

고차 개념으로서 수

박 준 용 (고려대)

【요약문】 이 글은 수학적 플라톤주의를 포기하더라도 프레게에게 열려 있었던 것으로 보이는 논리주의 프로그램의 한 가능성, 즉 수를 고차 개념으로 이해하는 논리주의 프로그램을 그가 왜 선택하지 않았는가 하는 물음에 대답하는 데 목적이 있다. 이를 위해 나는 수를 고차 개념으로 이해할 때 산수의 기초 개념들을 만족스럽게 정의할 수 있는지, 그런 정의들로부터 프레게의 기수 이론의 공리들을 고단계 논리학 내에서 모두 증명할 수 있는지를 차례대로 검토한다. 다음으로 나는 그 검토 결과에 근거할 때 대상들이 무한히 많이 있다는 가정에 의존하지 않는 한 서로 다른 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 것을 보증할 수 없다는 점을 논증할 것이고, 바로 그 점이 프레게가 비플라톤주의적 논리주의를 받아들일 수 없었던 주요 이유였음을 논증할 것이다.

【주요어】 프레게, 수, 고차 개념, 논리주의, 수학적 플라톤주의.

0. 문제 제기

『산수의 기초』(1884)에서 프레게가 적극적으로 주장한 논제는 세가지로 요약된다. 첫째, 수 진술은 개념에 관해 서술하는 고차 진술이다. 둘째, 수는 논리적 대상이다. 이 주장은 수학적 플라톤주의로 알려져 있다. 셋째, 산수의 근본 법칙들은 논리 법칙과 정의로부터 도출될 수 있다. 이 주장은 산수에 관한 논리주의로 알려져 있다. 프레게는 수가 논리적 대상이라는 논제를 정당화하기 위해 외연 개념을 끌어들였는데, 『산수의 근본 법칙들』(1893, 1903)에서 그가 외연 개념을 지배하는 원리로 사용한 근본 법칙 V는 잘 알려진대로 모순에 빠졌다.¹⁾ 근본 법칙 V를 수정하여 모순을 극복하려는 그의 시도는 실패하였고, 결국 그는 수학적 플라톤주의만이 아니라²⁾ 산수에 관한 논리주의까지 포기하였다.

- 1) 이 글에서 나는 프레게의 저술을 치청하기 위해 다음의 줄임말들을 사용하겠다. 「표기법」과 Bs : *Begriffschrift*, 「기초」와 Gl : *Die Grundlagen der Arithmetik*, 「법칙」 I권과 Gg I : *Grundgesetze der Arithmetik I*, 「법칙」 II권과 Gg II : *Grundgesetze der Arithmetik II*, Ns : *Nachgelassene Schriften*.
- 2) 프레게가 수학적 플라톤주의를 포기했다는 말은 그가 더 이상 수를 대상으로 간주하지 않았다는 것을 의미하는 것이 아니다. 단지 그가 더 이상 수를 논리적인 대상으로 간주하지 않았음을 의미

프레게의 산수 철학에 관한 최근의 새로운 연구 결과들, 그리고 그의 산수 철학을 발전시키려는 후대의 노력들을 고려할 때³⁾, 우리는 그가 왜 그처럼 과도한 태도를 취했는지 의문을 갖게 된다. 『법칙』의 근본 법칙 V와 그 법칙에 의해 도입되는 외연 개념에 의존하지 않을 경우 수학적 플라톤주의나 논리주의를 옹호 할 만한 방도가 있을 수 없는가? 프레게는 적어도 수학적 플라톤주의에 관해서는 그렇게 생각했던 것 같다 : “나는 개념으로부터 그것의 외연으로의 이행을 . . . 허용하지 않는다면 어떻게 산술학이 과학적 기초를 가질 수 있는지, 수들이 어떻게 논리적 대상으로 간주되고 연구될 수 있는지 모른다.”(Gg II, 253) 그러나 논리주의를 옹호하는 데에도 외연 개념은 필수적인가? 만약 우리가 수를 대상으로 간주하지 않더라도 논리주의를 옹호할 만한 다른 방법이 있다면, 외연 개념에 의존할 필요가 없으므로 그 개념과 관련된 모순도 걱정할 필요가 없지 않는가?

이런 물음들은 프레게에게는 가능하지 않았고 러셀 및 최근의 몇몇 비플라톤 주의적 논리주의자들의 논의에 비추어 볼 때에나 가능한 시대착오적 물음으로 여겨질지도 모른다. 하지만 다음 논의에서 우리는 수를 대상으로 간주하지 않으면서 논리주의를 옹호할 방법이 있는지를 프레게 자신이 실제로 고려하였고 그 결과 부정적인 결론에 도달하게 되었음을 볼 것이다. 이와 함께 나는 수가 대상이라는 주장을 프레게가 왜 그토록 중요하게 생각했는가 하는 물음에 대답하려 한다. 나의 대답은 이미 라이트(Crispin Wright), 더밀(Michael Dummett), 헤크(Richard Heck) 등 여러 논자들이 제시했던 것과 근본적으로 다르지 않다. 다만 이 글에서 새로운 것은 프레게가 수를 대상으로 간주하지 않는 논리주의를 고려했을 경우 그가 시도했음직한 논의를 구체적으로 제시하는 것이다. 이 논의를 통해 다른 논자들이 제시했던 대답이 더 나은 설득력을 지니기를 바란다.

나는 우선 프레게가 고려했을 만한 비플라톤주의적 논리주의 프로그램으로서 수를 고차 개념으로 이해하는 견해를 묘사한 후, 『기초』의 55절에서 제시된 수들에 대한 귀납적인 정의 방법에 대해 프레게 자신이 제기한 비판들을 검토한다. 다음으로 그런 비판을 극복하기 위해 더밀, 헤크 등이 제시한 대안들을 재구성하고, 이 대안들을 기초로 프레게가 기수 이론의 공리로 간주했던 진리들을 그의 고단계 논리학 내에서 모두 증명할 수 있는지를 검토해 본다. 이를 통해 그런 식으로 증명할 수 없는 기수 이론의 진리가 드러날텐데, 나는 그런 진리가 말하는 바가 무엇인지, 그리고 그 진리를 증명할 수 있기 위해 어떤 가정이 필요한지 살

한다.

3) 나는 보스톡(David Bostock)이나 호데스(Harold Hodes) 등의 노력을 염두에 두고 있다.

펴 볼 것이다. 마지막으로 프레게가 그런 가정을 받아들일 수 없었던 이유, 그리고 나아가 수를 고차적인 개념으로 이해하는 프로그램을 받아들일 수 없었던 이유를 제시하려 한다.

1. 수는 고차 개념일 수 있는가?

어떤 조건을 만족하는 사물들을 셀 때, 우리는 “어떠어떠한 사물이 몇 개인가?” 하는 식으로 묻고, 그런 물음에 대해 “그리그리한 사물이 n개이다” 혹은 “n개의 그리그리한 사물이 있다” 하는 식으로 대답하곤 한다. 프레게는 이처럼 어떤 조건을 만족하는 사물들이 몇 개 있는지를 말해주는 문장을 “수 진술”(Zahlausage)이라고 부르며, 그런 진술은 개념에 관해 어떤 것을 서술한다고 주장한다.(Gl, 46절) 예를 들어, 그에 따르면 “이 혹성에는 3개의 달이 있다”는 수 진술은 “이 혹성의 달”이라는 표현이 나타내는 개념에 관해, 그 개념 아래 속하는 대상이 3개 있음을 말한다.

이런 점에서 수 진술은 대상에 관해 서술하는 진술과 다르다. 예를 들어 “지구는 이 태양계의 혹성이다”라는 진술은 지구라는 대상에 관해 그 대상이 “이 태양계의 혹성”이라는 개념 아래 속한다는 것을 말하는 반면, “이 태양계에는 아홉 개의 혹성이 있다”는 수 진술은 “이 태양계의 혹성”이라는 개념에 관해 그 개념 아래 속하는 대상이 아홉 개 있음을 말한다. 프레게는 대상에 관해 서술하는 데 사용되는 개념을 “1차 개념”이라고 부르며, 1차 개념에 관해 서술하는 데 사용되는 개념을 “2차 개념”이라고 부른다.(Gl, 53) 따라서 앞의 수 진술은 1차 개념에 관해 어떤 것을 서술하며, 그 서술은 “아홉 개 있음”이라는 2차 개념에 의해 이루어진 것이다. 수 진술을 이처럼 이해한다면 우리는 일반적으로 그런 진술을 서로 다른 두 부분으로 분석할 수 있다. 그 하나는 1차 개념을 나타내는 표현이고, 다른 하나는 2차 개념을 나타내는 그 나머지 부분이다. 앞으로 첫째 부분을 “1차 술어”라고 부르고, 둘째 부분을 “2차 술어”라고 부르자.

이처럼 수 진술을 이해할 때, 만약 수를 대상으로 이해하려 하지 않는다면, 우리는 수를 무엇으로 이해해야 하는가? 처음 볼 때에는 다음 이유 때문에 가능한 대답이 있을지 의심스러워 보인다. 수 진술 “이 태양계에는 아홉 개의 혹성이 있다”에서 우리가 보통 수를 나타내는 말로 간주하는 것은 “... 가 아홉 개 있다”는 2차 술어 전체가 아니라 그 술어의 일부인 “아홉”이다. 그런데 같은 문장을 뜻의 변화없이 “이 태양계에는 9개의 혹성이 있다”로 고쳐쓸 수 있다면, 우리가 보

통 수 9를 나타낸다고 생각하는 수자 “9”도 그 문장의 술어 “... 가 9개 있다” 전체가 아니라 일부일 뿐이다. 그런데 우리는 산수의 맥락에서 수자들을 이름처럼 사용하는 데 익숙하기 때문에, 수를 대상으로 이해하지 않는다면 무엇으로 이해 해야 할지 쉽게 떠오르지 않는다. 도대체 “아홉”이나 “9”가 “지구”처럼 어떤 대상을 나타내는 이름이 아니라면 무엇이란 말인가? 우리는 “9=7+2” 같은 수식에서 “9”를 동일성 기호의 한 편에 나타날 수 있는 기호로 사용하지 않는가? 그리고 우리는 임의의 두 수에 대해 서로 같거나 다르다는 판단을 수행하지 않는가?

따라서 일상의 맥락에서 사용되는 수표현이나 수식에 등장하는 수자들이 그런 문맥 안에서 어떤 것을 나타낸다고 가정한다면, 그런 표현들이 나타내는 것이 대상이 아니라고 생각하기는 힘들 것 같다. 하지만 우리가 잠시 그런 가정을 접어 둔다면, 우리는 수 진술에 대한 프레게의 분석을 유지하면서도 수를 대상으로 보지 않을 길을 찾을 수 있다: 즉, 수를 수자나 수표현이 나타내는 것이 아니라, 수 진술의 술어 자체가 나타내는 2차 개념으로 이해하는 것이다.

예를 들어, “등근 사각형이 0개 있다”는 수 진술은 “등근 사각형”이라는 개념에 관해 그 개념 아래 속하는 대상이 하나도 없음을 말한다. 만약 이 경우 우리가 수자 “0”이 따로 수 0을 나타내는 것이 아니라 술어 “... 가 0개 있다” 자체가 수 0을 나타낸다고 간주한다면, 우리는 더 이상 수 0을 대상으로 이해할 필요가 없다. 유사한 방식으로 “지구는 1개의 위성을 가지고 있다”는 수 진술에서 수자 “1”이 따로 수 1을 나타내는 것이 아니라 술어 “... 가 1개 있다” 자체가 수 1을 나타낸다고 간주한다면, 우리는 더 이상 수 1을 대상으로 이해할 필요가 없다. 이처럼 수를 수 진술의 술어가 나타내는 개념으로 이해할 때 우리는 수 0을 대상이 아니라 “0개 있음” 혹은 “없음”이라는 2차 개념으로 이해할 수 있고, 수 1은 “1개 있음” 혹은 “유일함”이라는 2차 개념으로 이해할 수 있다. 그리고 이런 식의 이해를 일반화시킨다면 우리는 수들의 계열을 다음과 같이 이해할 수 있을 것이다: <없음, 유일함, 2개 있음, ..., n개 있음, ...>.

처음 볼 때, 수에 대한 이런 견해는 산수에 관한 논리주의를 정당화하려는 프레게의 입장에서는 수를 대상으로 간주하는 것보다 여러 모로 이로운 것처럼 보인다. 첫째로 그런 견해에 근거한다면 수가 논리적인 대상이라는 것을 정당화하기 위해 그가 끌어들인 외연 개념에 더 이상 의존할 필요가 없을 것이다. 이에 따라 그는 더 이상 외연 동일성 원리인 근본 법칙 V에 의존할 필요가 없으므로, 개념의 차원에 관한 그의 이론에만 의존한다면 모순을 걱정할 필요도 없을 것 같다.⁴⁾ 둘째로 수가 대상임을 보이는 데 따르는 어려움, 특히 수 단청 용어의 지시

체를 확립하는 일의 어려움에 더 이상 마주칠 필요가 없을 것이다.⁵⁾ 세째로, 논리학에 대한 통상적 견해에 근거할 때 논리주의는 수가 개념이라는 견해와 더 어울리는 것으로 보인다. 논리학에 대한 통상적 견해에서는 논리학의 원리를만으로 대상들의 존재가 함축되지 않는 것으로 여겨진다. 그런데, 수가 대상이라고 주장하면서 논리주의를 유지하려 한다면, 수는 무한히 많기 때문에 논리학의 원리를 이 무한히 많은 대상의 존재를 함축한다는 것을 인정해야 할 것이다. 그 반면 수를 고차 개념으로 본다면 이런 존재론적 부담은 훨씬 적은 것으로 보인다.⁶⁾

만약 수를 대상으로 이해하지 않고 개념으로 이해하는 것이 정말 이런 장점을 가진다면, 프레게는 왜 그런 견해를 채택하지 않았을까? 이 물음에 대답하기 위해서는 먼저 그런 수이해에 근거하여 논리주의를 정당화하는 데 무슨 일이 필요한지를 물어보아야 한다. 수가 고차 개념이라는 견해에 근거하여 논리주의를 정당화하려면, 적어도 다음 두 조건이 충족시켜야 할 것이다. 첫째, 고차 개념으로서의 수들의 이해를 구체화하는 산술 개념들의 정의가 가능해야 할 것이고, 이런 정의들은 순수 논리적 개념들에 의해 제시되어야 할 것이다. 둘째, 그런 정의들에 기초하여 논리학의 일반 법칙들로부터 산술학의 기초적인 진리들을 도출할 수 있어야 할 것이다. 기수 이론에 관한 논의로 제한한다면, 우리는 그런 정의들과 논리 법칙들로부터 프레게 자신이 정식화한 기수 이론의 공리를 도출할 수 있는지 검토해야 할 것이다.⁷⁾ 그러면 수를 고차 개념으로 이해할 때 이런 조건들을 충족시킬 수 있는지 차례대로 살펴보기로 하자.

