형 반복학습법칙에 대해 목표 출력 궤적 $y_d(\cdot)$ 가 시간 구간 $t \in [0, T_{sup}]$ 에 대해 주어졌다고 하면, 식 (7)을 만족하는 음이 아닌 실수 $\rho_0 < 1$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + I(\dot{e}_k(t) - Re_k(t)) \quad (6)$$

$$\|\Delta u_{k+1}[0, T_{sup}]\|_{sup} \leq \rho_0 \|\Delta u_k[0, T_{sup}]\|_{sup} \quad (7)$$

여기서, $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ 는 각각 상태, 입력, 출력을 나타낸다. 또한, A, B, C 는 적절한 차수를 가지는 행렬이며, CB 는 전랭크(full rank) 행렬이라 하자. 식 (4)에서 이득값 R 을 $\|I(CA-RC)\|_{\infty}$ 가 매우 작아지도록 선택하면 T_{sup} 이 매우 커져서, 최대 노름 관점에서 지수감소적 수렴을 보장하는 시간 구간이 넓어진다는 것을 관찰할 수 있다. 하지만, 목표 궤적에 대한 시간 구간이 $\|I(CA-RC)\|_{\infty}$ 의 크기에 의해 결정되기 때문에 임의의 시간 구간에 대해 적용하기 위해서는 플랜트의 정밀한 모델을 얻어야만 한다.

본 논문에서는 우선, 상한노름 관점에서 수렴 특성을 알아보기 위해서 기존의 λ -노름을 사용한 수렴성 증명 방법과는 달리 상한노름을 사용한 반복 학습 법칙의 수렴성 증명 방법을 보인다. 또한, 구간화된 학습 방법을 사용한 반복 학습 법칙을 제안하고, 임의의 시간 구

간에 대해 상한노움 관점에서 출력 오차의 단조감소적 수렴 특성을 얻을 수 있음을 보인다. 마지막으로, 제안한 구간화된 학습 방법에서의 나누어진 시간 구간이 학습 이득값에 의해 영향을 받는다는 것을 보임으로써 적절한 학습 이득값을 선택함에 따라 학습 속도가 증가함을 보인다.

본 논문의 II절에서는 PD형 반복 학습 법칙에 대해 상한노움을 사용하여 수렴성을 보이고, III절에서는 구간화된 PD형 반복 학습 법칙을 제안한다. IV절에서는 제안한 반복 학습 법칙의 유효성을 보이기 위하여 수치 예를 제시하고, V절에서 결론을 맺고 추후 연구 과제를 제시한다.

n 차원 벡터(vector) $x=(x^1, \dots, x^n)^T$ 에 대하여, $\|x\|$ 는 유클리디언 노움(euclidean norm)을 표시하며 $\|x\|_\infty$ 는 ∞ -노움을 의미한다. 즉,

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x^i|$$

이다. 각각의 요소가 $g^{\bar{u}}$ 로 정의되는 $n \times r$ 행렬 G 에 대하여

$$\|G\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^r |g^{\bar{u}}| \right\}$$

로 정의한다. 또한, 아래첨자 k 는 반복 시행 수를 나타낸다.

II. 상한노움 관점에서의 수렴성

본 절에서는 기존의 λ -노움을 사용한 반복 학습 법칙의 수렴성 증명과는 달리, 상한노움을 사용하여 수렴성을 증명한다. 반복 학습 법칙 (6)의 수렴성을 보이기 위해 앞서 다음의 보조 정리 1을 생각해 보자. 보조 정리 1의 결과는 학습 법칙 (6)의 수렴성을 보여주는 정리 1의 증명에 이용된다.

보조정리 1: 모든 정수 k 와 $m(k, m \geq 0)$ 에 대하여 $a_{k,m}$ 을 음이 아닌 실수라 하고, α, β 를 임의의 양의 상수라 하자. 또한, 모든 $m < 0$ 에 대하여 $a_{k,m} = 0$ 이라 하고 $0 \leq \rho < 1$ 이라 하자. 이 때, 다음의 식 (8)을 만족하면

$$a_{k+1,m} \leq \rho a_{k,m} + \beta \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{m-j} a_{k,j}, \quad \forall k, m \geq 0 \quad (8)$$

다음의 식 (9)가 성립한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,m} = 0, \quad \forall m \geq 0 \quad (9)$$

증명: 증명을 위하여 수학적 귀납법을 사용하자. 정수 $m \geq 0$ 에 대해 명제(statement) P_m 을 다음의 식 (10)으로 정의하자.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,m} = 0 \quad (10)$$

가정으로부터 $a_{k+1,0} \leq \rho a_{k,0}$ 이고 $0 \leq \rho < 1$ 이므로 명제 P_0 는 참이 된다. 즉,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,0} = 0$$

이 된다. 이제 $0 \leq n < m$ 을 만족하는 모든 정수 n 에 대하여 명제 P_n 이 참이라고 가정하면, 다음의 식 (11)이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \beta \alpha^m a_{k,0} &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \beta \alpha^{m-1} a_{k,1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \beta \alpha a_{k,m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

따라서, 다음의 식 (12)가 성립한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{m-j} a_{k,j} = 0 \quad (12)$$

즉, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 에 대하여 다음의 식 (13)을 만족하는 양수 K 가 존재한다.

$$\beta \sum_{j=0}^{m-1} \alpha^{m-j} a_{k,j} < \epsilon, \quad \forall k \geq K \quad (13)$$

식 (8)과 식 (13)으로부터 다음의 식 (14)가 성립한다.

$$a_{k+1,m} < \rho a_{k,m} + \epsilon, \quad \forall k \geq K \quad (14)$$

따라서, ϵ' 을

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{1-\rho}$$

으로 선택하면, 식 (14)로부터 임의의 양수 $\epsilon' > 0$ 에 대하여 다음의 식 (15)를 만족하는 양수 K 가 존재한다.

$$a_{k,m} - \rho^k a_{0,m} + \frac{\rho^k}{1-\rho} \epsilon < \epsilon', \quad \forall k \geq K \quad (15)$$

즉, 식 (16)이 성립한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,m} = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^k a_{k,0} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho^k}{1-\rho} \varepsilon \quad (16)$$

여기서 $0 \leq \rho < 1$ 이므로, 다음의 식 (17)이 성립한다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,m} = 0 \quad (17)$$

따라서 명제 P_m 이 참이 되고, 수학적 귀납법에 의해 식 (9)가 성립한다. ■

다음의 정리 1에서 학습 제어 법칙 (6)의 수렴성을 보인다.

정리 1: 반복 학습 법칙 (6)을 시스템 (5)에 적용하고 $x_k(0) = x_d(0)$, $k=0,1,2,\dots$, 즉, 매 반복 시행시의 초기값 오차는 없다고 하자. 이 때, 다음의 식 (18)을 만족하면,

$$\|I - CB\Gamma\|_{\infty} \leq \rho < 1 \quad (18)$$

반복 학습 법칙 (6)은 수렴한다. 즉,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k[0, T]\|_{sup} = 0$$

이 성립한다.

증명: 시스템 (5)와 반복 학습 법칙 (6)에서 다음의 식 (19)가 얻어진다.

$$e_{k+1}(t) = (I - CB\Gamma)e_k(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} (AB\Gamma - B\Gamma R)e_k(\tau) d\tau \quad (19)$$

양의 실수 δ 를 다음의 식 (20)을 만족하는 양의 실수라고 하자.

$$0 < \delta < \frac{1}{a} \ln \left[1 + \frac{a(1-\rho)}{\|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty}} \right] \quad (20)$$