2. 귀납적 정의와 이에 대한 반론

모순에 마주치기 이전까지 프레게는 수를 고차 개념으로 이해하는 논리주의를 진지하게 고려한 것 같지는 않다. 왜냐하면 그는 이미 『기초』에서 그런 수 이해를 구체화할 만한 정의 방법을 제시하고서도, 실제로 그런 이해에 따른 논리주

-
- 4) 아래의 논의에서 나는 프레게의 차원 이론이 이해되어 있는 것으로 전제한다. 그의 차원 이론에서 는 대상들이 가장 낮은 차원을 차지하며, 대상들이 속하는 1차 개념들이 그 다음 차원을 차지하고, 다시 1차 개념들이 속하는 2차 개념들이 그 다음 차원을 차지한다. 박준용(1999), 56-64 참조.
 - 5) 이런 논점을 용호한 논문으로서 Hodes(1984)를 참조할 것.
 - 6) 이 논점이 실제로 성립하지 않는다는 점을 보이는 것이 이 글의 한가지 목적이다. 논리학에 대한 통상적 견해와 프레게의 플라톤주의 사이의 관계에 관한 훌륭한 논의로는 Dummett(1991), 301-305면 참조할 것.
 - 7) 사실 프레게 자신은 이런 조건들 이외에도 수들의 응용가능성에 대한 설명도 논리주의를 정당화하기 위한 필수적인 조건으로 간주하였다. 박준용(1999), 45-53 참조.

의가 실행 가능한지를 정면으로 다루기보다는 그런 정의 방법을 수가 대상이라는 견해를 더 설득력있게 보이기 위한 징검다리로 이용하는 데 만족하기 때문이다. 하지만 우리가 비플라톤주의적 논리주의의 가능성에 대해 그가 어떻게 평가했을지 이해하려면 그가 제시했던 정의 방법과 그 방법에 대한 그의 반론을 검토할 필요가 있다.

『기초』의 55절에서 그가 시험적으로 제시한 방법은 0, 1, 2, … 등 수 계열에 등장하는 각 항을 직접 정의하지 않고 그런 각 항의 표현이 등장하는 문맥을 논리적으로 설명함으로써 수 계열에 도달하려는 것이다. 그는 0을 설명하기 위해 “F인 것이 0개 있다”는 표현을 “a가 어떤 대상이든지 a는 개념 F 아래 속하지 않는다”를 의미하는 것으로 정의하며, 1을 설명하기 위해 “F인 것이 1개 있다”는 표현을 “개념 F 아래 속하는 대상이 적어도 하나 있고, 모든 대상 a와 b에 대해, a가 개념 F 아래 속하고, b가 개념 F 아래 속한다면, a와 b가 같다”를 의미하는 것으로 정의한다. 그리고, 그는 수 계열에 등장하는 나머지 항들을 구성할 수 있게 하기 위해 수 계열의 각 항이 바로 앞에 나오는 항에 대해 가지는 일반적 관계를 다음과 같이 설명한다 : 즉, 그는 “F인 것이 (n+1)개 있다”는 표현을 “대상 a가 개념 F 아래 속하고, F 아래 속하지만 a가 아닌 것이 n개 있다”를 의미하는 것으로 설명한다.(Gl, 55절)

이런 설명 방법은 수 계열의 첫 번째 항을 설명하고 그 설명에 기초하여 나머지 항들을 설명할 수 있게 해주는 도식을 제공한다는 점에서 수들에 대한 귀납적 설명으로 알려져 있다. 우리가 “ φ 인 것이 n개 있다”는 형식의 2차 술어를 “ $\exists_n x \varphi x$ ”로 표시한다면, 앞의 정의들은 다음과 같이 정식화될 수 있다 :

- (1) $\exists_0 x Fx \equiv df \forall x \neg Fx$
- (2) $\exists_1 x Fx \equiv df \exists x Fx \& \forall x \forall y (Fx \& Fy \rightarrow x=y)$
- (3) $\exists_{n+1} x Fx \equiv df \exists x [Fx \& \exists_n y (Fy \& x \neq y)]$

우선 우리는 처음 두 정의에 의해 수자 “0”, “1”가 포함된 2차 술어를 순수 논리적인 표현만이 등장하는 술어로 바꾸어 줄 수 있다. 그리고 이 정의들을 마지막 정의 도식과 결합하여 사용한다면, 그밖의 수자가 포함된 2차 술어들도 순수 논리적인 표현들만이 등장하는 술어로 바꾸는 일은 어렵지 않아 보인다. 예를 들어, 우리가 정의 (1)–(2)를 수 계열의 처음 두 항에 대한 설명으로 받아들인다면, 우리는 수 계열의 세 번째 항의 표현이 등장하는 수 진술 “G인 것이 2개 있다”는 다

음과 같이 설명될 수 있을 것이다 :

$$(4) \exists_2 x Gx \leftrightarrow \exists x [Gx \& \exists_1 y (Gy \& x \neq y)] \\ \leftrightarrow \exists x (Gx \& \exists y (Gy \& x \neq y) \& \forall z \forall w [(Gz \& x \neq z) \& (Gw \& x \neq w) \rightarrow z = w])$$

우리는 같은 방법으로 “G인 것이 3개 있다”, “G인 것이 4개 있다” 등 그밖의 수자들이 등장하는 수 진술들도 그런 수자들이 등장하지 않는 진술로 바꾸어 줄 수 있을 것이다. 이에 따라 우리는 수 계열에 등장하는 모든 각 항을 설명할 수 있는 일반적인 방법을 얻은 것처럼 보인다.

『기초』에서 프레게가 이런 수 설명 방법을 받아들일 수 없는 이유로서 제시한 반론은 세 가지이다. 첫째 반론은 그런 방법으로는 “0”, “1” 등의 수자를 구성요소로 포함하는 고차 술어나 수 진술의 뜻을 설명해 줄 뿐 그런 수자의 뜻을 따로 설명해주지 못한다는 것이다. 그러나 프레게에 따르면 그 경우 수를 “자립적이고 재인식이 가능한 대상”으로 파악할 수 없다. 둘째 반론은 “F인 것이 m개 있다”는 수 진술과 “F인 것이 n개 있다”는 수 진술로부터 m과 n이 같은 수라는 것을 증명할 수 없다는 것이다. 그러나 그에 따르면 이 경우 “F가 가지는 그 수”라는 형식의 단칭 용어를 정당할 수 없고 그에 따라 수를 특정한 대상으로 파악할 수 없기 때문에, 등식들을 증명하는 일도 불가능하다. 셋째 반론은 정의 도식(3)의 정의항에 등장하는 “G인 것이 n개 있다” 같은 형식의 표현이 피정의항과 마찬가지로 설명되어 있지 않기 때문에, “n” 대신 “줄리어스 시이저” 같은 단칭 용어를 넣어 얻은 “G인 것이 (줄리어스 시이저)개 있다” 같은 진술이 참이 되는지 결정할 수 없다는 것이다.(Gl, 56절)

우선 이런 반론들은 “0”, “1”, “2”, … 등의 수자가 단칭 용어라는 것, 그리고 그런 수자가 나타내는 것이 대상이라는 것을 전제하는 것으로 보인다. 따라서 앞의 정의 방법을 수들에 대한 맥락적인 정의로 간주할 경우에는 그런 반론이 유효한 것으로 보인다. 그 반면에 앞 절에서처럼 “F인 것이 1개 있다”는 형식의 수 진술에서 수자 “1”이 따로 어떤 것을 나타내는 것이 아니라 “… 가 1개 있다”는 술어 전체가 어떤 것을 나타낸다는 견해에 대해서도 그런 반론들이 여전히 설득력이 있을지는 의심스럽다.⁸⁾ 이런 견해에서는 더 이상 “0”, “1” 등의 수자의 뜻을

8) 더밑은 『기초』 56-61절의 논의가 그가 “급진적인 형용사적 전략”이라고 부르는 프로그램, 즉 수를 고차 개념으로 이해하는 프로그램이 불가능함을 보이는 데 있었다고 생각한다. 이에 근거해서 그는 『기초』 56절의 반론의 많은 부분이 논점을 벗나간 것이라고 주장한다 : Dummett(1990), 101-102. 하지만 나의 해석은 다르다. 나는 『기초』 55절의 귀납적 정의 방법이 수들에 대한 맥락

따로 설명할 필요가 없을 것이므로, 첫 번째 반론은 문제되지 않는 것으로 보인다. 하지만 더밀이 지적한 것처럼 나머지 두 반론은 수자가 단청 용어라는 가정에 의존하지 않는 것으로 재구성하여 읽을 수 있고, 재구성된 그 반론들은 우리의 새로운 견해에도 여전히 효력을 가질 수 있다.⁹⁾

우선 개념에 관한 프레게의 견해를 받아들인다면, 특정 개념 G에 대해, “개념 G 아래 속하는 대상들은 몇 개인가?” 하는 물음에 대한 옳은 대답이 여럿일 수는 없을 것이다. 왜냐하면 모든 각각의 대상에 대해 그것이 주어진 개념 G 아래 속하는지가 결정되어 있다면, 그 개념 아래 속하는 대상들의 수도 정해져 있을 것이다기 때문이다. 따라서, 만약 “G인 것이 m개 있다”는 진술도 참이고 “G인 것이 n개 있다”는 진술도 참이라면, 우리는 개념 G 아래 속하는 대상들의 수가 기껏해야 하나임을 보여 줄 수 있어야 할 것이다. 프레게는 그 점을 보여주는 방법이 “G가 가지는 그 수”라는 단청 용어의 사용을 정당화하는 길이라고 주장한다. 그런 정당화가 가능하다면, 개념 F가 가지는 수는 오직 하나일 것이고, 그에 따라 “개념 F가 가지는 그 수 = m”과 “개념 F가 가지는 그 수 = n”으로부터 동일성 원리에 의해 “ $m=n$ ”을 도출할 수 있을 것이다. 물론, 동일성 관계가 대상들 사이의 관계라는 프레게의 주장을 받아들인다면, 이런 방법에 따르기 위해서는 수를 대상으로 간주해야 한다. 그런데, 만일 수를 고차 개념으로 간주하고, 그런 개념을 “ φ 인 것이 n개 있다”는 형식의 2차 술어 자체가 나타내는 것으로 간주한다면, 임의의 1차 개념 G가 기껏해야 하나의 수를 갖는다는 것을 어떻게 정당화할 수 있는가? 이것을 정당화하기 위해서는 수의 동일성을 이제 우리가 수들로 간주하는 2차 개념들 사이의 어떤 관계로 설명할 수 있어야 할 것이다. 우리는 프레게의 둘째 반론을 그런 설명의 요구로 간주할 수 있고, 그런 요구가 충족되지 않는다면, 그의 반론은 여전히 유효할 것이다.

셋째 반론이 가지는 의의를 이해하기 위해서 우리는 정의 도식 (3)의 역할을 재고해 보아야 한다. 우리는 그런 도식을 다른 정의들과 결합하여 수 계열의 각 항을 설명할 수 있는 일반적 규칙으로 간주하였다. 그런데 우리가 앞에서 한 것처럼 “G인 것이 2개 있다”는 수 진술을 설명하기 위해서는 도식 (3)의 오른편의 “n” 대신에 “1”을 대입할 수 있어야 한다. 그러나 그런 대입을 허용한다는 것은 “0”과 “1” 같은 수자들이 단청 용어이고 “n”이 그런 수자들에 대한 변항이라는 것을 전

적 설명으로 의도되었고, 56절의 반론들도 그런 설명에 맞추어진 것이라고 생각한다. 이렇게 이해할 때 나는 프레게의 반론을 더밀처럼 “요술”로까지 여길 필요는 없다고 생각한다.

9) 자세한 논의는 Dummett(1991), 102–106면 참조.

제하는 것으로 보인다. 프레게의 의미론에 따를 때 단정 용어들이 나타내는 것은 (물론 그런 것이 있을 경우) 대상이므로, 그 경우 수자들이 나타내는 것은 대상으로 이해되어야 할 것이다. 그리고 만약 “0”이나 “1” 같은 수자가 따로 어떤 것을 나타낸다면 그것이 수 이외에 무엇일 수 있는지 알기 어렵다. 따라서 도식 (3)의 정의항에 나타나는 “n” 대신 수자들의 대입을 허용하려 하면, “n”은 대상으로서 수들에 대해 일반적으로 말하는 데 사용되는 변항으로 이해되어야 할 것 같다. 그러나 이런 견해야말로 지금 우리가 거부하는 견해이다. 왜냐하면 우리는 “1” 같은 수자가 따로 수를 나타내는 것이 아니라 “ φ 인 것이 1개 있다”는 고차 술어 전체가 수 1을 나타내며, 수를 대상이 아니라 고차 개념이라고 간주하기 때문이다.

이런 점에서 정의 (1)과 (2)는 특별한 문제가 없음을 주목할 필요가 있다. 우리는 “0”, “1”이 따로 무슨 뜻을 갖는지 전혀 알지 못하더라도, 그 두 정의에 근거하여 임의의 개념 F에 관해 “F인 것이 0개 있다”, “F인 것이 1개 있다”는 수 진술이 무슨 뜻을 가지는지 이해할 수 있다. 따라서 그 두 정의는 수가 고차 개념이라는 견해와 잘 조화된다. 반면 앞 단락의 논의가 옳다면, 만약 우리가 그 도식에서 “n”을 수자들에 대한 변항으로 간주한다면, 우리는 “G인 것이 1개 있다” 같은 수 진술을 “G인 것이 n개 있다”는 1차 술어와 “1”로 분석하는 일을 허용할 수밖에 없을 것이다. 그리고 그런 분석은 수가 고차 개념이라는 견해에 부적합할 뿐 아니라, 수자가 수를 나타낸다는 가정과 결합될 때 그런 견해와 직접 충돌한다. 하지만 그 대신 도식 (3)에서 “n” 대신 수자들이 대입된다고 간주하지 않을 경우, 우리는 그 도식만으로 “G인 것이 n개 있다”는 형식의 표현이 무슨 뜻을 가지는지 이해하기 어렵다. 따라서 만약 프레게의 셋째 반론이 도식 (3)에서 “n”이 수자들에 대한 변항으로 사용되고 있음을 문제삼는 것으로 이해된다면, 그의 반론은 여전히 유효한 것으로 보인다. 그리고 이런 반론에 대응하기 위해서는 고차 개념으로 이해된 수들 사이에 성립하는 관계를 도식 (3)의 “n”처럼 “0”, “1” 등의 수자들에 대한 변항이 아니라 “ φ 인 것이 0개 있다”, “ φ 인 것이 1개 있다” 같은 고차 술어들을 대입 사례로 갖는 고단계의 변항을 사용하여 표현할 수 있어야 한다.

이 반론들에 어떻게 대응할 수 있는지 보기 전에 몇 가지 역사적 사실을 지적할 필요가 있다. 앞에서 언급한대로 『기초』 56절에 제시된 프레게의 반론은 수를 고차 개념으로 이해하는 프로그램에 대한 직접적인 반론은 아니며, 나는 그가 모순에 마주치기 이전에 그런 프로그램의 실행가능성을 충분히 검토했었다는 추측을 지지할 만한 근거를 알지 못한다.¹⁰⁾ 하지만 모순 발견 이후에 저술되어 『법

10) 이와 달리 헤크는 프레게가 『기초』의 시기에 그런 프로그램의 실행가능성을 검토했을 뿐 아니

칙』 II권(1903)의 부록으로 첨가된 글에는 그가 그런 프로그램을 고려했음을 보여주는 대목이 있다. 그는 개념의 외연 혹은 집합과 관련된 모순을 극복하는 한 방안으로서 수자나 수자 대신 사용되는 집합 표현을 그 자체로는 아무 것도 나타내지 않는 것으로 간주하는 견해를 고려하고서, 그 견해에 관해 다음과 같이 논평한다 :

이 경우 집합명은 전체로서만 지시체를 갖는 기호들의 일부로 간주되어야 할 것이다.
... 분명히 기호가 단순하다면 그 기호의 구분 가능한 부분들이 독자적으로 지시체를 가져서는 안 된다. 이런 경우에 우리가 수에 대한 기호로 간주하고자 하는 것은 실제로는 기호가 아니라 한 기호의 비자립적 부분일 것이다. 기호 “2”의 정의는 불가능할 것이다. 그 대신 우리는 “2”를 비독립적인 구성 요소로서 포함하는 여러 기호들을 설명해야 할 것이지만, 그 기호들이 “2”와 서로 다른 부분들로부터 논리적으로 구성된다고 생각할 수 없다.(Gg II, 255면 참조)

여기서 프레게가 염두에 두고 있는 견해는 수자를 이른바 공범주적 표현으로 간주하는 견해이다. 이 견해에 따르면 수자는 따로 의미를 갖는 유의미한 표현이 아니라 유의미한 표현의 분석불가능한 구성 요소일 뿐이다. 그런데 우리는 그가 이 시기에도 “G인 것이 2개 있다” 같은 형식의 수 진술을 개념 표현 “G”와 “φ인 것이 2개 있다” 같은 고차 술어의 결합으로 분석하고 있음을 주목할 필요가 있다. 그렇다면, 그가 고려하는 견해는 “φ인 것이 2개 있다” 같은 술어를 바로 단순한 표현으로 간주하고 “2”를 그 표현의 분석불가능한 부분으로 간주하는 견해이다.¹¹⁾ 이런 견해에 대한 그의 한가지 반론은 다음과 같다 :

라, 『기초』 56절의 반론의 핵심은 『기초』 82-83절에 묘사된 형식으로 유한 기수들의 무한성을 증명할 수 없다는 데 있다고 주장한다. 그러나 그는 이런 해석을 뒷받침하기 위해 56절의 반론이 잘못된 방식으로 표현되고 있다고 주장한다. Heck(1997), 294-298면 참조. 프레게의 반론을 더 일관된 것으로 이해할 방법이 있는 한 이런 해석은 피하는 것이 옳다고 나는 생각한다. 물론 수가 고차 개념이라는 견해에 근거할 때 그런 증명이 실행가능한지 충분히 검토했더라면 프레게는 『기초』의 시기에도 그것이 불가능함을 알았을 것이다. 그러나 그가 그럴 만한 능력을 가지고 있다는 사실은 그가 그런 능력을 실행에 옮겼다는 것을 함축하지 않는다.

11) 물론 이것만으로 프레게가 여기서 수를 고차 개념으로 이해하는 견해를 고려하고 있다는 추측이 확증되는 것은 아니다. 하지만 나는 다음 이유에서 그런 추측이 설득력이 있다고 믿는다 : 그 경우 “2” 같은 수자는 더 이상이 어떤 것을 나타내는 것으로 간주될 수 없을 뿐 아니라, “2+3=5” 같은 등식들도 더 이상 표면적인 문법에 따라 이해될 수 없을 것이다. 이처럼 수자가 단정 용어라는 것만이 아니라 수자가 어떤 것을 나타낼 가능성까지 거부할 때, 프레게의 의미론 내에서 수를 대상으로 이해할 다른 가능성이 남아 있는지 알기 어렵다. 만약 그런데도 프레게가 어떤 표현이 수를 나타낸다고 생각했다면, 그가 고려할 만한 첫번째 후보는 “φ인 것이 2개 있다” 같은 고차 술어 이외에 무엇일 수 있을까?

그렇다면 그런 비독립적 부분을 문자로 대신하게 허용할 수는 없을 것이다. 왜냐하면 내용으로 볼 때 복합적인 것이 전혀 존재하지 않기 때문이다. 이로 인해 산수 문장이 지니는 일반성은 사라질 것이다.(Gg II, 255면 참조)

반론의 요지는 예를 들어 “G인 것이 2개 있다”는 수 진술에서 “2” 같은 수자의 자리에 문자를 대입할 수 없다는 것이다. 왜냐하면 지금 문제삼는 견해에서는 그런 수 진술이 “G인 것이 6개 있다”는 1차 술어와 “2”라는 수자가 결합된 것으로 분석될 수 없기 때문이다. 프레게가 문제삼는 것은 이처럼 수자를 문자로 교체하는 일이 불가능할 때 수들 일반에 관해서 얘기하는 일이 어떻게 가능하겠는가 하는 것이다. 이런 반론의 한가지 특수한 예는 정의 도식 (3)에 대해 우리가 재구성한 그런 반론일 것이다. 왜냐하면 앞에서 본 것처럼 그 반론에 대응하기 위해서는 도식 (3) 대신에 고차 개념으로서 수들 사이에 일반적으로 성립하는 관계를 설명할 필요가 있기 때문이다.

프레게는 수학적 플라톤주의나 논리주의를 포기하고 난 이후에도 수 진술에 대한 『기초』의 분석을 포기하지 않았다. 「다름슈타트에 관한 논평」(1919)에서 그는 여전히 수의 진술이 1차 개념에 관한 표현과 2차 개념에 관한 표현으로 구성되어 있다고 주장하며, 수 진술에 등장하는 2차 개념들을 어떤 계열 안에 나열할 수 있고 주장한다 :

샘에 근거를 둔 수 진술은 개념에 관한 서술을 포함하기 때문에, 논리적으로 완전한 언어에서 그런 진술을 하는 데 사용되는 문장은 두 부분을 포함하고 있다. 첫째 부분은 서술이 이루어지는 개념의 기호이고, 둘째 부분은 2차 개념의 기호이다. 이런 2차 개념들은 하나의 계열을 형성하는데, 이런 2차 개념들 중 하나가 주어질 때 우리가 그 다음의 2차 개념을 설명할 수 있는 규칙이 존재한다.(Ns, 277)

마지막 문장은 그가 이 시기에 2차 개념의 계열 <없음, 유일함, 둘임, . . .>에 등장하는 임의의 인접한 두 항들 사이의 관계를 설명할 수 있었다는 것을 암시한다. 그런데 이런 설명이 정의 도식 (3)과 마찬가지로 『법칙』 II권 부록에서 그 자신이 제기한 반론에도 대응할 수 없는 것이라고 추측하는 것은 그리 설득력이 없을 것이다. 그런데도 그는 수를 고차 개념으로 이해하는 견해를 여전히 의심하고 있다 :

그러나 아직 우리는 산수의 수들, 즉 대상들을 가지고 있지 못하며, 개념들을 가지고

있을 뿐이다. 우리는 어떻게 그런 개념들로부터 의문의 여지가 없게 산수의 수들에 이 를 수가 있는가? 혹은 산수의 수들은 전혀 없는 것인가? 수 기호는 그런 2단계 개념에 대한 기호의 비자립적인 부분일 뿐인가?(Ns, 같은 곳)

다음 절들에서 우리의 주요 목표는 그런 의심이 어디에서 비롯되는지 이해하는 것이다.

3. 프로그램의 실행가능성 I : 정의

나는 이 절에서 수가 고차 개념이라는 견해에 근거하여 논리주의를 정당화하려 할 때 필요한 기초적인 정의들을 제시하려 한다. 이를 통해 우리는 앞 절에서 논의된 반론이 극복불가능한 것이 아님을 볼 것이다. 우리가 정의해야 하는 산수의 개념들은 세가지 종류로 나눌 수 있다. 첫째로 프레게 산수 이론에서 가장 기본적인 개념 중 하나인 수 동일성 개념의 뜻을 고차 개념들 사이의 관계로 정의해야 한다. 이 정의가 가능하다면 수 동일성에 관한 앞 절의 반론에 대응할 수 있을 것이다. 둘째로 수 계열의 항으로서 고차 개념 각각을 형성할 수 있기 위해서는 최초의 항과 인접한 항들 사이의 관계를 정의해야 한다. 고차 개념으로서 수들 사이의 전자 관계를 일반적으로 정의하면, 최초의 항의 정의는 앞 절의 정의(1)로 충분하다. 그리고 이 일이 가능하다면 앞 절의 나머지 반론에도 대응할 수 있다. 셋째로 프레게가 구체화한 기수 이론의 기본 법칙들(공리들)을 정식화하려면 관계의 조상성 및 약한 조상성, 그리고 유한 기수 개념을 정의해야 할 것이다.

3.1. 수의 동일성¹²⁾

먼저 수의 동일성을 살펴 보자. 수의 동일성을 적합하게 설명하려면, 우선 어떤 경우에 두 2차 개념을 동일하다고 할 수 있는지를 설명해야 할 것이다. 그런데, 프레게는 동일성을 대상들 사이의 관계로 간주하며, 그의 차원 구분에 따라 개념들 사이에 동일성 관계를 적용하는 일은 불가능하다. 우리는 이제 수를 2차 개념으로 간주하므로, 대상들 사이에 성립하는 동일성 관계를 2차 개념들 사이의 관계로 바꿀 수 있는 방법이 필요하다. 그런데, 프레게는 개념들 사이에도 동일성과 유비되는 관계가 성립할 수 있음을 인정하였다. 대상 a와 b가 같다는 것은 모든

12) 수 동일성의 정의에 대한 논의는 대부분 Dummett(1991), 9장과 11장에 의존하고 있다.

개념 F에 대해 a가 개념 F 아래 속할 경우 b도 개념 F 아래 속하고 그 역도 성립한다는 것을 말한다. 이와 유사하게, 모든 대상 a에 대해 a가 개념 F 아래 속한다면 개념 G 아래에도 속하고 그 역도 성립한다면, 즉 개념 F와 G가 상호 종속된다면, 프레게는 개념 F와 G 사이에도 동일성과 유사한 관계가 성립한다고 인정하였다. 개념들 사이에 성립하는 동일성과 유사한 이런 관계를 “공연 관계”라고 부르자. 그렇다면, 우리는 임의의 두 2차 개념에 관해서도 공연 관계를 얻을 수 있을 것이다. 즉, 모든 1차 개념 F에 대해 그 개념이 2차 개념 M 아래 속할 경우 2차 개념 N 아래 속하고 그 역도 성립한다면, 우리는 2차 개념 M과 N 사이에도 공연 관계가 성립한다고 간주할 수 있다. 따라서 두 2차 개념 사이에 공연 관계는 다음과 같이 정식화된다 :

$$* M \doteq N \equiv \text{df } \forall F(M(F) \leftrightarrow N(F))$$

이 정의에서 “M”과 “N” 대신에 우리가 수를 나타내는 것으로 간주하는 2차 술어들을 대입할 수 있고, 그에 따라 두 수가 같다는 것은 수인 두 2차 개념 사이에 공연 관계가 성립한다는 것을 말한다.

이제 수의 동일성을 설명하기 위해 남은 일은 수로 간주되는 2차 개념들이 어떤 경우에 서로 공연 관계가 성립하는지를 설명해 주는 일이다. 이를 위해서는 우선 우리가 수로 간주하는 2차 개념들을 그렇지 않은 2차 개념들과 구분할 수 있어야 한다. 이 때 우리는 그런 구분을 위해 프레게의 동수 관계에 의한 수 동일성에 관한 설명을 사용할 수 있다. 먼저 다음 세 종류의 2차 개념들을 예로 들어보자 :

- (a) 모든 φ 는 천체이다. 어떤 동물은 φ 이다.
- (b) φ 는 3개보다 많이 있다. φ 는 무한히 많이 있다.
- (c) φ 는 정확히 4개 있다. φ 는 3개보다 하나 많이 있다.

여기서 (b)와 (c) 형식의 2차 술어들은 (a) 형식의 2차 술어들과는 달리 우리가 “ φ 는 얼마나 많이 있는가?” 하는 물음에 대답하는 데 사용하는 2차 개념의 표현들이다. 그리고, (b) 형식의 2차 술어들과는 달리 (c) 형식의 2차 술어들은 “ φ 는 몇 개인가?” 혹은 “ φ 는 정확히 몇 개 있는가?” 하는 물음에 대답해주는 2차 개념의 표현이다. 즉, 우리가 수로 간주하는 2차 개념의 표현들은 (c) 형식의 술어들이다.