여기서,

$$a = \|A\|_{\infty}$$

이다. $t \in [ih, (i+1)h]$ 에 대해 식 (19)로부터 다음의 식 (21)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= (I - CB\Gamma)e_k(t) \\ &\quad - C \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)} (AB\Gamma - B\Gamma R)e_k(\tau) d\tau \\ &\quad - C \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t-\tau)} (AB\Gamma - B\Gamma R)e_k(\tau) d\tau \\ &\quad - \dots \\ &\quad - C \int_{t_i}^t e^{A(t-\tau)} (AB\Gamma - B\Gamma R)e_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,

$$t_{i+1} = t_i + \delta, \quad i=0,1,\dots,N-1$$

$$t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T$$

이다. 식 (21)의 양변에 상한노음을 취하면 다음의 식 (22)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} &\leq \rho \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \\ &\quad + \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \left(\right. \\ &\quad \left. \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \int_0^{t_1} e^{a(t-\tau)} d\tau \|e_k[0, t_1]\|_{sup} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \int_{t_1}^{t_2} e^{a(t-\tau)} d\tau \|e_k[t_1, t_2]\|_{sup} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \int_{t_i}^t e^{a(t-\tau)} d\tau \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

또한, 식 (22)로부터 다음의 식 (23)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} &\leq \rho \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \\ &\quad + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^i e^{a(i-j)\delta} (e^{a\delta} - 1) \|e_k[t_j, t_{j+1}]\|_{sup} \\ &= \left(\rho + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} (e^{a\delta} - 1) \right) \\ &\quad \times \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \\ &\quad + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{i-1} e^{a(i-j)\delta} (e^{a\delta} - 1) \|e_k[t_j, t_{j+1}]\|_{sup} \quad (23) \end{aligned}$$

식 (20)과 식 (23)으로부터

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} (e^{a\delta} - 1) \\ &< \rho + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \\ &\quad \times \left(\left[1 + \frac{a(1-\rho)}{\|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty}} \right] - 1 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로, 보조정리 1에 의해

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} = 0, \quad \forall i \geq 0$$

가 얻어지고

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k[0, T]\|_{sup} = 0$$

이 성립한다. ■

주 1) 정리 1의 증명 과정에서 식 (20)을 만족하는 임의의 짧은 시간 구간에 대해 i 번째 시간 구간에서의 출력 오차가 수렴하기 위해서는 $i-1$ 번째 시간 구간까지의 출력 오차가 수렴해야 한다. 즉, 주어진 시간 구간 $[0, T]$ 에 대해 반복 학습이 진행되는 동안 시간 축 상에서 앞부분부터 뒷부분으로 수렴이 진행된다. 이 때, 학습 이득 R 은 식 (20)의 상한값에만 영향을 미칠 뿐, 수렴성에는 아무런 영향을 미치지 않는다.

주 2) 반복 학습 법칙 (6)에서 $R=0$ 인 경우에 D형 반복 학습 법칙이 되며, 정리 1의 결과에서 D형 반복 학습 법칙의 경우에도 PD형 반복 학습 법칙과 마찬가지로 상한노움에 대한 수렴성을 보일 수 있다.

III. 구간화된 반복 학습 법칙

본 절에서는 상한노움 관점에서 출력 오차의 단조 수렴성을 보장하는 새로운 반복 학습 법칙을 제안한다. 선형 시불변 시스템에 대하여 다음과 같은 문제가 주어졌다고 하자.

문제 1 : 원하는 목표 출력 궤적 $y_d(t)$ 가 시간 구간 $[0, T]$ 에서 정의되어 있다고 하고, $x_k(0) = x_d(0)$, $k=0, 1, 2, \dots$, 즉, 매 반복 시행시의 초기값 오차는 없다고 가정하자. 이 때, 주어진 선형 시불변 시스템 (5)의 출력 궤적이 상한노움 관점에서 목표 궤적 $y_d(t)$ 에 단조수렴하는 제어 입력 $u(t), 0 \leq t \leq T$ 를 생성하라.