따라서, 우리가 수로 간주하는 2차 개념의 특징들을 표현하기 위해서는 (b)와 (c) 형식의 술어들이 (a) 형식의 술어들과 다른점, (c) 형식의 술어들이 (b) 형식의 술어들과 다른점을 정식화해야 한다.

먼저, 첫 번째의 차이를 정식화해 보자. 목성의 위성이 마름모의 변과 똑같이 많다고 하자. 즉, “목성의 위성”이라는 개념이 “마름모의 변”이라는 개념과 동수라고 하자. 이 경우, 우리는 목성의 위성이 모두 천체라고 해서 마름모의 변도 모두 천체라고 추리할 수 없다. 즉, “목성의 위성”이라는 1차 개념이 “모든 φ 는 천체이다”라는 2차 개념 아래 속한다고 해서, 그와 동수인 “마름모의 변”이라는 1차 개념도 “모든 φ 는 천체이다”라는 2차 개념 아래 속한다고 간주할 수 없다. 반면, 목성의 위성이 3개보다 많다면, 우리는 마름모의 변도 3개보다 많다고 간주할 수 있다. 왜냐하면, 목성의 위성은 마름모의 변과 똑같이 많다고 가정했기 때문이다. 마찬가지로, 목성의 위성이 5개보다 하나 적게 있다면, 마름모의 변도 똑같이 많이 있으므로, 마름모의 변도 5개보다 하나 적게 있다고 추리할 수 있다. 따라서, 어떤 1차 개념 F 가 (a)의 형식의 어떤 2차 개념 E 아래 속할 경우 동수인 1차 개념 G 도 그 2차 개념 E 아래 속한다고 추리할 수 없지만, 우리는 개념 F 가 (b)나 (c) 형식의 어느 2차 개념 M 아래 속한다는 데서, 그와 동수인 G 도 2차 개념 M 아래 속한다고 추리할 수 있다. 즉 (b)나 (c) 형식의 2차 개념들에 대해서는 다음 원리가 성립한다 :

$$* \forall F \forall G [F \approx G \rightarrow (M(F) \rightarrow M(G))].$$

이 원리는 아직 우리가 수로 간주하는 개념의 표현들을 앞의 (b) 형식의 2차 술어들과 구분해 주지는 못한다. 따라서, 이제 우리에게 필요한 일은 (b) 형식의 술어들에는 성립하지 않고 (c) 형식의 술어들에만 성립하는 원리를 찾는 일이다.

(c) 형식의 술어들이 임의의 1차 개념 아래 속하는 대상들이 정확히 몇 개인지에 관해 대답해 주므로, 같은 대답이 주어지는 모든 1차 개념들은 동수일 것이다. 다시 앞의 예를 사용하여 말한다면, 목성의 위성이 정확히 4개 있고 마름모의 변이 정확히 4개 있다면, 목성의 위성과 마름모의 변은 똑같이 많이 있다. 반면, (b) 형식의 어떤 술어가 두 1차 개념에 관해 같은 대답을 해주더라도, 그 두 1차 개념이 반드시 동수인 것은 아니다. 예를 들어, 지구의 위성은 5개보다 적게 있고 마름모의 변도 5개보다는 적게 있지만, 지구의 위성이 마름모의 변과 똑같이 많이 있는 것은 아니다. 따라서, 우리가 수로 간주하는 2차 개념들에만 성립하는 원리

는 다음과 같이 정식화될 수 있다 : “임의의 1차 개념 F 가 2차 개념 M 아래 속하고 임의의 1차 개념 G 도 2차 개념 M 아래 속한다면, F 와 G 는 동수이고, 그 역도 성립한다.” 이제, 이 원리는 2차 개념들 중에서 우리가 수로 간주하는 2차 개념들에만 성립하므로, 우리는 이 설명을 기수의 개념에 관한 설명으로 삼을 수 있다.

$$* \text{ Card}(M) \equiv \text{df } \forall F[M(F) \rightarrow \forall G(F \approx G \leftrightarrow M(G))].$$

이제 우리는 앞의 설명을 만족하는 임의의 2차 개념을 수로 간주할 수 있다. 그러면, 두 수가 같다는 것은 앞의 설명을 만족하는 2차 개념들이 서로 공연이라는 것을 말한다.

이런 설명에 근거할 때 수의 동일성과 관련된 앞 절의 반론에 대응할 수 있는지 살펴 보자. 그 반론에 대응하기 위해서는 임의의 1차 개념 F 에 대해 다음 문장을 증명할 수 있어야 한다 :

$$* M(F) \& N(F) \rightarrow \forall G(M(G) \leftrightarrow N(G)).$$

이것을 증명하기 위해서는 2차 개념 M 과 N 이 상호 종속된다는 것을 보여야 한다. 먼저, M 과 N 이 기수라고 하고, 개념 F 가 M 과 N 아래 속한다고 하자. 만일 임의의 개념 G 가 M 아래 속한다면, M 은 기수이므로, F 와 G 는 동수이다. 그런데, F 가 N 아래 속하고 N 도 기수이므로, F 와 동수인 G 도 N 아래 속한다. 거꾸로, 임의의 개념 G 가 N 아래 속한다면, N 은 기수이므로, F 와 G 는 동수이다. 그런데, F 가 M 아래 속하고 M 도 기수이므로, F 와 동수인 G 도 M 아래 속한다. 따라서, M 과 N 은 상호 종속된다. 이렇게 해서 우리는 수의 동일성과 관련된 프레게의 반론을 극복한 것으로 보인다.

3.2. 전자 관계¹³⁾

다음으로 수 계열의 두 인접항들 사이의 관계를 일반적으로 정의할 수 있는지 살펴 보자. 우리는 예를 들어 “ φ 가 0개 있다”에서 “0”이 수를 나타내는 것이 아니라, 그 수자를 비독립적인 구성 요소로 포함하는 그 2차 술어 전체가 수를 나타낸다고 간주한다. 이런 견해에 근거한다면 앞 절의 정의 (1)과 (2)는 2차 술어 “ φ

13) 전자 관계의 정의에 관한 논의의 많은 부분은 Heck(1997), 292-298면에 의존하고 있다.

가 0개 있다”와 “ φ 가 1개 있다”의 설명으로서 문제가 없다. 이에 따라, 우리가 얻고자 하는 수 계열로서 2차 개념들의 계열에서 처음 두 항에 대한 설명은 이미 획득되었다. 이제 문제는 이 항들을 기초로 그 다음에 나오는 항들을 얻을 수 있는 일반적인 설명을 제시하는 것이다.

우리는 앞 절의 정의 도식 (3)을 그대로 사용할 수 없지만, 그 도식으로부터 두 인접항 사이의 관계가 일반적으로 어떤 것인지에 관한 시사점을 얻을 수 있다. 우리가 얻고자 하는 수 계열의 둘째 항인 2차 개념 아래 1차 개념 F가 속한다면, 도식 (3)에 따라 개념 F 아래에는 오직 하나의 대상이 속한다. 그렇다면, 개념 F 아래에는 어떤 대상이 속하지만, “개념 F 아래 속하지만, x와 다른”이란 개념 아래에는 아무 대상도 속하지 않을 것이다. 왜냐하면, 이 후자의 개념 아래 속하는 대상이 있다면, 개념 F 아래에는 하나보다 많은 대상이 속할 것이기 때문이다. 거꾸로, 개념 F 아래 속하는 대상이 있지만, “개념 F 아래 속하지만, x와 다른”이란 개념 아래 속하는 대상이 없다면, 개념 F 아래에는 오직 하나의 대상이 속할 것이다. 유사한 방식으로 우리의 수 계열의 셋째 항인 2차 개념 아래 1차 개념 G가 속한다고 하자. 그러면, 개념 G 아래에는 두 개의 정확히 대상이 속할텐데, 이 경우 개념 G 아래에는 어떤 대상 y가 속하고, “개념 G 아래 속하지만, y와 다른”이란 개념 아래에는 정확히 하나의 대상이 속할 것이다. 거꾸로 이 두 조건이 성립한다면 개념 G 아래에는 정확히 두 개의 대상이 속할 것이다.

이제 우리가 얻고자 하는 계열에서 어떤 항 M 이 그 바로 다음에 나오는 항 N 에 대해 가지는 일반적인 관계를 “2차 개념 M 은 2차 개념 N 의 전자이다”라고 표현한다고 하자. 그러면, 그 표현은 앞에 언급한 예들을 일반화하여 다음과 같이 설명될 수 있을 것이다 : “2차 개념 N 아래 1차 개념 F가 속할 경우, 그리고 그 경우에만 F 아래 어떤 대상 x가 속하고 ‘F 아래 속하지만 x와 다른’이라는 1차 개념은 2차 개념 M 아래 속한다.” 따라서, 우리는 “2차 개념 M 은 N 의 전자이다”를 “ $\text{Pred}(M,N)$ ”으로 쓰면, 그 설명을 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$* \text{ Pred}(M,N) \equiv \text{df } \forall F [N_x(Fx) \leftrightarrow \exists x(Fx \& M_y(Fy \& y \neq x))].^{14)}$$

14) 물론 전자 관계를 다른 방식으로 정식화할 수도 있을 것이다 : (*) $\text{Pred}(M,N) \equiv \text{df } \exists F \exists x [Fx \& N_y(Fy) \& M_y(Fy \& y \neq x)]$. 하지만 이 경우 두가지 점을 주의해야 한다. 첫째, 그 경우 우리가 4절에서 제시할 기수 이론의 공리들도 다른 방식으로 정식화되어야 하며, 그에 따라 공리들의 증명 절차도 달라지게 된다. 둘째, 본문의 정식화는 고차 개념으로서 수들 사이에 성립하는 공연 관계를 직접 이용하고 있는 반면, 정식화 (*)는 그런 공연 관계에 의존해서 우리가 증명한 정리에 의존한다는 점이다. 이 두 정식화의 차이 및 그 차이가 공리들의 증명에 미치는 영향에 관

이제 이 정의를 앞 절의 정의 (1)-(2)와 결합하면, 우리가 수들로 간주하는 2차 개념들의 계열을 얻을 수 있다. 그 계열의 셋째 항은 전자 관계의 정의에 따라 $\exists x (\varphi x \& \exists_{1y}(\varphi y \& y \neq x))$ 이 되고, 이것을 다시 “ $\exists_2 x \varphi x$ ”로 표시하여 전자 관계의 정의를 적용하여 넷째 항 $\exists x (\varphi x \& \exists_{2y}(\varphi y \& y \neq x))$ 를 얻을 수 있다. 이런 식으로 진행하면, 수를 나타내는 2차 술어에 등장하는 수자들을 독립적인 구성 요소로 간주하지 않으면서도, 수들로 간주된 2차 개념의 계열을 얻을 수 있다. 이렇게 해서, 우리는 앞 절에서 정의 도식 (3)에 대해 제시한 반론에 대응할 수 있고, 수들을 2차 개념들로 간주하는 일이 불가능하지는 않은 것으로 보인다.

3.3. 관계의 조상성 및 유한 기수의 정의

이렇게 해서 우리는 수 동일성 관계와 전자 관계를 정의하였다. 기수 이론의 근본 법칙들을 정식화하고 그 법칙들을 증명하기 위해서는 그런 개념들 이외에도 몇 가지 개념을 더 정의할 필요가 있다. 프레게는 『기초』에서 기수 계열이 가지는 근본적인 속성을 어떻게 증명할 수 있는지 묘사하기에 앞서 이미 『표기법』에서 대상들의 계열이 일반적으로 가지는 속성을 그의 고단계 논리학 내에서 증명하였다. 그리고 그는 그런 증명에서 관계들이 가지는 조상성 및 약한 조상성을 기초적인 개념들로 사용하였다. 먼저 이 개념들을 정의해 보자.

프레게의 조상성 정의에 따르면, “대상 a 가 Q -계열에서 b 앞에 나온다”는 것은 “대상 a 가 관계 Q 를 가지는 어느 대상이든지 Q -계열에서 유전되는 모든 개념 F 아래 속할 경우 b 도 개념 F 아래 속한다”는 것을 말한다. 이제 우리에게 필요 한 조상성의 정의는 “대상 a 가 Q -계열에서 대상 b 앞에 나온다”는 1차 관계 Q 의 속성에 관한 것이 아니라 “2차 개념 M 은 K -계열에서 2차 개념 N 앞에 나온다”는 3차 관계 K 의 속성에 관한 정의이다. “ Λ ”를 3차 개념의 표현으로 간주한다면, 우리는 먼저 “개념 Λ 는 K -관계에서 유전된다”는 것을 “임의의 2차 개념 T 가 개념 Λ 아래 속할 경우 T 가 관계 K 를 갖는 어느 2차 개념 X 도 개념 Λ 아래 속한다”로 정의할 수 있다. “개념 Λ 는 K -관계에서 유전된다”는 표현을 “ $\text{Her}(\Lambda, K)$ ”로 정식화한다면, 유전성의 정의는 다음과 같이 정식화할 수 있다 :

$$* \text{ Her}(\Lambda, K) \equiv \text{df } \forall T (\Lambda(T) \rightarrow (\forall X (K(T, X) \rightarrow \Lambda(X))).$$

해서는 Wright(1983), 36-40 참조.

이제 우리는 3차 관계 K 의 조상성을 “2차 개념 M 이 관계 K 를 가지는 어느 2차 개념이든지 K -계열에서 유전되는 모든 개념 Λ 아래 속한다면, 2차 개념 N 도 개념 Λ 아래 속한다”로 설명할 수 있다. 이것은 다음과 같이 정식화된다 :

$$* \mathcal{F}(K)(M,N) \equiv \text{df } \forall \Lambda (\text{Her}(\Lambda, K) \rightarrow (\forall X (K(M,X) \rightarrow \Lambda(X)) \rightarrow \Lambda(N))$$

관계 Q 가 가지는 약한 조상성은 “대상 a 는 대상 b 로 끝나는 Q -계열에 속한다”로 표현되며, 프레게는 그 표현을 “대상 a 는 Q -계열에서 대상 b 앞에 나오거나 b 와 같다”로 설명하였다. 이제 우리에게 필요한 표현은 “2차 개념 M 은 2차 개념 N 으로 끝나는 K -계열에 속한다”이다. 그리고, 우리는 앞에서 대상들 사이의 동일성과 유사한 2차 개념들 사이의 관계로서 공연 관계를 정의하였다. 따라서, 우리는 이제 필요한 표현을 “2차 개념 M 은 K -계열에서 2차 개념 N 앞에 나오거나, 두 개념은 공연이다”로 설명할 수 있고, 이 설명은 다음과 같이 정식화된다 :

$$* \mathcal{F}^{\sim}(K)(M,N) \equiv \text{df } \neg \mathcal{F}(K)(M,N) \rightarrow M \sim N. 15)$$

기수 이론의 근본 법칙들을 정식화하기 위해 더 정의할 필요가 있는 것은 유한 기수 개념이다 : 즉, “2차 개념 N 은 유한 기수이다.” 프레게는 유한 기수를 0으로 시작하는 기수 계열에 속하는 대상으로 설명하였다. 이제 우리에게 기수 계열의 최초의 항은 앞에 정의한 2차 개념 $\exists_0 x \varphi x$ 이므로, 우리는 앞의 표현을 “2차 개념 N 은 $\exists_0 x \varphi x$ 로 시작하는 기수 계열에 속한다”로 설명할 수 있다. “2차 개념 N 은 유한 기수이다”는 표현을 “Fin(N)”으로 쓴다면, 이 설명은 다음과 같이 정식화된다 :

$$* \text{Fin}(N) \equiv \text{df } \mathcal{F}^{\sim}(\text{Pred})(\exists_0 x \varphi x, N)$$

4. 프로그램의 실행가능성 II : 증명

15) 물론 피정의항 “ $\mathcal{F}^{\sim}(K)(M,N)$ ”에서 웃첨자 “ \sim ”은 따로 의미를 갖는 독립적 구성 요소가 아니다. 그런 웃첨자를 사용한 이유는 다만 조상 관계의 표현에 해당 개념들 사이의 공연 관계에 대한 표현을 선언으로 첨가할 때 약한 조상 관계의 표현이 얻어진다는 점을 더 쉽게 인식시키려는 데 있을 뿐이다.

우리의 목표는 고단계 논리학 내에서 앞 절에 제시된 정의들로부터 프레게의 기수 이론의 근본 법칙들을 도출하는 것이다. 이 도출에서 내가 이용하는 방법은 프레게가 『표기법』과 『법칙』에서 수행했던 증명들을 고단계 논리학 안에서 새로운 정의들을 감안하여 모방하는 것이다. 이런 방법은 프레게가 수를 고차 개념으로 간주하는 논리주의를 고려하였을 경우 그가 수행했을 만한 시도들이 어떤 것이었을지 추리하는 데 도움이 된다는 잇점이 있다. 이 일은 다음 두 단계로 수행된다.

첫째 단계에서 나는 도출이 수행되는 고단계 논리학의 연역 장치들을 제시하고, 그 연역 장치들 내에서 프레게가 『표기법』의 III부에서 제시한 증명들을 관계의 조상성에 관한 새로운 정의에 맞게 재구성하려 한다.

둘째 단계에서는 프레게가 기수 이론의 근본 법칙들로 간주한 원리들을 고단계 논리학 내에서 정식화한 다음, 프레게가 『법칙』의 II부에서 수행한 증명들을 참조하여 고단계 논리학 내에서 그 원리들을 증명해보려 한다.

4.1. 고단계 논리학의 원리들

우리가 사용할 고단계 논리학의 연역 장치들은 프레게가 『표기법』에서 사용한 연역 장치들과 크게 다르지 않다. 다만 다음 몇가지 차이점은 언급할 가치가 있다. 우선 우리는 프레게와는 달리 보통의 진리함수적 추리 원리들, 양화 추리 원리들, 동일성 추리 원리들을 자유롭게 사용할 것이다. 특히 우리는 프레게가 그의 논리학의 공리로 사용한 보면 예화의 원리나 동일성 대치율을 추리 규칙으로 사용할텐데, 그로 인해 우리는 다음의 고단계 추리 원리들도 첨가된다 :

- * 보면 예화: $\forall T(A(T)) / \therefore A(M)$.
- * 공연성 대치 규칙: (1) $M \equiv N / \therefore \forall F(M(F) \leftrightarrow N(F))$.
 (2) $\forall F(M(F) \leftrightarrow N(F)) / \therefore M \equiv N$.

다음으로 우리는 이름과 1차 술어의 대입만을 허용하지 않고 고차 술어들의 대입도 허용한다. 그런데, 『표기법』과 『법칙』에서 프레게가 사용한 대입 규칙은 내포 공리 도식과 동치이므로,¹⁶⁾ 우리는 임의의 n차 개념과 n차 관계에 관해 다

16) Boolos(1985), 337. 나는 “the axiom schema of comprehension”을 “내포 공리 도식”이라고 번역하였다. 이것은 그리 적절한 번역으로 여겨지지는 않지만, 나는 아직 다른 번역을 찾지 못했다. 집

음의 고단계 내포 공리에 근거하여 대입을 수행한다.¹⁷⁾

- * $\exists X^n \forall P^{n-1} (X^n(P^{n-1}) \leftrightarrow \Sigma^n(P^{n-1}))$. [단 X 는 Σ 에서 자유가 아니다.]
- * $\exists X^n \forall P^{n-1} \forall O^{n-1} (X^n(P^{n-1}, O^{n-1}) \leftrightarrow \Sigma^n(P^{n-1}, O^{n-1}))$. [단 X 는 Σ 에서 자유가 아니다.]

이제 우리가 할 일은 고단계 논리학의 원리들에 근거해서 조상성과 약한 조상성의 정의로부터 관계 일반에 관한 몇 가지 속성들을 도출하는 것이다. 나는 그런 속성을 중에서 기수 이론의 근본 법칙들을 증명하는 데 필수적인 원리들만을 증명하려 한다. 우선 조상성에 관한 귀납 원리와 약한 조상성에 관한 귀납 원리는 다음과 같이 정식화된다 :

- (귀납 1) $\mathcal{F}(K)(M, N) \rightarrow (\text{Her}(\Lambda, K) \rightarrow (\Lambda(M) \rightarrow \Lambda(N)))$.
- (귀납 2) $\mathcal{F}^*(K)(M, N) \rightarrow (\text{Her}(\Lambda, K) \rightarrow (\Lambda(M) \rightarrow \Lambda(N)))$.¹⁸⁾

- * (귀납 1)의 증명 : M 이 K -계열에서 N 앞에 나온다고 하고, 개념 Λ 가 K -계열에서 유전된다고 하자. 그러면, 유전성의 정의에 따라, M 이 개념 Λ 아래 속한다면, M 이 관계 K 를 가지는 모든 2차 개념도 개념 Λ 아래 속한다. M 이 개념 Λ 아래 속한다고 하자. 그러면, M 이 관계 K 를 가지는 모든 2차 개념도 개념 Λ 아래 속한다. 그런데, 조상성의 정의에 따라, 개념 Λ 가 K -계열에서 유전되고, M 에 대해 관계 K 를 가지는 모든 2차 개념이 개념 Λ 아래 속할 경우, N 도 개념 Λ 아래 속한다. 조건이 모두 충족되었으므로, N 는 개념 Λ 아래 속한다.
- * (귀납 2)의 증명 : 다음으로, 약한 조상성에 대한 정의에 따르면, M 이 N 으로 끝나는 K -계열에 속한다면, M 은 K -계열에서 N 앞에 나오거나 N 과

함에 관한 유사한 원리가 “집합 추상화 원리”로도 불린다는 사실과 프레게의 의미론을 감안한다면, 아마 아래 제시된 두 원리를 각각 “개념 추상화 원리”와 “관계 추상화 원리”로 번역하는 것도 나쁘지 않을 것 같다.

17) 개념들의 차원에 관한 프레게의 이론에서는 n -차원의 개념에 관한 서술은 같은 n -차원의 술어에 의해 이루어질 수 없기 때문에, 개념의 외연이나 집합을 가정하지 않는 한 모순의 염려는 없다. Demopoulos(1994), 245-246 참조.

18) (귀납 1)은 『표기법』의 정리 (81) 및 『법칙』의 정리 (128)에 상응하는 고단계의 원리이며, (귀납 2)는 『법칙』의 정리 (144)에 상응하는 고단계의 원리이다.

공연이다. 앞에 보인 귀납 원리에 따라, M 이 K -계열에서 N 앞에 나올 경우는 보았으므로, M 이 N 과 공연일 경우만 보면 된다. 그런데, 공연 원리에 따라, M 이 N 과 공연이면, 모든 3차 개념 Λ 에 관해 M 이 Λ 아래 속한다면 N 도 Λ 아래 속한다.

다음으로 우리가 증명해야 할 것은 관계의 조상성에 관한 원리들이다. 이 원리들 중 기수 이론의 근본 법칙들을 증명하는 데 사용되는 주요 예비 정리들은 다음 두 문장이다 : “ M 이 N 에 대해 관계 K 를 가질 경우, M 은 K -계열에서 N 앞에 나온다”, 그리고 “ M 가 K -계열에서 N 앞에 나오고, N 가 Ω 에 대해 관계 K 를 가질 경우, M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나온다.” 이 두 원리는 다음과 같이 정식화된다 :

$$(조상 1) K(M,N) \rightarrow \mathcal{F}(K)(M,N).$$

$$(조상 2) \mathcal{F}(K)(M,N) \rightarrow (K(N,\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(K)(M,\Omega)).^{19)}$$

* (조상 1)의 증명 : 먼저 (i) M 이 N 에 대해 관계 K 를 가진다고 하자. 그리고, (ii) 임의의 개념 Λ 가 임의의 계열 K 에서 유전되고, (iii) M 이 관계 K 를 가지는 모든 2차 개념이 개념 Λ 아래 속한다고 하자. 그러면, 우리는 (iii)과 (i)로부터 보편 예화에 의해 N 도 개념 Λ 아래 속한다는 것을 얻을 수 있다. 조상성의 정의에 따라, 모든 개념 Λ 에 대해, (ii)와 (iii)일 경우 N 도 개념 Λ 아래 속한다면, M 은 K -계열에서 N 앞에 나온다. 그런데, (i)을 가정하였으므로, 그 조건은 충족된다.

* (조상 2)의 증명 : 이제 다시 (i) M 이 K -계열에서 N 앞에 나오고, (ii) N 이 Ω 에 대해 관계 K 를 가진다고 하자. 그러면, (i)에 따라, 개념 Λ 가 K -계열에서 유전되고, M 에 대해 관계 K 를 가지는 모든 2차 개념이 개념 Λ 아래 속한다는 가정에서, N 가 개념 Λ 아래 속한다는 것이 도출된다. 유전성의 정의에 따라, N 가 개념 Λ 아래 속한다면, N 가 관계 K 를 가지는 어느 2차 개념이든지 개념 Λ 아래 속한다. 따라서, N 가 관계 K 를 가지는 어느 2차 개념이든지 개념 Λ 아래 속한다. 그런데, (ii)에 따라, N 는 Ω 에 대해 관계 K 를 가지므로, Ω 도 개념 Λ 아래

19) (조상 1)은 『표기법』의 정리 (91) 및 『법칙』의 정리 (131)에 상응하는 고단계의 원리이며, (조상 2)는 『표기법』의 정리 (96) 및 『법칙』의 정리 (129)에 상응하는 고단계의 원리이다.

속한다. 그러면, 우리는 조상성의 정의에 따라, M 는 K -계열에서 Ω 앞에 나온다는 것을 도출할 수 있다.

지금 증명한 문장들과 약한 조상성의 정의를 사용하여 우리는 “ M 이 N 으로 끝나는 K -계열에 속하고, N 이 Ω 에 대해 관계 K 를 가진다면, M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나온다”는 원리, 그리고 “ M 이 N 으로 끝나는 K -계열에 속하고, N 이 Ω 에 대해 관계 K 를 가진다면, M 은 Ω 로 끝나는 K -계열에 속한다”는 원리를 도출할 수 있다.

(약한 조상1) $\mathcal{F}^{\sqsubseteq}(K)(M,N) \rightarrow (K(N,\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(K)(M,\Omega))$.

(약한 조상2) $\mathcal{F}^{\sqsubseteq}(K)(M,N) \rightarrow (K(N,\Omega) \rightarrow \mathcal{F}^{\sqsubseteq}(K)(M,\Omega))$.²⁰⁾

* (약한 조상 1)의 증명 : 먼저, (i) M 이 N 으로 끝나는 K -계열에 속한다고 하고, (ii) N 이 Ω 에 대해 관계 K 를 가진다고 하자. (i)에 따라, M 은 K -계열에서 N 앞에 나오거나 N 와 같다. 첫째로, M 이 N 과 공연이라고 하자. 그러면, (ii)에 따라 M 은 Ω 에 대해 관계 K 를 가지므로, (조상1)에 따라 M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나온다. 둘째로, M 이 K -계열에서 N 앞에 나온다고 하자. 그러면, (조상 2)와 (ii)에 따라 M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나온다. 결국 둘 중 어느 경우든지 M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나온다.

* (약한 조상 1)의 증명 : M 이 K -계열에서 Ω 앞에 나온다면, M 은 K -계열에서 Ω 앞에 나오거나 Ω 와 공연이다. 약한 조상성의 정의에 따라, M 이 K -계열에서 Ω 앞에 나온다면, M 은 Ω 로 끝나는 K -계열에 속한다. 이 사실을 (약한 조상1)과 결합하면, 우리는 (약한 조상2)를 얻는다.

4.2. 기수 이론의 공리들의 증명

이렇게 해서 우리는 산수의 근본 법칙들을 증명하기 위해 필수적으로 가정되는 관계의 일반의 주요 속성을 고단계 논리학 내에서 증명할 수 있음을 보았다.

20) (조상 1)은 『표기법』의 정리 (102) 및 『법칙』의 정리 (132)에 상응하는 고단계의 원리이며, (조상 2)는 『표기법』의 정리 (104) 및 『법칙』의 정리 (130)에 상응하는 고단계의 원리이다.