문제 1에 대한 해로써 다음과 같은 반복 학습 법칙을 생각할 수 있다. 임의의 초기 제어 입력 궤적 $u_0(t), 0 \leq t \leq T$ 에서 시작하여 다음의 학습 법칙 (24)에 의해 시스템 (5)에 대한 다음 반복 시행시의 제어 입력 궤적들 $u_k(t), 0 \leq t \leq t_i, k=1, 2, \dots$ 을 얻는다.

$$u_{k+1}[t_i, t_{i+1}] = u_k[t_i, t_{i+1}] + \Gamma(e_k[t_i, t_{i+1}] - Re_k[t_i, t_{i+1}]), \quad i=0, 1, \dots, i_k \quad (24)$$

여기서,

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad i=0, 1, \dots, N-1$$

$$t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T$$

$$i_k = \sup\{i \mid \|e_k[t_{i-1}, t_i]\|_{sup} \leq \frac{1}{2} e^{-ah} \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup}, i=1, 2, \dots, N\} \quad (25)$$

$$e_{k+1}[t_{i_k+1}, T] = e_k[t_{i_k+1}, T]$$

이며, h 는 다음의 관계식 (26)을 만족하는 양의 실수이다.

$$0 < h < \frac{1}{a} \ln \left[1 + \frac{a(1-\rho)}{2\|C\|_{\infty} \|ABF - BFR\|_{\infty}} \right] \quad (26)$$

다음의 정리 2는 반복 학습 법칙 (24)의 수렴성을 보여 준다.

정리 2 : 반복 학습 법칙 (24)를 시스템 (5)에 적용하고 $x_k(0) = x_d(0)$, $k=0, 1, 2, \dots$, 즉, 매 반복 시행시의 초기값 오차는 없다고 하자. 이 때, 다음의 식 (27)을 만족하면,

$$\|I - CBF\|_{\infty} \leq \rho < 1 \quad (27)$$

다음의 식 (28)을 만족하는 음이 아닌 실수 $\rho_0 < 1$ 이 존재한다.

$$\|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \leq \rho_0 \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, i_k\} \quad (28)$$

즉,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

이 성립한다.

증명 : 정리 1의 증명에서와 같이 식 (19)로부터 다음의 식 (29)가 얻어진다.

$$\|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \leq \rho \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} + \frac{1}{a} \|C\|_{\infty} \|ABF - BFR\|_{\infty} [$$

$$\begin{aligned}
& e^{a(ih)}(e^{ah}-1) \|e_k[0, t_1]\|_{sup} \\
& + e^{a(i-1)h}(e^{ah}-1) \|e_k[t_1, t_2]\|_{sup} \\
& + \dots \\
& + (e^{ah}-1) \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup}
\end{aligned} \quad (29)$$

식 (25)로부터

$$\|e_k[t_{j-1}, t_j]\|_{sup} \leq \frac{1}{2} e^{-ah} \|e_k[t_j, t_{j+1}]\|_{sup}$$

이므로 다음의 식 (30)이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
& \|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \leq \rho \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \\
& + \frac{2}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \\
& \times (e^{ah}-1) \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup}
\end{aligned} \quad (30)$$

또한, 식 (26)으로부터 다음의 식 (31)이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho + \frac{2}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} (e^{ah}-1) \\
&< \rho + \frac{2}{a} \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty} \\
&\times \left(\left[1 + \frac{a(1-\rho)}{2 \|C\|_{\infty} \|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty}} \right] - 1 \right) \\
&= 1
\end{aligned} \quad (31)$$

식 (30)과 (31)로부터

$$\|e_{k+1}[t_i, t_{i+1}]\|_{sup} \leq \rho_0 \|e_k[t_i, t_{i+1}]\|_{sup}$$

가 얻어지고, 따라서

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$$

이 성립한다. ■

주 3) 정리 2의 결과는 전체 시간 구간 $[0, T]$ 를 시간 간격 h 로 나누었을 때, $i-1$ 번째 시간 구간에서의 출력 오차가 완전히 0으로 수렴하지 않더라도 i 번째 시간 구간에 대한 반복 학습을 진행시킬 수가 있으며, 출력 오차의 단조감소적 수렴성도 보장된다. 따라서, 단조 감소적 수렴성을 보장하기 위해서는 이전 시간 구간에서의 출력 오차가 완전히 0으로 수렴하여야만 다음 시간 구간에 대한 반복 학습을 진행시킬 수 있는 일반적인 반복 학습 법칙보다 수렴 속도가 빠르다.