이제 문제는 기수 이론의 근본 법칙들을 증명할 수 있는가 하는 것이다.

이 일을 수행하기 전에 우리가 기수 이론의 근본 법칙으로 간주하는 것이 무엇인지 분명히 해야 한다. 『법칙』에서 프레게는 논리적 공리들을 따로 제시하였을 뿐 페아노가 한 것처럼 기수 이론을 따로 공리화하지 않았는데, 어떤 원리들을 그의 기수 이론의 근본 법칙으로 간주해야 하는가? 하지만 헤크가 잘 보여준 것처럼 그는 데데킨트-페아노 공리들처럼 유한 기수 계열의 근본 속성들을 표현해 주는 원리들을 제시하였다.²¹⁾ 그 원리들은 다음과 같다 :

- (A1) 전자 관계는 함수적이다.
- (A2) 어느 유한수도 기수 계열에서 자기 자신 앞에 나오지 않는다.
- (A3) 모든 유한수는 후자를 갖는다.
- (A4) 유한 기수는 0으로 시작하는 기수 계열에 속하는 수이다.

전자 관계가 함수적이라면, 같은 수는 언제나 같은 후자를 갖는다. 즉, 전자 관계가 형성하는 기수 계열은 여러 갈래로 나뉘어지지 않는다. 또한 기수 계열에서 어느 대상도 자기 자신 앞에 나오지 않는다면, 그 계열에서는 어느 대상도 자기 자신에게 되돌아오지 않는다. 그리고, 모든 유한 기수가 후자를 가진다면, 유한 기수의 계열은 끝없이 계속된다. 따라서, 유한 기수의 계열은 0으로 시작하여 여러 갈래로 나뉘어지지 않고, 되돌림이 없고, 끝없이 계속되는 계열이다. 이처럼 프레게의 기수 이론의 공리들은 유한 기수들이 형성하는 계열에 관한 직관적으로 명확한 설명을 제공하며, 자연수들이 형성하는 계열에 관한 우리의 이해를 정확히 반영한다. 또한 그 원리들로부터 데데킨트-페아노의 공리들을 도출하는 일은 어렵지 않다.²²⁾

우선 증명에 앞서 앞의 원리들을 정식화해 보자. (A1)을 정식화하기 위해서는 대상들 사이의 관계의 함수성을 2차 개념들 사이의 관계의 함수성으로 전환할 필요가 있다 : 즉, 2차 개념 T 가 2차 개념 X 의 전자이고, T 가 2차 개념 Ω 의 전자라면, 개념 X 와 Ω 는 공연이다. 다른 공리들을 정식화하는 데는 어려움이 없다. 우리는 그 공리들을 다음과 같이 정식화한다 :²³⁾

21) Heck(1993), 283-285 및 Heck(1995), 321-327 참조.

22) 박준용(1999), 158-162 참조.

23) 기수 이론의 공리들의 정식화와 증명의 개요는 헤크의 논의에 많이 빚지고 있다. Heck(1997), 292-296 참조. 필자의 논의의 새로운 점은 『법칙』의 정리 (145)에 대한 프레게의 증명을 모방하여 (A2)를 증명가능성을 충분히 재구성해 본 데 있다.

- (A1) $\forall T \forall X [\text{Pred}(T, X) \rightarrow \forall Q (\text{Pred}(T, Q) \rightarrow X \equiv Q)]$.
- (A2) $\forall M (\text{Fin}(M) \rightarrow \neg \exists F (\text{Pred}(M, M)))$.
- (A3) $\forall M (\text{Fin}(M) \rightarrow \exists N (\text{Pred}(M, N)))$.
- (A4) $\text{Fin}(N) \leftrightarrow \exists F (\text{Pred}(\exists x \varphi x, N))$.

우리가 이 진리들을 앞에 제시한 정의들과 고차 논리학의 원리들로부터 증명할 수 있는지 살펴 보자. 먼저, (A4)는 유한 기수의 정의로부터 직접 도출된다. 그리고 전자 관계의 정의를 이용한다면, (A1)를 증명하는 일도 그리 어렵지 않다. 또한 (A3)에서 후건이 사실 2차 개념에 관한 내포 공리를 도식의 한 예라는 점을 염두에 둔다면, (A3)의 증명도 어렵지 않게 수행할 수 있다.

- * (A1)의 증명 : 먼저, $\text{Pred}(T, X)$ 와 $\text{Pred}(T, Q)$ 를 가정하자. 그러면, 전자 관계의 정의에 따라 모든 개념 F 에 대해, $X(F)$ 와 $Q(F)$ 는 모두 $\exists x (Fx \& T_y (Fy \& y \neq x))$ 와 동치이다. 따라서, 임의의 개념 F 에 대해, $X(F)$ 와 $Q(F)$ 는 동치이므로, 2차 개념 X 와 Q 는 상호 종속되며, 공연성의 정의에 따라 두 2차 개념은 공연이다.
- * (A3)의 증명 : M 을 유한 기수라고 하자 : $\text{Fin}(M)$. 그러면 M 은 2차 개념이므로 2차 개념에 관한 내포 공리를 적용시킬 수 있다 : 즉, “ $\exists x (Fx \& M_y (Fy \& y \neq x))$ ”에서 N 은 자유가 아니므로, 2차 개념에 관한 내포 공리 $\exists N \forall F (N_x (Fx) \leftrightarrow \dots Fx \dots)$ 의 빈자리에 “ $\exists x (\varphi x \& M_y (\varphi y \& y \neq x))$ ”를 넣어 $\exists N \forall F (Nx (Fx) \leftrightarrow \exists x (Fx \& M_y (Fy \& y \neq x)))$ 를 얻을 수 있다. 이것은 (A3)의 후건이다.

이제 남은 것은 (A2) 뿐이다. 기수 이론의 공리들을 앞의 경우처럼 정식화했을 때 프레게가 어떤 식으로 (A2)를 증명했을지 추측하기 위해, 우선 『법칙』 II부에서 (A2)에 상응하는 정리 (145)를 그가 어떤 절차로 증명했는지 재고해 볼 필요가 있다. 그는 그 정리를 세 개의 예비 정리에서 도출하는데, 그 정리들은 각각 다음 사실을 말한다 : 첫째, 어느 대상도 기수 계열에서 0 앞에 나오지 않는다. 둘째, a 가 기수 계열에서 b 앞에 나오고 c 가 b 의 전자라면, a 는 c 로 끝나는 기수 계열에 속한다. 즉, 그런 경우 a 는 c 와 같거나 기수 계열에서 c 앞에 나온다. 셋째, a 가 b 로 끝나는 기수 계열에 속한다면, F 가 Q -계열에서 유전될 경우 a 가 F 아래 속한다면, b 도 F 아래 속한다. 이 세 정리를 우리의 정의들에 의해 바꾸어 정식화

한다면 다음과 같다 :

- (예비 정리 1) $\neg \mathcal{F}(\text{Pred})(M, \exists_0x \varphi x)$
- (예비 정리 2) $\mathcal{F}(\text{Pred})(M, N) \rightarrow (\text{Pred}(E, N) \rightarrow \mathcal{F}^{\equiv}(\text{Pred})(M, E))^{24)}$
- (예비 정리 3) $\mathcal{F}^{\equiv}(K)(M, N) \rightarrow (\text{Her}(\Lambda, K) \rightarrow (\Lambda(M) \rightarrow \Lambda(N)))$

(예비 정리 3)은 약한 조상성에 관한 귀납 원리로서 그에 상응하는 고단계의 원리를 이미 우리는 증명하였다. (예비 정리 1)을 증명하기 위해서는 두 문장을 보이면 된다 : 첫째, $\exists_0x \varphi x$ 의 전자가 존재하지 않는다. 둘째, 임의의 2차 개념 T 에 대해 관계 K 를 갖는 2차 개념이 없을 경우 2차 개념 M 도 K -계열에서 T 앞에 나오지 않는다. 왜냐하면 둘째 문장에서 개념 T 와 관계 K 대신 개념 $\exists_0x \varphi x$ 와 전자 관계를 대입한다면, 우리는 첫째 문장에 따라 $\exists_0x \varphi x$ 의 전자가 존재하지 않는다는 것으로부터, M 이 기수 계열에서 $\exists_0x \varphi x$ 앞에 나오지 않는다는 것을 도출할 수 있기 때문이다. 그 두 문장은 다음과 같이 정식화되는데, 이 두식을 보이는 일은 어렵지 않다.

- (a) $\neg \text{Pred}(M, \exists_0x \varphi x)$
- (b) $\mathcal{F}(K)(M, T) \rightarrow \exists \gamma K(\gamma, T)^{25})$

* (a)의 증명 : 만일 임의의 2차 개념 M 이 $\exists_0x \varphi x$ 의 전자라면, 전자 관계의 정의에 따라 모든 개념 F 에 대해, \exists_0xFx 는 $\exists x(Fx \& M_y(Fy \& y \neq x))$ 와 동치일 것이다. 그런데, \exists_0xFx 라고 하자. 그러면, 정의에 따라, F 아래에는 아무 대상도 속하지 않는다. 그런데, 개념 $F\xi \& M_y(Fy \& y \neq \xi)$ 아래 어떤 대상이 속하기 위해서는 F 아래 속하는 대상이 있어야 한다. 이것은 거짓이므로, 그 개념 아래에도 아무 대상도 속하지 않고, $\exists x(Fx \& M_y(Fy \& y \neq x))$ 은 거짓이다. 따라서, \exists_0xFx 를 가정하면, $\exists x(Fx \& M_y(Fy \& y \neq x))$ 이 성립하지 않는다. 따라서, M 은 $\exists_0x \varphi x$ 의 전자가 아니다.

* (b)의 증명 : M 이 K -계열에서 T 앞에 나온다고 가정하자. 그러면 조상성의 정의에 따라 임의의 3차 개념 Λ 에 대해 다음 식이 성립한다 : $\text{Her}(\Lambda, K) \rightarrow$

24) (예비 정리1)은 『법칙』의 정리 (126), (예비 정리 2)는 『법칙』의 정리 (143)에 상응하는 고단계의 원리이다.

25) (a)는 『법칙』의 정리 (108), (b)는 『법칙』의 정리 (124α)에 상응하는 고단계 원리이다.

$[\forall X(K(M,X) \rightarrow A(X)) \rightarrow A(T)]$. A 대신 3차 개념 “ $\exists Y K(Y, \chi)$ ”(χ 에 대해 관계 K 를 갖는 Y 가 존재한다)를 대입하자. 그러면 $\text{Her}(\exists Y K(Y, \chi), K) \rightarrow [\forall X(K(M,X) \rightarrow \exists Y K(Y, X)) \rightarrow \exists Y K(Y, T)]$. 우리가 최종으로 보여야 할 것은 $\exists Y K(Y, T)$ 이므로, 다음 두 조건을 보이면 된다 : ① $\text{Her}(\exists Y K(Y, \chi), K)$. ② $\forall X(K(M,X) \rightarrow \exists Y K(Y, X))$. 그런데 유전성의 정의에 따라 조건 ①은 $\exists Y K(Y, M) \rightarrow \forall X(K(M,X) \rightarrow \exists Y K(Y, X))$ 가 되며, 이 식의 후건은 ②와 같다. 따라서 조건 ②가 성립한다면 진리함수적 추리 원리에 의해 조건 ①도 성립된다. 따라서, 조건 ②만 보이면 되는데, ②는 고단계 논리학의 사소한 귀결이다 : 즉, 2차 개념 M 이 임의의 다른 2차 개념 X 에 대해 관계 K 를 갖는다면 존재 일반화의 원리에 따라 2차 개념 X 에 대해 관계 K 를 갖는 2차 개념이 존재한다는 것을 도출할 수 있다. 이것을 일반화하면 바라던 식을 얻는다.

이제 (A2)의 증명을 위해 남은 일은 (예비 정리 2)를 증명하는 일이다. 그 정리는 M 이 기수 계열에서 N 앞에 나오고, E 가 N 의 전자라면, E 는 M 으로 시작하는 기수 계열에 속한다는 것을 말한다. 프레게는 『법칙』에서 이에 상응하는 정리를 “ a 가 Q -계열에서 b 앞에 나온다면, b 에 대해 관계 Q 를 가지면서, a 로 시작하는 기수 계열에 속하는 어떤 대상이 있다”는 문장으로부터 도출하였다. 우리의 경우 이 문장은 다음과 같이 정식화된다 :

$$(*) \quad \mathcal{F}(K)(M,N) \rightarrow \exists T(K(T,N) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M,T))^{26}$$

이 문장은 “ χ 에 대해 관계 K 를 가지면서, M 로 시작하는 기수 계열에 속하는 어떤 2차 개념 T 가 있다”는 3차 개념이 K -계열에서 유전된다는 것, 그리고, M 이 관계 K 를 가지는 어느 2차 개념이든지 그 3차 개념 아래 속한다는 것으로부터 도출된다. 왜냐하면, 이 두 조건이 충족된다면, 조상성의 정의로부터 M 이 K -계열에서 N 앞에 나올 경우 N 도 그 3차 개념 아래 속한다는 것을 도출할 수 있기 때문이다. 두 조건은 다음과 같이 정식화된다 :

$$(c) \quad \exists T(K(T,Q) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M,T)) \rightarrow ((K)(Q,E) \rightarrow \exists T((K)(T,E) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M,T))).$$

26) 이것은 『법칙』의 정리 (141)에 상응하는 고단계 원리이다.

(d) $\forall X [K(M, X) \rightarrow \exists T (K(T, X) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T))]$.²⁷⁾

그런데, (c)는 우리가 앞에서 증명한 (약한 조상 2)와 보편 예화의 원리로부터 도출가능하고, (d)은 보편 예화의 원리와 “ M 이 M 으로 끝나는 기수 계열에 속한다”는 문장으로부터 도출가능하다.