주 4) [2]에서 언급한 바와 같이 식 (26)에서의 시간

간격 h 에 대한 상한값은 플랜트의 파라미터와 학습 이득 R 에 의해 결정된다. 즉, $\|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty}$ 에 의해 상한값이 결정되는데, \tilde{A} 와 \tilde{B} 를 각각 A 와 B 의 모델이라고 할 때,

$$R = ((\tilde{B}\Gamma)^T \tilde{B}\Gamma)^{-1} (\tilde{B}\Gamma)^T \tilde{A} \tilde{B}\Gamma$$

로 설정할 수 있으며, 플랜트의 모델이 정확할수록 $\|AB\Gamma - B\Gamma R\|_{\infty}$ 의 크기는 작아져서 시간 간격 h 가 커지게 된다.

IV. 수치 예

제안한 반복 학습 법칙의 유효성을 보이기 위하여 간단한 선형 시불변 시스템에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 예제 1에서는 기존의 PD형 반복 학습 법칙을 적용한 경우에 대한 수렴 과정을 살펴봄으로써 정리 1의 결과를 고찰한다. 예제 2에서는 제안한 반복 학습 법칙을 적용하여 상한노움 관점에서 출력오차가 단조수렴함을 보인다.

예제 1 : 동특성이 다음과 같이 표현되는 선형 시스템에 대하여 생각해 보자.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0.02 & -0.03 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= [-0.1 \ 0.1] x(t)
\end{aligned}$$

목표 출력 궤적은 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$y_d(t) = t(6-t), \quad 0 \leq t \leq 6$$

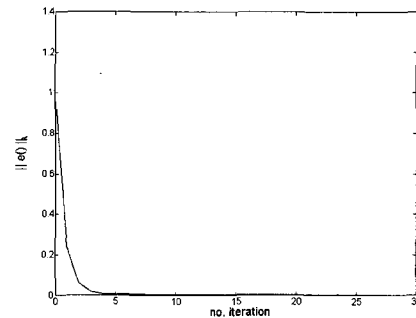


그림 1. 예제 1에 대한 출력오차의 λ -노움 변화
Fig. 1. Trend of convergence of the output error in the sense of λ -norm.

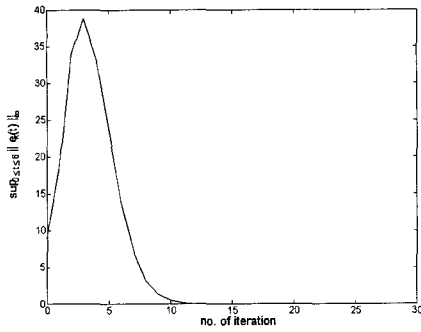
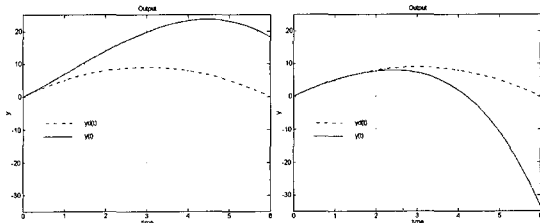
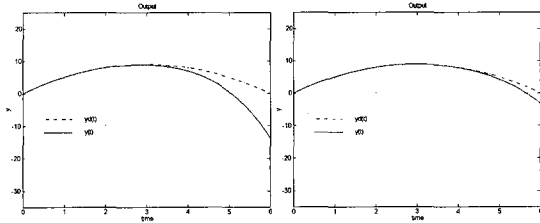


그림 2. 예제 1에 대한 출력오차의 상한노름 변화
Fig. 2. Trend of convergence of the output error in the sense of sup-norm.

정리 1에서 수렴하기 위한 충분 조건에서 가장 좋은 Γ 는 $(CB)^{-1} = 5$ 이지만 CB 의 불확실성 정도를 10%라 가정하여 $\Gamma = 5.1$ 로 정하였다. 또한, 학습 이득 $R = -0.7$ 로 선택하였다. 그림 1은 잘 알려진 바와 같이 λ -노름 관점에서 출력오차가 단조수렴함을 보여주고 있다. 하지만, 그림 2에서와 같이 상한노름 관점에서 출력오차는 오버슈트 현상을 보인다.



(a) 2회 시행시의 출력 (b) 5회 시행시의 출력



(c) 7회 시행시의 출력 (d) 9회 시행시의 출력

그림 3. 예제 1에 대한 목표궤적 및 출력궤적
Fig. 3. The output trajectory at each iteration for Example 1.

그림 3의 (a), (b), (c), (d)는 각각 2회, 5회, 7회, 9회

반복 시행 시의 출력 궤적을 보여주는데, 정리 1에서 살펴본 바와 같이 반복 학습이 진행되는 과정에서 시간 축 상의 앞부분부터 뒷부분으로 수렴이 진행됨을 알 수 있다.

예제 2 : 예제 1과 같은 선형 시불변 시스템과 목표궤적에 대하여 제안한 반복 학습 법칙 (24)를 적용하자. 예제 1에서와 마찬가지로 CB 의 불확실성 정도를 10%라 가정하여 $\Gamma = 5.1$ 로 정하였다. 또한, 학습 이득 $R = -0.7$ 라 할 때, 식 (26)에서 $0 < h < 1.3524$ 의 관계식을 얻을 수 있는데, 불확실성 정도를 약 5%라 가정하여 $h = 1.3$ 으로 정하였다.

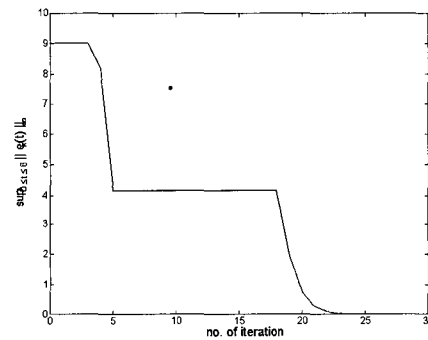
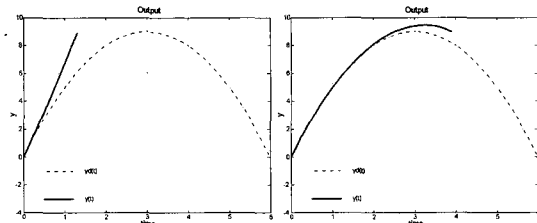
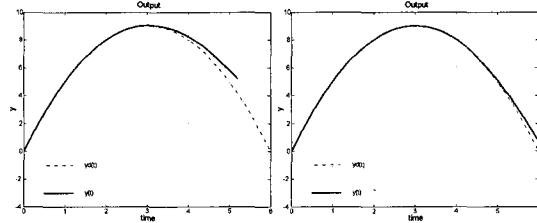


그림 4. 예제 2에 대한 출력오차의 상한노름 변화
Fig. 4. Trend of convergence of the output error in the sense of sup-norm.



(a) 2회 시행시의 출력 (b) 5회 시행시의 출력



(c) 7회 시행시의 출력 (d) 21회 시행시의 출력

그림 5. 예제 2에 대한 목표궤적 및 출력궤적
Fig. 5. The output trajectory at each iteration for Example 2.