- * (c)의 증명 : (약한 조상2)를 전환하면, $\neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, Q) \rightarrow (K(N, Q) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, N))$. 이것을 N 에 대해 일반화하면, $\neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, Q) \rightarrow \forall T (K(T, Q) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T))$. 이것을 다시 전환하면, $\exists T (K(T, Q) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)) \rightarrow \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, Q)$. 보편 예화의 원리에 따라, $\forall T ((K)(T, E) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)) \rightarrow ((K)(Q, E) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, Q))$. 이것을 전환하면, $\mathcal{F}^{\sim}(K)(M, Q) \rightarrow ((K)(Q, E) \rightarrow \exists T ((K)(T, E) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)))$. 이것을 앞의 문장과 결합하면, $\exists T (K(T, Q) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)) \rightarrow ((K)(Q, E) \rightarrow \exists T ((K)(T, E) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)))$. 따라서, 3차 개념 “ $\exists T (K(T, \chi) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T))$ ”는 K -계열에서 유전된다.
- * (d)의 증명 : 보편 예화에 따라, $\forall T (K(T, X) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)) \rightarrow (K(M, X) \rightarrow \neg \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, M))$. 이것을 전환하면, $\mathcal{F}^{\sim}(K)(M, M) \rightarrow (K(M, X) \rightarrow \exists T (K(T, X) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T)))$. M 은 M 과 공연이므로, $\mathcal{F}^{\sim}(K)(M, M)$. 따라서, $K(M, X) \rightarrow \exists T (K(T, X) \& \mathcal{F}^{\sim}(K)(M, T))$. 이것을 X 에 관해 일반화하면, 바라는 문장에 도달한다.

이제 우리는 문장 (*)에서 K 대신에 전자 관계를 대입할 수 있다. 그러면, 그 문장이 말하는 바는 다음과 같다 : “ M 이 기수 계열에서 N 앞에 나온다면, N 의 전자이면서 M 으로 시작하는 기수 계열에 속하는 어떤 T 가 존재한다.” 이제 (예비 정리 2)에 이르기 위해서는 N 의 전자이면서 M 으로 시작하는 기수 계열에 속하는 어떤 T 가 존재한다는 가정으로부터, E 가 N 의 전자일 경우 E 가 M 으로 시작하는 기수 계열에 속한다는 것을 도출할 수 있어야 한다. N 의 전자이면서 M 으로 시작하는 기수 계열에 속하는 어떤 T 가 존재한다고 가정하고, E 가 N 의 전자라고 가정하자. 만일 N 의 전자가 유일하다면, T 는 바로 E 자신일 것이고, 그에 따라 우리는 E 가 M 으로 시작하는 기수 계열에 속한다는 것을 도출할 수 있을 것이다. 따라서, (예비 정리 2)를 증명하기 위해서는 N 의 전자가 유일하다

27) (c)는 『법칙』의 정리 (138 δ), (d)는 『법칙』의 정리 (141 γ)에 상용하는 고단계의 원리이다.

는 것을 증명해야 하며, 그 증명만 가능하다면 (A2)의 증명은 완성된다.

4.3. 후자 관계의 함수성과 무한성 가정

따라서 이제 우리가 증명해야 할 것은 T 가 N 의 전자이고, E 도 N 의 전자일 경우 T 와 E 가 공연이라는 것, 즉 후자 관계가 함수적이라는 것이다. 그러나, 어떤 다른 가정 없이는 우리는 이것을 증명할 수 없다. 만약 후자 관계가 함수적이라면, 만일 2차 개념 N 이 2차 개념 E 과 T 모두의 후자라면, E 과 T 는 공연이어야 할 것이다. 반면, 우리가 수로 간주하는 어떤 2차 개념이 서로 공연이 아닌 두 전자를 가진다면, 후자 관계는 함수적이지 않다. 그런데, 우리는 세계에 대상들이 유한하게 많다는 가정으로부터, 우리가 수로 간주하는 어떤 2차 개념이 서로 공연이 아닌 두 전자를 가진다는 것을 보일 수 있다.

세계 내에 오직 열 개의 대상들이 존재한다고 하자. 그러면, “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념 아래에는 어느 1차 개념도 속하지 않을 것이고, “ φ 아래 열 두 개의 대상이 속한다”는 2차 개념 아래에도 어느 1차 개념도 속하지 않을 것이다. 즉, 그 두 2차 개념은 모두 빈 개념이다. 반면, 그 세계에서 “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 빈 개념이 아니다. 이 경우, “ φ 아래 열 두 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 후자이기도 하고, “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 후자이기도 하다. 즉, 다음의 두 문장이 성립한다 :

- (i) $\forall F[\exists_{12}xFx \leftrightarrow \exists x(Fx \& \exists_{11}y(Fy \& y \neq x))]$.
- (ii) $\forall F[\exists_{12}xFx \leftrightarrow \exists x(Fx \& \exists_{10}y(Fy \& y \neq x))]$.

먼저 (i)을 보자. 가정에 따라, 열 개 보다 많은 대상은 존재하지 않으므로, 어느 개념 F 에 대해서든지 (i)의 원편은 거짓이다. 마찬가지로, 어느 개념 F 에 대해서든지 (i)의 오른편을 만족시키는 대상 x 는 존재하지 않는다. 따라서, 어느 개념 F 에 대해서든지 (i)의 오른편과 원편은 모두 거짓이므로, 두 개념은 서로 종속된다. 그러면, 정의에 따라, “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 “ φ 아래 열 두 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 전자이다.

(ii)의 경우에도 가정에 따라 열 개 보다 많은 대상은 존재하지 않으므로, 어느 개념 F 에 대해서든지 원편은 거짓이다. 마찬가지로, 어느 개념 F 에 대해서든지

(ii)의 오른편을 만족시키는 대상 x 는 존재하지 않는다. 따라서, 어느 개념 F 에 대해서든지 (ii)의 오른편과 왼편은 모두 거짓이므로, 두 개념은 서로 종속된다. 그러면, 정의에 따라, “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 “ φ 아래 열 두 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 전자이다.

따라서, “ φ 아래 열 두 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 후자이기도 하고, “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념의 후자이기도 하다. 그런데, “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념과 공연이 아니다. 왜냐하면, “ φ 아래 열 한 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 그 아래 아무 개념도 속하지 않는 빈 개념이지만, “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념은 그렇지 않기 때문이다. 따라서, 이 경우 한 수가 서로 다른 두 전자를 가질 수 있다.²⁸⁾

이처럼 세계에 있는 대상들이 유한하게 많이 있다면, 어떤 기수의 전자의 유일성은 보증되지 않는다. 그러면, 대상들의 수가 유한하게 많지 않다고 가정할 경우에는 어떻게 되는가? 만일 세계 내에 대상들이 유한하게 많지 않다고 가정한다면, 우리가 수로 간주하는 임의의 2차 개념에 대해, 그 개념 아래 속하는 1차 개념이 적어도 하나 있을 것이다. 예를 들어, “ φ 아래 열 개의 대상이 속한다”는 2차 개념 아래에 속하는 1차 개념이 있을 것이고, “ φ 아래 백 개의 대상이 속한다”는 2차 개념 아래에 속하는 1차 개념도 있을 것이고, “ φ 아래 억 개의 대상이 속한다”는 2차 개념 아래에 속하는 1차 개념도 있을 것이다. 등등. 이 경우, 기수 개념의 정의에 따라, 그런 각 2차 개념 아래 속하는 1차 개념과 동수인 모든 1차 개념도 역시 그 2차 개념 아래 속할 것이다. 만일 그렇다면, 우리가 수로 간주하는 어느 2차 개념이든지 서로 다른 전자를 가지는 경우는 발생하지 않을 것이다. 왜냐하면, 그처럼 전자가 되는 두 2차 개념은 언제나 공연일 것이기 때문이다. 이 사실을 우리는 다음과 같이 보일 수 있다.

먼저, 수로 간주되는 각 2차 개념 아래에는 적어도 하나의 1차 개념이 속한다고 가정하자. 즉, 수로 간주되는 어느 2차 개념도 빈 개념으로 간주되지 않는다고 하자 : $\text{Card}(N) \rightarrow \exists F N(F)$. 기수 개념의 정의에 따라, 수로 간주되는 각 2차 개념 아래에 속하는 모든 1차 개념은 서로 동수이다 : $\text{Card}(N) \rightarrow \forall F (N(F) \leftrightarrow \forall G (F \approx G \leftrightarrow N(G)))$. 이제, 어떤 2차 개념 N 에 대해 전자가 되는 두 2차 개념 E 와 T 가 있다고 하고, 임의의 개념 F 가 N 아래 속한다고 가정하자. 그러면, 전자 관계의

28) 이 논증은 러셀에서 유래한다. Russell(1919), 132. 유사한 논증이 Wright(1983), 38-40에도 등장 한다.

정의에 따라 우리는 다음 두 식을 얻을 수 있다 : 모든 1차 개념 F에 대해, 다음 두 식이 성립한다.

- (iii) $\exists x(Fx \& \exists y(Fy \& y \neq x))$.
- (iv) $\exists x(Fx \& T_y(Fy \& y \neq x))$.

(iii)을 충족시키는 대상 x를 a라 하고, (iv)를 충족시키는 x를 b라 하자. 그러면, 대상 a에 대해, 식 $Fa \& \exists y(Fy \& y \neq a)$ 가 성립하고, 대상 b에 대해, 식 $Fb \& T_y(Fy \& y \neq b)$ 가 성립한다. 대상 a와 b는 모두 개념 F 아래 속하므로, 개념 $Fy \& y \neq a$ 와 $Fy \& y \neq b$ 아래에는 모두 개념 F의 경우보다 정확히 하나 적은 대상들이 속하고, 그 두 개념은 동수이다.

이제, 기수 정의에 따르면, 어떤 1차 개념이 어떤 2차 개념 아래 속할 경우 그 2차 개념 아래에는 그와 동수인 모든 1차 개념도 속한다. 그런데, 1차 개념 $Fy \& y \neq a$ 는 2차 개념 \exists 아래 속하고, 개념 $Fy \& y \neq a$ 는 개념 $Fy \& y \neq b$ 와 동수이므로, 개념 $Fy \& y \neq b$ 도 2차 개념 \exists 아래 속한다. 마찬가지로 개념 $Fy \& y \neq b$ 는 2차 개념 T 아래 속하고 개념 $Fy \& y \neq a$ 와 동수이므로, 개념 $Fy \& y \neq a$ 도 2차 개념 T 아래 속한다. 임의의 1차 개념 G가 2차 개념 \exists 아래 속한다고 가정하자. 그러면, 그 1차 개념은 기수 개념의 정의에 따라 2차 개념 \exists 아래 속하는 개념 $Fy \& y \neq a$ 와 동수이다. 그런데, 개념 $Fy \& y \neq a$ 는 2차 개념 T 아래에도 속하므로, 다시 기수 개념의 정의에 따라 그와 동수인 개념 G도 2차 개념 T 아래 속한다. 거꾸로, 임의의 1차 개념 G가 2차 개념 T 아래 속한다고 가정하자. 그러면, 그 1차 개념은 기수 개념의 정의에 따라 개념 2차 개념 T 아래 속하는 개념 $Fy \& y \neq b$ 와 동수이다. 그런데, 개념 $Fy \& y \neq b$ 는 2차 개념 \exists 아래에도 속하므로, 다시 기수 개념의 정의에 따라 그와 동수인 개념 G도 2차 개념 \exists 아래 속한다. 따라서, 임의의 1차 개념 G가 2차 개념 \exists 아래 속한다면, 그 개념은 2차 개념 T 아래에도 속하고, 그 역도 성립한다. 즉, 2차 개념 \exists 와 T 는 상호 종속되고, 그에 따라 두 개념은 공연이다. 이와 함께, 2차 개념 N에 대해 전자가 되는 두 2차 개념 \exists 와 T 가 공연임이 증명된다.²⁹⁾

따라서, 후자 관계가 함수적이라는 것을 증명하기 위해 우리는 수로 간주되는 각 2차 개념에 관해 그 개념 아래 속하는 1차 개념이 적어도 하나 있다는 가정이

29) 이것은 러셀의 유형론에 관한 볼로스의 증명을 프레게의 차원 이론 내에서 재구성한 것이다. Boolos(1994), 27-34참조.

필요하다. 이 가정은 “ φ 는 정확히 n 개 있다”는 형식의 2차 술어가 나타내는 개념이 빈 개념이 아니라는 것을 말한다. 어떤 1차 개념 F 가 “ φ 는 정확히 n 개 있다”는 2차 개념 아래 속한다면, 개념 F 아래 속하는 대상은 정확히 n 개 있을 것이다. 따라서, 수로 간주되는 각 2차 개념 아래 적어도 하나의 1차 개념이 속한다는 것은 적어도 그런 1차 개념 아래 속하는 대상들만큼 많은 대상들이 세계에 존재한다는 것을 말한다. 그런데, 앞에서 증명된 공리 (A3)에 따라 2차 개념으로서 유한 기수들의 계열에 등장하는 각 원소는 적어도 하나의 후자를 가지므로, 그 계열은 끝없이 계속된다. 따라서, 그 계열에 등장하는 어느 2차 개념도 빈 개념이 되지 않기 위해서는, 자연수들만큼 많은 대상들이 세계에 존재해야 한다. 결국, 우리가 유한 기수 계열의 원소들에 한정하더라도 후자 관계가 함수적이라는 것을 증명하기 위해서는 자연수들만큼 많은 대상들이 세계에 존재한다고 가정해야 한다.

5. 프레게에게 수는 왜 고차 개념일 수 없었는가?

이제 우리 논의를 정리해 보자. 1-2절에서 본 것처럼 수 진술에 대한 『기초』의 분석은 수가 고차 개념이라는 견해와 잘 어울린다. 그리고 수를 고차 개념으로 보더라도 『기초』에서 프레게가 지녔던 우려처럼 수 동일성의 뜻을 설명하고 산수 문장의 일반성을 표현하는 일은 어렵지 않아 보인다. 만약 수가 고차 개념이라는 견해를 진지하게 고려했다면 아마 그는 이 점을 어렵지 않게 깨달았을 것이다. 왜냐하면 3절에서 본 것처럼 산수의 기초 개념들에 대한 정의는 기수 연산자나 외연 연산자에 관한 이론을 제외한다면 프레게의 차원 이론에 대한 어떤 수 정도 요구하지 않기 때문이다. 그러나 우리가 4절에서 본 것처럼 수를 고차 개념으로 볼 경우에는 프레게가 기수 이론의 근본 법칙으로 간주한 원리들을 모두 다 증명할 수는 없다. 이 점은 그가 옹호하려 했던 논리주의에는 치명적인 것으로 보인다.