그림 4는 상한노움 관점에서 출력오차의 변화를 보여 준다. 그림 5의 (a), (b), (c), (d)는 각각 2회, 5회, 7회, 21회 반복 시행 시의 출력 궤적을 보여준다. 예제 1에서 살펴본 바와 같이 기존의 반복 학습 법칙을 적용한 경우에는 출력오차가 상한노움 관점에서 큰 오버슈트 현상을 보이지만, 제안한 반복 학습 법칙을 적용한 경우에는 그림 4에서의와 같이 출력오차가 상한노움 관점에서 단조수렴의 특성을 보인다.

V. 결론 및 추후과제

본 논문에서는 기존의 수렴성 증명 방법에서 사용하는 λ -노움이 아닌 상한노움을 사용하여 반복 학습 법칙의 수렴성을 보였다. 또한, 기존의 반복 학습 법칙이 가지는 상한노움 관점에서의 문제점을 지적하고, 이를 해결하기 위한 새로운 반복 학습 법칙을 제안하였다. 제안한 구간화된 반복 학습 법칙을 사용하면 임의의 시간 구간에 대해 상한노움 관점에서 단조감소적 수렴성을 보장할 수 있음을 보이고, 나누어진 시간 구간과 학습 법칙의 이득값 간의 상관 관계를 보였다.

반복 학습 법칙의 수렴 특성을 개선하기 위해서는 단조수렴성을 보장하는 것뿐만 아니라 수렴 속도도 매우 중요하다. 앞으로 계속 연구해야 할 과제로서 반복 학습 법칙의 수렴 속도를 증가시킬 수 있는 새로운 학습 법칙에 대한 연구가 남아 있다.

참 고 문 헌

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura and F. Miyazaki, "Bettering Operation of Robots by Learning," *Journal of Robotic System*, 1(123), pp. 123-140, 1984.
- [2] H. -S. Lee and Z. Bien, "Robustness and Convergence of a PD-type Iterative Learning Controller," *Iterative Learning Control: Analysis, Design, Integration and Applications*, Edited by Z. Bien and J. -X. Xu, Kluwer Academic Publishers, Chapter 3, 1998.
- [3] S. Arimoto, T. Naniwa and H. Suzuki, "Robustness of P-type Learning Control with a Forgetting Factor for Robotic Motions," *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, Hawaii, USA, pp. 2640-2645, 1990.
- [4] N. Amann, D. H. Owens, E. Rogers and A. Wahl, "An H_∞ Approach to Linear Iterative Learning Control Design," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 10(6), pp. 767-781, 1996.
- [5] A. De Luca, G. Paesano and G. Ulivi, "A Frequency-domain Approach to Learning Control: Implementation for a Robot Manipulator," *IEEE Control Systems*, 39(1), pp. 1-10, 1992.
- [6] H. -S. Lee and Z. Bien, "Study on Robustness of Iterative Learning Control with Non-Zero Initial Error," *International Journal of Control*, 64(3), pp. 345-359, 1996.
- [7] K. -H. Park, Z. Bien and D. -H. Hwang, "Design of an Iterative Learning Controller for a Class of Linear Dynamic Systems with Time-delay," *IEE Proceedings - Part D*, 145(6), pp. 507-512, 1998.
- [8] K. -H. Park, Z. Bien and D. -H. Hwang, "A Study on the PID-type Iterative Learning Controller against Initial State Error," *International Journal of Systems Science*, 30(1), pp. 49-59, 1999.

저 자 소 개



朴 洸 賢(正會員)

1994년 한국과학기술원 전자전산학과 학사. 1997년 한국과학기술원 전자전산학과 석사. 2001년 한국과학기술원 전자전산학과 박사. 현재 한국과학기술원 인간친화 복지 로봇시스템 연구센터 박사후 연구원. 주

관심 분야는 학습제어, 지능제어, 인간친화 인터페이스, 재활공학 등임

下 増 男(正會員)

第 38 卷 SC編 第 2 號 參照

현재 한국과학기술원 전자전산학과 교수 겸 인간친화 복지 로봇시스템 연구센터 소장, 전자공학회 회장