여기서 우리가 주목할 점은 바로 우리가 수를 대상으로 간주하지 않고 고차 개념으로 간주한다는 것이다. 이 경우 후자 관계의 함수성을 고단계 논리학 내에서 증명하기 위해, 우리는 수로 간주된 각 2차 개념이 빈 개념이 아니라고 가정해야 하고, 바로 그 가정은 대상들이 무한히 많이 있다는 것을 의미한다. 그러므로 결국 고단계 논리학 내에 제시된 기수 이론은 대상들이 무한히 많이 있다는 가정에 의존한다. 그러나 만약 우리가 수를 대상으로 간주한다면, 수들이 무한히 많이 있다는 것을 보일 수 있을 경우, 대상들이 무한히 많다는 것도 정당화될 수도 있을

것이다. 그리고 프레게는 실제로 수를 대상으로 간주함으로써 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 사실을 증명하였다. 그러나 이제 수를 대상으로 보지 않고 개념으로 간주함으로써 대상들의 무한성을 수들의 무한성에 근거하여 정당화할 길은 막혀버린다. 이에 따라 대상들이 무한히 많이 있다는 가정은 의심스럽게 되고 그에 따라 기수 이론의 공리들이 진리인지도 의심스럽게 된다.

모순을 극복하기 위해 러셀이 제안한 유형론 체계 내에서도 정확히 유사한 상황이 발생한다. 유형론에 따르면, 집합 기호는 문장의 맥락 밖에서 따로 의미를 가질 수 없는 불완전한 기호로 간주되며, 집합 기호가 등장하는 진술들은 그런 기호를 포함하지 않는 진술로 번역가능할 경우에만 유의미한 것으로 간주된다.³⁰⁾ 그리고, 모든 개체들에 관한 서술은 개체들의 집합에 관해서는 유의미하게 서술될 수 없고, 개체들의 집합들 모두에 관한 서술은 그런 집합들의 집합들에 관해서는 유의미하게 서술될 수 없다. 이렇게 되면, 집합들은 개체들일 수 없고, 개체들의 집합들은 개체들의 집합들일 수 없다.³¹⁾ 이런 서술 차원의 구분 때문에 러셀의 유형론 내에서도 개체들이 유한하게 많다고 가정한다면, 전자의 유일성을 보증할 수 없다. 그 반면 전자의 유일성을 보증하려면 공집합인 기수가 존재하지 않는다는 것을 말하는 무한 공리를 가정해야 한다.³²⁾

만약 프레게가 이런 난점을 알았다면, 수가 논리적 대상이라는 견해를 포기하고서도 그가 비플라톤주의적 논리주의를 받아들이지 않을 만한 충분한 이유가 있었던 것으로 보인다. 우리가 본 것처럼 『기초』에서 수를 고차 개념으로 이해하는 프로그램을 진지하게 고려하지 않지만, 그는 모순 이후에는 그런 견해를 진지하게 고려한 것으로 보인다. 『법칙』 2권의 부록에는 우리가 2절에서 고찰한 반론 이외에도 또 다른 주목할 만한 반론이 등장한다 :

그리고 그 경우에 집합들의 수 혹은 기수들의 수에 대해 말하는 일이 어떻게 가능한지를 이해할 수 없을 것이다.(Gg II, 255면 참조)

수를 고차 개념으로 이해할 때 수들의 수에 관해 말하는 일이 왜 문제가 되는가? 우선 특정 조건을 만족하는 수들의 수에 관해 말하는 일은 프레게의 논리주의에 대해 두가지 점에서 중요하다. 첫째, 논리주의를 받아들일 만한 주요 근거 중 하나는 수들이 포괄적으로 적용될 수 있다는 데 있다. 이 때문에 프레게는 산수의

30) Russell(1919), 181-2 참조.

31) Russell(1919), 184-186 참조.

32) 자세한 증명은 Boolos(1994), 42-44와 박준용(1999), 219-220 참조.

기초 개념들을 정의할 때 그런 포괄적인 용용이 어떻게 가능한지를 설명해줄 수 있어야 한다고 생각했다. 그런데 그런 포괄적 적용가능성을 보여주는 한 가지 증거는 우리가 보통의 구체적인 대상들만이 아니라 수들 자체도 셀 수 있다는 것이다. 그런데 수를 대상으로 이해하지 않고 고차 개념으로 이해하려 한다면, 그런 고차 개념들을 세는 일이 어떻게 가능한지 보일 수 있어야 한다.³³⁾

둘째, 『기초』와 『법칙』에서 기수 이론의 근본 법칙들을 논리학 내에서 증명하기 위해 프레게가 사용한 주요 전략은 수들의 수에 관해 말할 수 있다는 사실을 이용하는 것이다. 특히 그는 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 것을 증명하기 위해, 임의의 유한 기수 n 에 대해 “ n 으로 끝나는 기수 계열에 속하는”이라는 개념 아래 속하는 대상들의 수가 n 의 후자라는 사실을 이용하였다. 그런데 그런 개념 아래 속하는 대상들은 0에서 n 까지의 수들이므로, n 의 후자는 0에서 시작하여 n 으로 끝나는 수들의 수이다. 이처럼 유한 기수들의 무한성에 대한 프레게의 증명에서는 특정 조건을 만족하는 수들의 수에 관해 말하는 것은 필수적이다. 따라서 만약 수를 고차 개념으로 간주할 때 수들의 수에 관해 말하는 일이 가능하지 않다면, 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 것을 어떻게 증명할 수 있는지 보여주어야 할 것이다.³⁴⁾

여기서 다음과 같은 반론이 제기될지도 모른다 : 수를 고차 개념으로 간주할 경우, 대상들이 무한히 많이 있다는 것을 가정하지 않는 한, 후자 관계의 함수성은 증명될 수 없지만 유한 기수들의 무한성은 증명된 것이 아닌가? (A1)에 따라서 서로 다른 후자가 서로 다른 전자를 가진다는 것이 보증되고, (A3)에 따라 모든 유한 기수가 후자를 갖는다는다면, 이미 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 것은 보증되는 것이 아닌가? 하지만 그렇지 않다. 왜냐하면 만약 (A2)가 성립하지 않는다면, 유한 기수들은 자기 자신의 전자일 수도 있고, 그에 따라 (A3)가 성립한다해도 서로 다른 유한 기수들은 유한하게 많을 수도 있기 때문이다. 따라서 대상들이 무한히 많다는 것을 가정하지 않는 한, 서로 다른 유한 기수들이 무한히 많이 있다는 것도 보증되지 않는다. 따라서 수를 고차 개념으로 간주할 경우 유한 기수들의 무한성을 어떻게 보일 수 있는가 하는 프레게의 의문은 여전히 유효

33) 이 문제를 충분히 다루기 위해서는 개념들을 세는 일이 일반적으로 어떻게 가능한가 하는 문제를 다루어야 한다. 나는 다른 기회에 이 문제를 다루려고 한다.

34) 물론 수를 고차 개념으로 간주할 경우 프레게가 사용했던 그런 방법은 사용할 수가 없다. 왜냐하면 N 이 수인 2차 개념일 경우 “ N 으로 끝나는 기수 계열에 속하는”이라는 개념 아래 속하는 2차 개념들의 수는 N 과 같은 차원의 개념이 아니므로, N 의 후자가 될 수 없기 때문이다. Dummett(1991), 131-132 참조.

하다.

그러면 수를 고차 개념으로 보는 논리주의 프로그램에 대해 다음의 두 근본적인 질문이 제기된다. 첫째로, 대상들이 무한히 많이 있다는 가정은 무슨 근거에서 받아들여야 하는가? 간단히 말해, 그런 가정은 진리인가? 둘째로, 그런 가정을 논리적으로 정당화할 수 있는가? 다시 말해, 그런 가정은 논리적 진리인가? 터셀은 그런 가정이 논리적 진리라는 것만이 아니라 그것이 진리인지도 의심하였다.³⁵⁾

프레게의 만년의 시도들은 유한 기수들의 무한성을 논리적으로 정당화할 수 없다는 사실이 그가 논리주의를 포기하게 된 주요 동기 중 하나라는 점을 분명히 보여주고 있다. 수를 고차 개념으로 간주할 경우 수들의 무한성을 보이기 위해 대상들이 무한히 많이 있다고 가정해야 한다면, 그런 가정은 무슨 근거로 받아들여야 하는가? 「산수의 기초에 관한 새로운 시도」(1924-5)에서 그는 해결해야 할 문제를 다음과 같이 제기하고 있다 :

누구나 최대의 정수가 없다고 인정할 것이다. 다른 말로 하면, 무한히 많은 정수들이 있음을 인정할 것이다. 이것은 어떤 사람이 무한히 많은 정수들을 파악한 때가 있었다는 것을 험축하지 않는다. 아마, 오히려 아무도 파악한 적이 없는 무한히 많은 정수들이 있을 것이다.(Ns, 299)

프레게는 우리의 지식의 근거를 세가지로 분류하였다 : 궁극적으로 논리학의 근본 법칙들에 정당화되는 지식, 궁극적으로 공간적인 직관에 의하지 않고는 정당화될 수 없는 지식, 궁극적으로 감각 지각에 의하지 않고는 정당화될 수 없는 지식. 대상들이 무한히 많다는 가정을 우리가 받아들이려 한다면, 그런 가정은 무엇으로 정당화되어야 하는가? 우선 감각 지각에 의한 정당화는 불가능한 것으로 보인다 :

감각적인 지각으로부터 무한한 것이 전혀 획득될 수 없다는 것은 분명하다. 우리가 아무리 많은 별들을 우리의 목록에 포함시킬 수 있을지라도, 그것은 무한히 많을 수는 없으며, 해변의 모래알들의 경우도 마찬가지이다. 따라서, 우리가 정당하게 무한한 것을 인정할 수 있는 경우에도, 우리는 그것을 감각 지각으로부터 얻지 못한다.(Ns, 294)

앞에서 본 것처럼 수를 대상으로 보지 않고 개념으로 본다면 대상들이 무한히 많다는 것을 논리적으로 어떻게 정당화할 수 있을지 의심스럽다. 이 때문에 남는

35) Russell(1919), 140-141 참조.

가능성은 공간적인 직관에 의해 대상들의 무한성을 정당화하는 것이다. 프레게는 최종적으로 그런 견해를 받아들인 것으로 보인다.

아마 논리적인 지식의 원천은 독자적으로 수들을 제공할 수 없기 때문에, 우리는 기하학적인 지식의 원천들에 호소할 것이다. 이것은 중요하다. 왜냐하면, 그것은 산술학과 기하학이, 따라서 수학 전체가 하나의 같은 지식의 원천, 기하학적인 원천에서 흘러나온다는 것을 의미하기 때문이다. 따라서, 이것은 언제나 관련된 논리적인 지식의 원천과 함께 수학적 지식의 침된 원천의 지위로 상승한다.(Ns, 299)

따라서 프레게는 수들이 무한히 많이 있다는 사실은 받아들였으나 그 사실이 논리적으로 정당화될 수 있다는 것을 부정하였다. 그리고 이것은 결국 논리주의의 포기를 의미한다.

수가 논리적인 대상이라는 견해가 프레게에게 중요했던 한가지 이유는 그렇게 가정함으로써 그가 산수의 근본적 사실 중 하나로 간주하는 것, 즉 수들이 무한히 많이 있다는 것을 증명할 수 있게 된다는 데 있었다. 그는 『기초』에서 이 일이 어떻게 가능한지를 묘사하였고 『법칙』에서 그 묘사에 따라 구체적 증명을 제시하였다. 하지만 수가 논리적인 대상이라는 것을 정당화하기 위해 필수적이라고 여겼던 외연성 원리는 모순에 빠졌고, 그로 인해 그 견해는 정당화되지 않은 채 남았다. 그는 모순 발견 이후 수가 대상이 아니라 고차 개념이라는 견해를 고려하였고, 아마 그 경우 논리주의가 유지될 수 있는지 고찰하였을 것이다. 그러나 그가 그런 견해를 받아들이지 않은 것은 그 경우 수들이 무한히 많다는 것을 증명할 방법을 찾지 못했기 때문일 것이다. 이 때문에 결국 그는 수가 논리적인 대상이라는 견해만이 아니라 논리주의 자체까지 포기하게 되었을 것이다.³⁶⁾

36) 이 글의 형식적인 문제와 철학적-역사적 해석 문제에 대해 세심한 논평을 해주신 두 심사 위원께 감사한다.

참 고 문 헌

박 준 용(1999), 『프레게의 논리주의 연구』, 고려 대학교 대학원 박사학위 논문.

Boolos George(1985), Reading the Begriffsschrift, in *Mind* 94, 331-44.

_____ (1994), The Advantage of Honest Toil over Theft, in *Mathematics and Mind*, (ed.) George, A. 27-44.

Bostock, David(1979), *Logic and Arithmetic : Natural Numbers*, Oxford.

Demopoulos, William(1994), Frege and Rigourization of Analysis, in *Frege's Philosophy of Mathematics*, (ed.) Demopoulos, W., 88-68.

Dummett, Michael(1991), *Frege : Philosophy of Mathematics*, Havard University Press.

Frege, Gottlob(1964), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, (ed.) Ignacio Angelelli. Darmstadt.

_____ (1984), *Die Grundlagen der Arithmetik*. (ed.) Christian Thiel. Hamburg.

_____ (1962), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band*, Zweite unveränderte Auflage, Darmstadt.

_____ (1962), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. II. Band*, Zweite unveränderte Auflage, Darmstadt.

_____ (1983), *Nachgelassene Schriften*, (eds.) Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Hamburg.

- Heck, Richard**(1993), The Developement of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*, in *Frege's Philosophy of Mathematics*, (ed.) Demopolous, W., 257-294.
- _____ (1995), Definition by Induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*, in *Frege's Philosophy of Mathematics*, (ed.) Demopolous, W., 295-333.
- _____ (1997), Julius Caesar Objection, in *Language, Thought, and Logic*, (ed.) Heck, Richard, 273-308.
- Hodes, Harold**(1984), Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic, in *The Journal of Philosophy* 81, No.3. 1984, 123-149.
- Russell, Bertrand**(1919), *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1th edn. London, George Allen and Unwin Ltd.
- Wright, Crispin**(1983), *Frege's Conception of Numbers as Objects*, 1983, Aberdeen.